ПОПРАВНИ ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Коначне једначине кретања материјалне тачке су:

$$x = 10\cos(2t) - 5 \qquad \text{и} \qquad y = -10\sin(2t).$$

- Одредити путању тачке.
- Нацртати вектор брзине и вектор положаја у тренутку $t_{\pi/4} = \pi/4$ s.
- Одредити тангенцијално и нормално убрзање у тренутку $t_2 = 2$ s.
- Одредити закон пута и пут који тачка пређе у току друге секунде.

2. Тачка се креће равномјерно промјенљиво по кружници. Њено угаоно убрзање је $\varepsilon = -4\ \mathrm{s}^{-2}$. Ако јој се брзина мијења према закону $v = 8 - 8t$, одредити:

- полупречник кружнице и почетну угаону брзину тачке;
- вријеме потребно да се тачка обрне за два радијана;
- интензитет убрзања тачке у почетном тренутку;
- пут који је тачка прешла у првој секунди кретања.

I колоквијум (поправни)

(1) $x = 10\cos(2t) - 5$

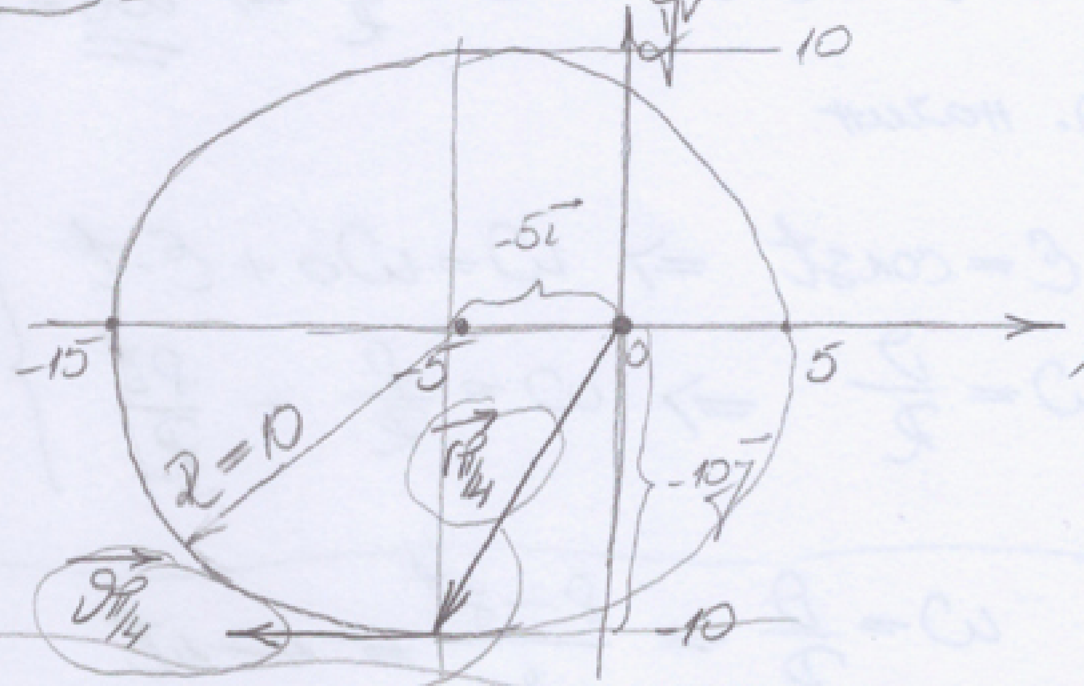
$y = -10\sin(2t)$

$$\left.\begin{aligned} x+5 &= 10\cos(2t) \\ y &= -10\sin(2t) \end{aligned}\right\}\Big|^2 \Rightarrow \left.\begin{aligned}(x+5)^2 &= 10^2\cos^2(2t) \\ y^2 &= 10^2\sin^2(2t)\end{aligned}\right\}\oplus$$

$$(x+5)^2 + y^2 = 10^2\underbrace{\left[\cos^2(2t)+\sin^2(2t)\right]}_{=1} \Rightarrow (x+5)^2 + y^2 = 10^2$$

$$t\in[0,+\infty)\ \begin{cases}\cos(2t)\in[-1,1] \Rightarrow x\in[-15,5] \\ \sin(2t)\in[-1,1] \Rightarrow y\in[-10,10]\end{cases}$$

путања је комплетна кружница



$\dot{x} = -10\sin(2t)\cdot 2 = -20\sin(2t)$

$\dot{y} = -10\cos(2t)\cdot 2 = -20\cos(2t)$

$$t_{\pi/4} = \frac{\pi}{4}s \quad \begin{cases} x_{\pi/4} = 10\cancel{\cos(2\cdot\tfrac{\pi}{4})}^{\to 0} - 5 = -5 \\ y_{\pi/4} = -10\sin(2\cdot\tfrac{\pi}{4}) = -10 \\ \dot{x}_{\pi/4} = -20\sin(2\cdot\pi/4) = -20 \\ \dot{y}_{\pi/4} = -20\cos(2\cdot\pi/4) = 0 \end{cases}$$

$\vec{r}_{\pi/4} = -5\vec{i} - 10\vec{j}$

$\vec{v}_{\pi/4} = -20\vec{i} + 0\vec{j}$

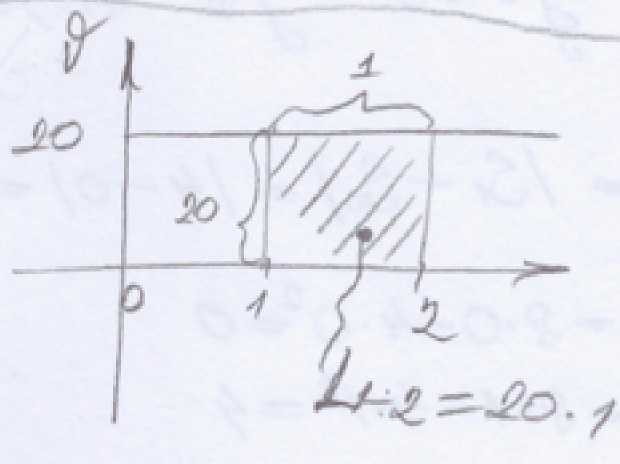
$$\underline{\underline{v}} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{20^2\sin^2(2t)+20^2\cos^2(2t)} = \sqrt{20^2\underbrace{(\sin^2(2t)+\cos^2(2t))}_{1}} = \underline{\underline{20}}$$

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(20) = 0$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{10} = 40$

$$t_2 = 2s \Rightarrow \begin{cases} a_{t2} = 0 \\ a_{n2} = 40\,m/s^2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{S}} = \int_0^t v\,dt = \int_0^t 20\,dt = \underline{\underline{20\cdot t}}$$



$L_{1-2} = 20\cdot 1 = 20m$

$\underline{\underline{L_{1-2}}} = |S_2 - S_1| = |40-20| = \underline{\underline{20m}}$

$S_1 = 20\cdot 1 = 20m$

$S_2 = 20\cdot 2 = 40m$

(2) $\varepsilon = const$ $\quad R, \omega_0 = ?$

$\varepsilon = -4 s^{-2}$ $\quad t(\varphi = 2rad) = ?$

$v = 8 - 8t$ $\quad a_0 = ?$

$L_{0 \div 1} = ?$

	R	
	s	φ
извод ↓ ↑ интегр	v	ω
	a_t	ε

1. начин

$$\left.\begin{aligned} a_t &= R \cdot \varepsilon \\ a_t &= dv/dt \end{aligned}\right\} \frac{dv}{dt} = R \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{d}{dt}(8 - 8t) = R \cdot \varepsilon \Rightarrow -8 = R \cdot \varepsilon$$

$$R = \frac{-8}{\varepsilon} = \frac{-8}{-4} = 2m$$

$$v = R \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{8 - 8 \cdot 0}{2} = \frac{8}{2} = 4 s^{-1}$$

2. начин

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = const &\Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \\ \omega = \frac{v}{R} &\Rightarrow \omega = \frac{8}{R} - \frac{8t}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\omega_0 = \frac{8}{R} = \frac{8}{2} = 4 s^{-1} \\ &\varepsilon t = -\frac{8t}{R} \Rightarrow \varepsilon = \frac{-8}{R} \to R = \frac{-8}{\varepsilon} = 2m \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{8 - 8t}{2} = 4 - 4t$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow d\varphi = \omega dt \Rightarrow \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{t} (4 - 4t)\, dt \Rightarrow \varphi = 4t - 2t^2$$

$$\varphi^* = 2rad \Rightarrow 2 = 4t^* - 2t^{*2} \Rightarrow 2t^{*2} - 4t^* + 2 = 0 \Rightarrow t^{*2} - 2t^* + 1 = 0$$

$$t^*_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1s$$

$$\left.\begin{aligned} a_t &= R \cdot \varepsilon = -8 m/s^2 \\ a_n &= R\omega^2 = 2 \cdot (4 - 4t)^2 \end{aligned}\right\} t_0 = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_{t_0} &= -8 \\ a_{n0} &= 2 \cdot 4^2 = 32 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a_0 &= \sqrt{a_{t_0}^2 + a_{n0}^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 32^2} = 32{,}98 m/s^2 \end{aligned}$$

$$s = \int_0^t v\, dt = \int (8 - 8t)\, dt = 8t - 4t^2$$

$$L_{0 \div 1} = |s_1 - s_0| = |4 - 0| = 4m$$

$$s_0 = 8 \cdot 0 - 4 \cdot 0^2 = 0$$

$$s_1 = 8 \cdot 1 - 4 \cdot 1^2 = 4$$