

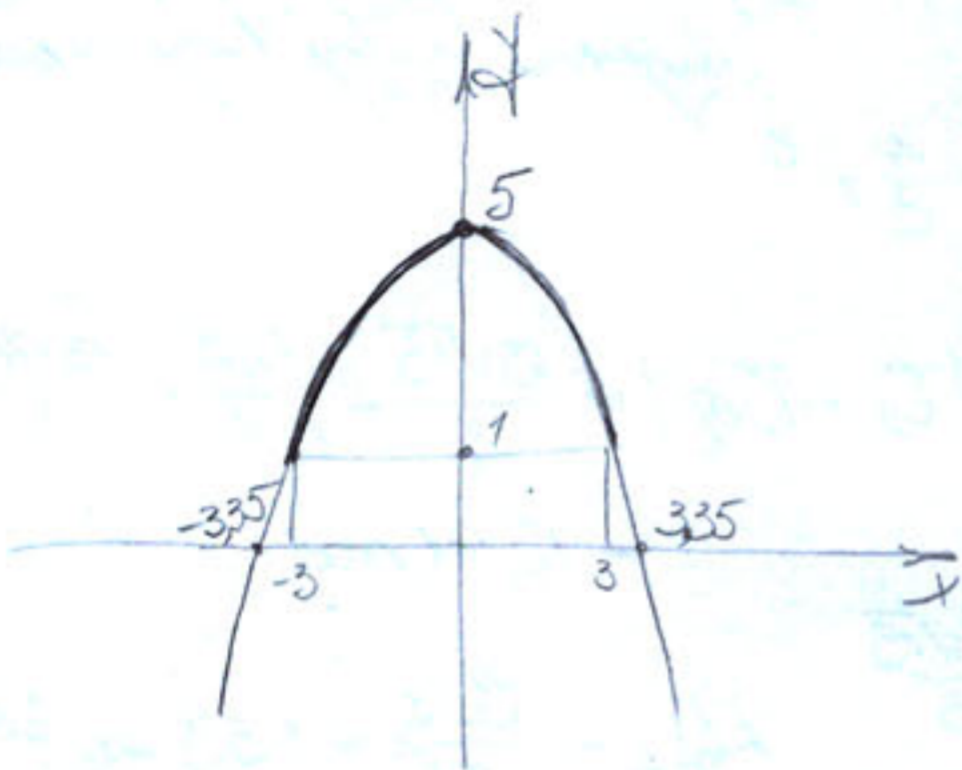
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Положај тачке мијења се према закону $\vec{r} = 3 \cos t \vec{i} + (4 \sin^2 t + 1) \vec{j}$.
Одредити:
 - линију путање и путању тачке;
 - интензитет убрзања тачке након $\pi/3$ секунди од почетка кретања;
 - временски тренутак у коме вектор положаја заклапа угао од 45° у односу на хоризонталу;
 - полупречник кривине путање у тренутку $\pi/3$ s.
2. Брзина материјалне тачке која се креће по кружници пречника 2 m мијења се према закону $v = 13 - 4t^2$. Одредити:
 - број пуних обртаја које направи тачка након двије секунде од почетка кретања;
 - техничку угаону брзину тачке након једне секунде од почетка кретања;
 - пут који тачка пређе у четвртој секунди;
 - угао између брзине и убрзања након двије секунде од почетка кретања.

$$\textcircled{1} \quad \vec{r} = 3\cos t \vec{i} + (4\sin^2 t + 1) \vec{j}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 4\sin^2 t + 1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{9} &= \cos^2 t \\ \frac{y-1}{4} &= \sin^2 t \end{aligned} \right\} \oplus \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y-1}{4} = 1$$

$$y = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) + 1 = 4 - \frac{4}{9}x^2 + 1 \Rightarrow y = 5 - \frac{4}{9}x^2$$



$$\begin{aligned} t &\in [0, +\infty) \\ x &\in [-3, 3] \\ y &\in [1, 5] \end{aligned} \quad \begin{aligned} y=0 &\Rightarrow 5 = \frac{4}{9}x^2 \\ x^2 &= \frac{45}{4} \\ x &= \pm \frac{\sqrt{45}}{2} = \pm \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ &= \pm 3,35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3\sin t \\ \dot{y} &= 8\sin t \cos t = 4\sin 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -3\cos t & \ddot{x}_{\text{пр}} &= -3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ \ddot{y} &= 8\cos 2t & \ddot{y}_{\text{пр}} &= 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \end{aligned} \quad \begin{aligned} a_{\text{пр}} &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 16} \\ &= \frac{\sqrt{9+64}}{2} = \frac{\sqrt{73}}{2} = 4,27 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

$$\vec{r} \text{ и } \vec{v} \text{ образуют угол } \alpha = 45^\circ \Rightarrow \text{tg } \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x} = 1 \Rightarrow v_y = v_x \Rightarrow 4\sin^2 t + 1 = 3\cos t$$

$$4(1 - \cos^2 t) + 1 - 3\cos t = 0 \Rightarrow -4\cos^2 t - 3\cos t + 5 = 0$$

$$\cos t = k \Rightarrow -4k^2 - 3k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4 \cdot 5}}{-8} = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{-8} = \begin{cases} 0,804 \Rightarrow t^* = 36,4^\circ \\ 1,554 \text{ не подходит} \end{cases}$$

$t = \arccos k$

ако је узрок утрпа
 ако је узрок степенна
 $t^* = 0,636$ ако је узрок
 утрпа син/кос и параболна

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{9\sin^2 t + 16\sin^2 2t}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{9 \cdot 2\sin t \cos t + 16 \cdot 4\sin 2t \cos 2t}{2\sqrt{9\sin^2 t + 16\sin^2 2t}} = \frac{9\sin 2t + 32\sin 4t}{2\sqrt{9\sin^2 t + 16\sin^2 2t}}$$

$$a_{t\text{пр}} = \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{9 \cdot \frac{3}{4} + 16 \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{-23 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5} = \frac{-23}{10} = -2,3 \text{ м/с}^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - at^2} \Rightarrow a_{n0} = \sqrt{\frac{73}{4} - \frac{23^2}{100}} = \sqrt{12,96} = 3,6 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R_{\text{эф}} = \frac{v_{13}^2}{a_{n0}} = \frac{9 \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 16 \sin^2 \frac{2\pi}{3}}{3,6} = \frac{9 \cdot \frac{3}{4} + 16 \cdot \frac{3}{4}}{3,6} = \underline{\underline{5,21 \text{ m}}}$$

② $R = \frac{2}{2} = 1 \text{ m}$

$$v = 13 - 4t^2 \quad v=0 \Rightarrow 13 - 4t^2 = 0 \Rightarrow 13 - 4t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ s} = \underline{\underline{1,85}}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = 13 - 4t^2$$

и дан моменту така
мужка сиреј кретања

$$l = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (13 - 4t^2) dt = 13t - \frac{4}{3}t^3$$

$$l_{0:2} = l_{0+\frac{\sqrt{13}}{2}} + l_{\frac{\sqrt{13}}{2}:2} = |l_{\frac{\sqrt{13}}{2}} - l_0| + |l_2 - l_{\frac{\sqrt{13}}{2}}| = \frac{13\sqrt{13}}{3} + \left| \frac{46}{3} - \frac{13\sqrt{13}}{3} \right|$$

- 15,91 rad

$$l_0 = 0$$

$$l_{\frac{\sqrt{13}}{2}} = 13 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{13\sqrt{13}}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13\sqrt{13}}{2} = \frac{13\sqrt{13}}{3}$$

$$l_2 = 26 - \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{46}{3}$$

$$\underline{\underline{H_{0:2}}} = \frac{l_{0:2}}{2\pi} = 2,53 \text{ - } \underline{\underline{2,53 \text{ оборота}}}$$

од тога за разлику
крену покрива

$$\frac{0}{\text{min}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_1 = 13 - 4 \cdot 1^2 = 9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \underline{\underline{n_1}} = 9 \cdot \frac{30}{\pi} \frac{0}{\text{min}} = \underline{\underline{85,94 \frac{0}{\text{min}}}}$$

и у интервалу $t \in [3, 4] \text{ s}$ ваља не мужка сиреј кретања

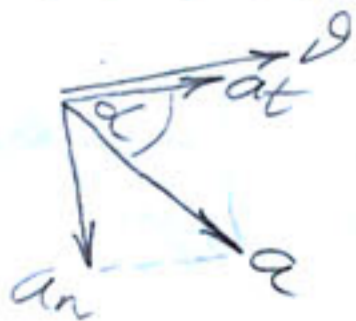
$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t (13 - 4t^2) dt = 13t - \frac{4}{3}t^3$$

$$s_3 = 13 \cdot 3 - \frac{4}{3} \cdot 3^3 = 3$$

$$s_4 = 13 \cdot 4 - \frac{4}{3} \cdot 4^3 = -33,33$$

$$s_{3:4} = |s_4 - s_3| = 36,33 \text{ m}$$

$$\angle(\vec{v}, \vec{a}) = \angle(\vec{a}_t, \vec{a}_n) = \alpha \quad \tan \alpha = \frac{a_n}{|a_t|} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{R\omega^2}{R|\dot{\omega}|} = \frac{(13 - 4 \cdot 2^2)^2}{8 \cdot 2}$$



$$l = \dot{\omega} = -8t$$

$$\tan \alpha = \frac{(13 - 16)^2}{16} = \frac{9}{16}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 29,36^\circ}}$$