

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

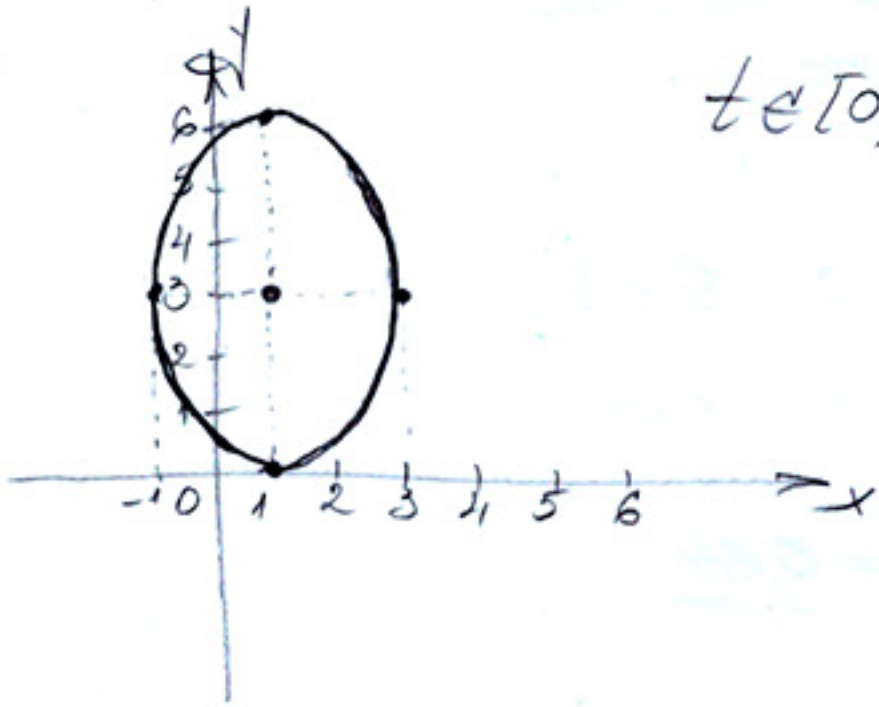
1. Брзина тачке мијења се према закону $\vec{v} = 2 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j}$. Кретање је започела из положаја $M_0(1,0)$. Одредити:
 - линију путање и путању тачке;
 - закон пута;
 - угао између вектора брзине и вектора положаја у тренутку $\pi/3$ s;
 - нормално убрзање тачке у тренутку $\pi/3$ s.
2. Тангенцијално убрзање материјалне тачке, која се креће без почетне брзине по кружници чији је полупречник $R = 0,5$ m, мијења се према закону $a_t = 2 - 4t$.
 - Одредити закон кружног кретања тачке.
 - Одредити број обртаја које тачка направи за прве двије секунде кретања.
 - Одредити техничку угаону брзину тачке након двије секунде од почетка кретања.
 - Нацртати кинематске дијаграме.

$$\textcircled{1} \vec{v} = 2\cos t \vec{i} + 3\sin t \vec{j} \quad M_0(1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = 2\cos t \\ \dot{x} = dx/dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int dx = \int 2\cos t dt \Rightarrow x-1 = 2\sin t \Big|_0^t \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \sin t$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y} = 3\sin t \\ \dot{y} = dy/dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int dy = \int 3\sin t dt \Rightarrow y = -3\cos t \Big|_0^t \Rightarrow y = -3(\cos t - \cos 0^\circ)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = \sin t \\ y = -3\cos t + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = \sin t \\ \frac{y-3}{3} = -\cos t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{(x-1)^2}{2^2} = \sin^2 t \\ \frac{(y-3)^2}{3^2} = \cos^2 t \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$$



$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x \in [-1, 3] \\ y \in [0, 6] \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \sqrt{4 + 5\sin^2 t} \\ \underline{\underline{S = s_0 \pm \int \dot{s} dt = s_0 \pm \int \sqrt{4 + 5\sin^2 t} dt}} \end{array} \right\}$$

$$\vec{v}_{\pi/3} = 2\cos \frac{\pi}{3} \vec{i} + 3\sin \frac{\pi}{3} \vec{j} = 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{i} + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} = \vec{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{r}_{\pi/3} = (2\sin \frac{\pi}{3} + 1) \vec{i} + 3(1 - \cos \frac{\pi}{3}) \vec{j} = (2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) \vec{i} + 3(1 - \frac{1}{2}) \vec{j} = (\sqrt{3} + 1) \vec{i} + \frac{3}{2} \vec{j}$$

$$v_{\pi/3} = \sqrt{4 + 5\sin^2(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{4 + 5(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{4 + 5 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{31}}{2}$$

$$r_{\pi/3} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4} + 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{25 + 8\sqrt{3}}}{2}$$

$$L = \angle(\vec{v}_{\pi/3}, \vec{r}_{\pi/3})$$

$$\cos L = \frac{\vec{v}_{\pi/3} \cdot \vec{r}_{\pi/3}}{v_{\pi/3} r_{\pi/3}} = \frac{(\vec{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \vec{j}) \cdot ((\sqrt{3} + 1) \vec{i} + \frac{3}{2} \vec{j})}{\frac{\sqrt{31}}{2} \frac{\sqrt{25 + 8\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1 + \frac{9}{4} \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{775 + 248\sqrt{3}}}{4}} = \underline{\underline{0,764}}$$

$$L = 40,18^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} = -2\sin t \\ a_y = \ddot{y} = 3\cos t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_{x\pi/3} = -2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \text{ m/s}^2 \\ a_{y\pi/3} = 3 \frac{1}{2} = 3/2 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a_{\pi/3} = 1/3 + 9/4 = \frac{\sqrt{21}}{2}}}$$

$$a_t = \dot{v} = \frac{10\sin t \cos t}{2\sqrt{4 + 5\sin^2 t}} = \frac{5\sin(2t)}{2\sqrt{4 + 5\sin^2 t}} \Rightarrow \underline{\underline{a_{t\pi/3} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{4 + 5 \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{31}}}}$$

$$\underline{\underline{a_{n\pi/3} = \sqrt{a_{\pi/3}^2 - a_{t\pi/3}^2} = \sqrt{\frac{21}{4} - \frac{25 \cdot 3}{4 \cdot 31}} = \sqrt{\frac{576}{4 \cdot 31}} = \frac{12}{\sqrt{31}} = 2,16 \text{ m/s}^2}}$$

2) $v_0 = 0$
 $R = 0,5 \text{ m}$
 $a_t = 2 - 4t$

$a_t = 2 - 4t$ } $\Rightarrow \int_{v=0}^v dv = \int_0^t (2 - 4t) dt \Rightarrow \underline{v = 2t - 2t^2}$

$\int_0^s ds = \int_0^t v dt \Rightarrow \underline{s = \int_0^t (2t - 2t^2) dt = t^2 - \frac{2}{3}t^3}$

$c = \frac{s}{R} \Rightarrow \underline{c = 2t^2 - \frac{4}{3}t^3}$ *законы сохранения*

$v = 2t - 2t^2 = 2t(1-t)$ *Тарга мурета сурет айнама*
 $v^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^* = 0 \text{ s} \\ t^* = 1 \text{ s} \end{cases}$ *након және басында*
мурета айнама

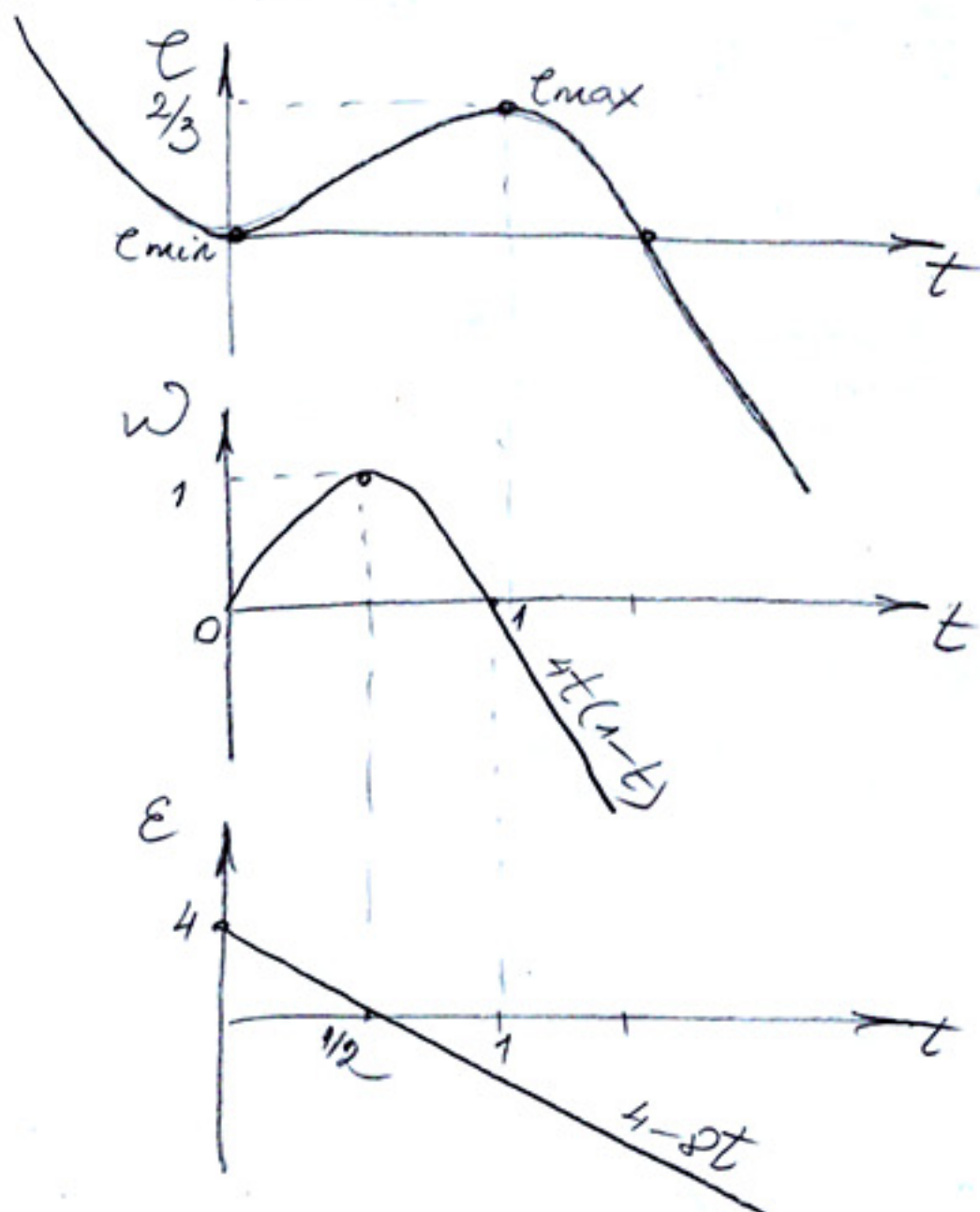
$c_{0+2} = c_{0+1} + c_{1+2} = |c_1 - c_0| + |c_2 - c_1| = | \frac{2}{3} - 0 | + | -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} |$
 $c_0 = 0$
 $c_1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$
 $c_2 = 2 \cdot 4 - \frac{4}{3} \cdot 8 = -\frac{8}{3}$
 $= \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = 4 \text{ rad}$

$\underline{n_{0+2} = \frac{c_{0+2}}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} = 0,64}$

$\omega = \frac{v}{R} = 4t - 4t^2 \Rightarrow \omega_2 = 4 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -8 \text{ grad/s}$

$\underline{n_2 = \omega_2 \cdot \frac{30}{\pi}} = -76,39 \text{ /min}$

$\epsilon = \frac{a_t}{R} = 4 - 8t$



$\omega = 4t - 4t^2 = 4t(1-t)$
 $\omega_{1/2} = 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} = 2 - 1 = 1$

$c = 2t^2 - \frac{4}{3}t^3 = 2t^2(1 - \frac{2}{3}t)$

$c = 0$ за $t_{1/2} = 0$
 $t_3 = \frac{3}{2}$

$c_{\max} = c_1 = \frac{2}{3}$

$c_{\min} = c_0 = 0$