

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Брзина тачке мијења се према закону $\vec{v} = -4 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}$. Кретање је започела из координатног почетка. Одредити:
 - линију путање и путању тачке;
 - закон пута;
 - најкраће растојање тачке од координатног почетка у тренутку $\pi/3$ s;
 - нормално убрзање тачке у тренутку $\pi/3$ s.
2. Тангенцијално убрзање материјалне тачке, која се креће почетном брзином $v_0 = 1$ m/s по кружници чији је полупречник $R = 0,5$ m, износи $a_t = -4$ m/s².
 - Одредити закон пута тачке.
 - Одредити број обртаја које тачка направи у другој секунди кретања.
 - Одредити средњу брзину тачке за прве двије секунде кретања.
 - Нацртати кинематске дијаграме.

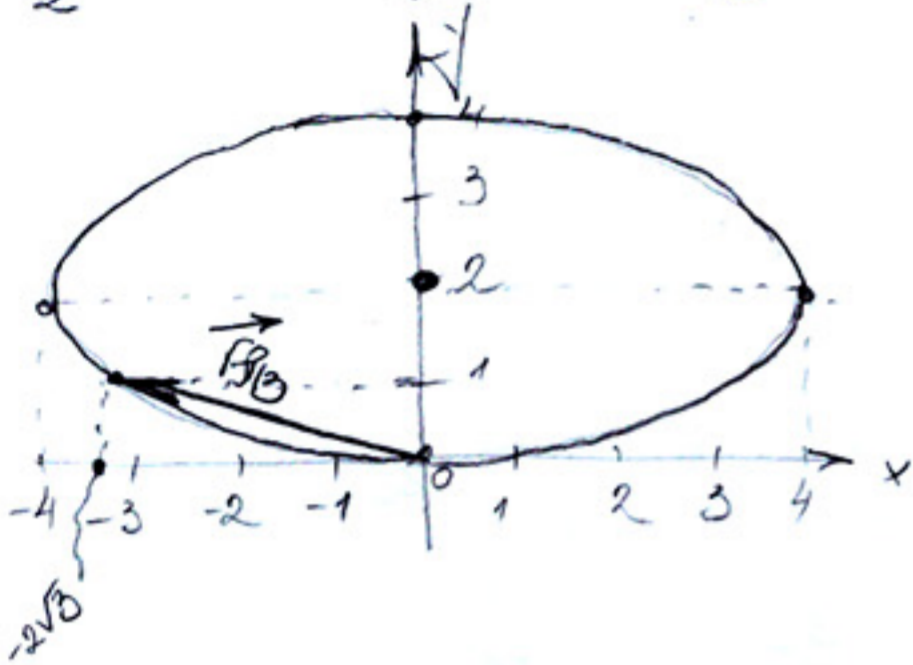
$$\textcircled{1} \vec{v} = -4\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} \quad M_0(0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = -4\cos t \\ v_x = dx/dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{x_0=0}^x dx = -4 \int_0^t \cos t dt \Rightarrow x = -4\sin t \Big|_0^t \Rightarrow x = -4\sin t$$

$$\left. \begin{array}{l} v_y = 2\sin t \\ v_y = dy/dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{y_0=0}^y dy = \int_0^t 2\cos t dt \Rightarrow y = 2\sin t \Big|_0^t \Rightarrow y = 2\sin t$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{4} = -\sin t \\ \frac{y-2}{2} = \cos t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{4^2} = \sin^2 t \\ \frac{(y-2)^2}{2^2} = \cos^2 t \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x \in [-4, 4] \\ y \in [0, 4] \end{cases}$$



$$r = \sqrt{9x^2 + 9y^2} = \sqrt{16\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{12\cos^2 t + 4}$$

$$S = S_0 \pm \int_0^t r dt = S_0 \pm \int_0^t \sqrt{12\cos^2 t + 4} dt$$

$$x_{P_0} = -4\sin \frac{\pi}{3} = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

$$r_{P_0} = \sqrt{4 \cdot 3 + 1} = \sqrt{13} \text{ m} = 3,61 \text{ m}$$

$$y_{P_0} = -2\cos \frac{\pi}{3} + 2 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 1$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-24\cos t \sin t}{2\sqrt{12\cos^2 t + 4}} = -\frac{6\sin(2t)}{2\sqrt{3\cos^2 t + 1}} = -\frac{3\sin(2t)}{\sqrt{3\cos^2 t + 1}}$$

$$a_{t|P_0} = \frac{-3\sin(2\frac{\pi}{3})}{\sqrt{3\cos^2(\frac{\pi}{3}) + 1}} = \frac{-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3 \cdot \frac{1}{4} + 1}} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} + 1}} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} \sqrt{21} = -1,96$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x = \dot{v}_x = 4\sin t \\ a_y = \dot{v}_y = 2\cos t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_{x|P_0} = 4\sin \frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ a_{y|P_0} = -2\cos \frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{r|P_0} = \sqrt{4 \cdot 3 + 1} = \sqrt{13} = 3,61$$

$$a_{\theta|P_0} = \sqrt{a_{x|P_0}^2 - a_{y|P_0}^2} = \sqrt{13 - \frac{9}{4} \cdot 21} = \sqrt{13 - \frac{27}{4}} = \frac{8}{\sqrt{4}} = \frac{8\sqrt{7}}{7} = 3,02$$

2) $v_0 = 1 \text{ m/s}$
 $R = 0,5 \text{ m}$
 $a_t = -4 \text{ m/s}^2$

$$\left. \begin{array}{l} a_t = -4 \\ a_t = dv/dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^v dv = -4 \int_0^t dt \Rightarrow \underline{v = 1 - 4t}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = 1 - 4t \\ v = ds/dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t (1 - 4t) dt \Rightarrow \underline{s = t - 2t^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = 1 - 4t \\ v^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1 - 4t^* \Rightarrow t^* = 1/4 = 0,25 \text{ s}$$

$$c = s/R = \frac{t - 2t^2}{1/2} = 2t - 4t^2$$

$$\frac{14-2}{27} = \frac{c_{1+2}}{27} = \frac{10}{27} = \frac{5}{9} = \underline{1,59}$$

$$c_{1+2} = |c_2 - c_1| = |-12 + 2| = 10 \text{ rad}$$

$$c_1 = 2 - 4 = -2 \text{ rad}$$

$$c_2 = 4 - 4 \cdot 4 = -12 \text{ rad}$$

$$\Delta S_{0+2} = S_{0+0,25} + S_{0,25+2} = |1/8 - 0| + |-6 - 1/8| = 1/8 + 49/8 = 50/8 = 25/4 = 6,25 \text{ m}$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{0,25} = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{2-1}{8} = 1/8$$

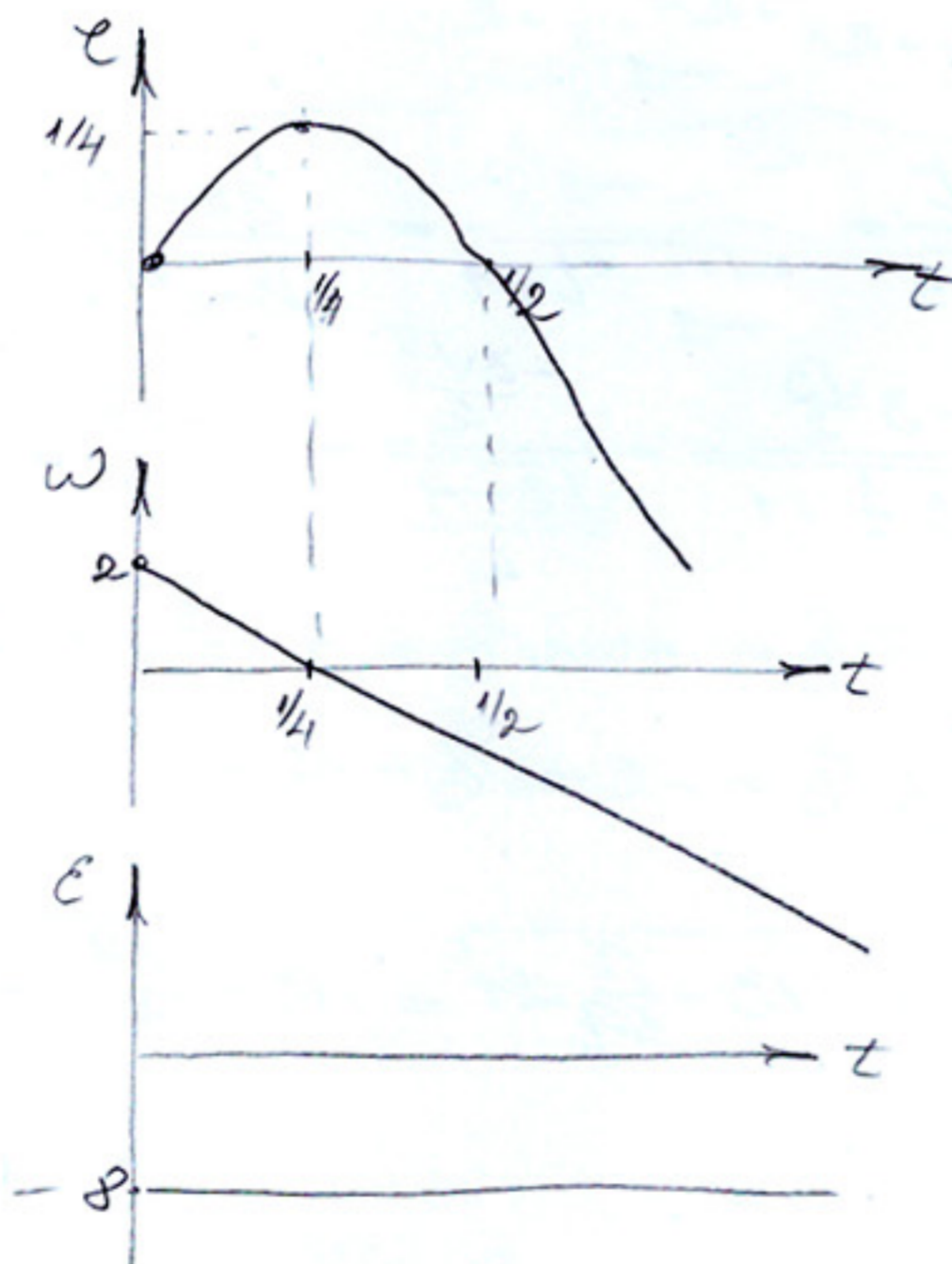
$$S_2 = 2 - 2 \cdot 4 = -6$$

$$v_{S_{0+2}} = \frac{\Delta S_{0+2}}{\Delta t_{0+2}} = \frac{25/4}{2-0} = \frac{25}{8} \text{ m/s} = 3,125 \text{ m/s}$$

$$c = \frac{at}{R} = -8$$

$$\omega = \frac{v}{R} = 2 - 8t$$

$$c = 2t - 4t^2$$



$$c = 0 \text{ za } 2t(1-2t) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 1/2$$

$$c_{1/4} = 2 \cdot \frac{1}{4} (1 - 2 \cdot \frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$$