ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Положај тачке се мијења према закону $\vec{r} = (-3\sin^2 t - 1)\vec{\imath} + 4t\vec{\jmath}$. Одредити:

- линију путање и путању тачке;
- интензитет убрзања тачке након $\pi/6$ секунди од почетка кретања;
- тангенцијално убрзање тачке у том тренутку;
- угао који вектор положаја заклапа са вертикалом на почетку кретања.

2. Брзина тачке која врши кружно кретање по кружници пречника 3 m мијења се према закону $v = 1 + 2t - 3t^2$. Одредити:

- број пуних обртаја које направи тачка за прве три секунде кретања;
- закон пута, за произвољно усвојени природни координатни систем;
- временски тренутак у коме ће интензитет тангенцијалног убрзања бити најнижи;
- угаоно убрзање тачке.

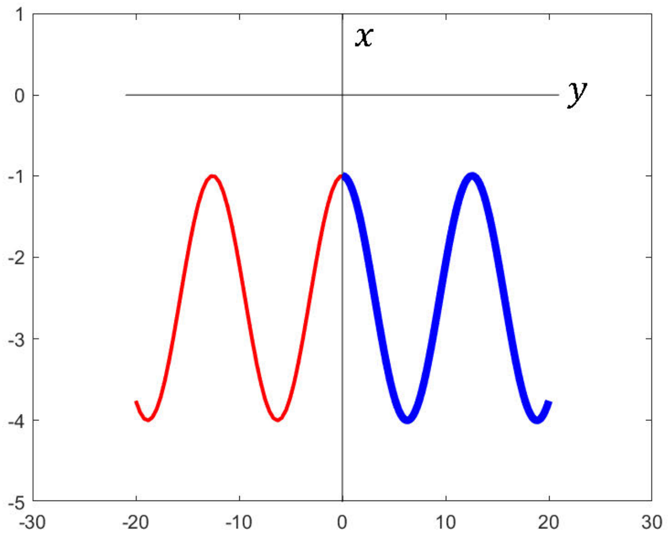
ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{r} = (-3\sin^2 t - 1)\vec{i} + 4t\vec{j}$$

<u>линија путање и путања тачке</u>

$$\left.\begin{matrix} x = -3\sin^2 t - 1 \\ y = 4t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -3\sin^2 t - 1 \\ t = y/4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{x = -3\sin^2\frac{y}{4} - 1}$$

$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x = [-4, -1] \\ y = [0, +\infty) \end{cases}$$



<u>интензитет убрзања тачке након $\pi/6$ секунди од почетка кретања</u>

$$\left.\begin{matrix} v_x = \dot{x} = -6\sin t\cos t = -3\sin(2t) \\ v_y = \dot{y} = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{9\sin^2(2t) + 16}$$

$$\left.\begin{matrix} a_x = \dot{v}_x = -6\cos(2t) \\ a_y = \dot{v}_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{36\cos^2(2t) + 0} = |6\cos(2t)| \Rightarrow \boldsymbol{a_{\pi/6}} = \left|6\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right)\right| = \mathbf{3\ \frac{m}{s^2}}$$

<u>тангенцијално убрзање тачке у тренутку $\pi/6$ секунди</u>

$$a_t = \dot{v} = \frac{18\sin(2t)\cos(2t)\,2}{2\sqrt{9\sin^2(2t) + 16}} = \frac{9\sin(4t)}{\sqrt{9\sin^2(2t) + 16}}$$

$$\boldsymbol{a_{t_{\pi/6}}} = \frac{9\sin(4t)}{\sqrt{9\sin^2(2t) + 16}} = \frac{9\sin\left(4\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{9\sin^2\left(2\frac{\pi}{6}\right) + 16}} = \frac{9\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{91}{4}}} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{91}} = \mathbf{1,634\ \frac{m}{s^2}}$$

<u>угао који вектор положаја заклапа са вертикалом на почетку кретања</u>

$$\vec{r}_0 = (-3\sin^2 0 - 1)\vec{i} + 4\cdot 0\vec{j} = -\vec{i}$$

Очигледно је да је у датом тренутку угао између вектора $\vec{r}_0$ и вертикале $90°$ (ако је оса y вертикална), јер вектор $\vec{r}_0$ има само пројекцију у правцу хоризонталне осе, осе x.

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{r}_0, \vec{j}); \quad \cos\alpha = \frac{\vec{r}_0\cdot\vec{j}}{|\vec{r}_0|\cdot|\vec{j}|} = \frac{-\vec{i}\cdot\vec{j}}{1\cdot 1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 90°}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$\boldsymbol{2R = 3}\ \mathbf{m};\quad \boldsymbol{v = 1 + 2t - 3t^2}$$

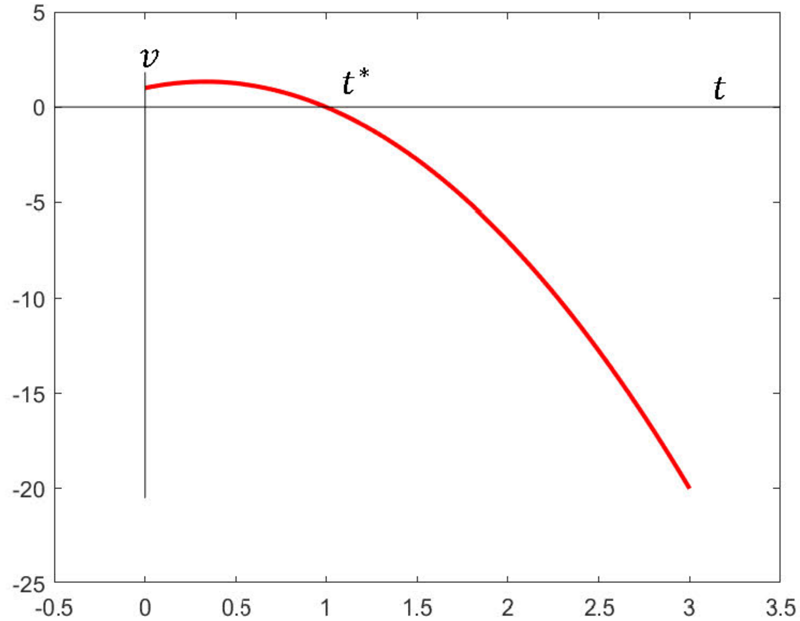
<u>број пуних обртаја које направи тачка за прве три секунде кретања</u>

$$v = R \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{1 + 2t - 3t^2}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}t - 2t^2$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}t - 2t^2 \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{\varphi_0=0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t_0=0}^{t} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}t - 2t^2\right) dt$$

$$\varphi = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{3}t^3 = \frac{2}{3}(t + t^2 - t^3)$$

Треба провјерити да ли тачка мијења смјер кретања у неком тренутку унутар посматраног интервала.



$$\left.\begin{aligned} v &= 1 + 2t - 3t^2 \\ v^* &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 + 2t^* - 3t^{*2} = 0 \Rightarrow t^*_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-6} = \begin{cases} \boxed{t_1^* = 1\ \mathrm{s}} \\ t_2^* = -1/3\ \ \mathrm{s} \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{2}{3}(t + t^2 - t^3) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \varphi_1 = \frac{2}{3}(1 + 1 - 1) = \frac{2}{3}\ \mathrm{rad} \\ \varphi_3 = \frac{2}{3}(3 + 9 - 27) = -10\ \mathrm{rad} \end{cases}$$

$$\varphi_{0\div3} = \varphi_{0\div1} + \varphi_{1\div3} = |\varphi_1 - \varphi_0| + |\varphi_3 - \varphi_1|$$

$$\varphi_{0\div3} = \left|\frac{2}{3} - 0\right| + \left|-10 - \frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{32}{3} = \frac{34}{3}\ \mathrm{rad}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{N_{0\div3}} = \frac{34}{6\pi} = \boldsymbol{1,8}\ \text{(један пуни обртај)}$$

закон пута, за произвољно усвојени природни координатни систем

Узимајући да је $s_0 = 0$ добија се:

$$s = s_0 \pm \int v dt = \pm \int (1 + 2t - 3t^2) dt = \pm (t + t^2 - t^3)$$

$$\boldsymbol{s = \pm (t + t^2 - t^3)}$$

временски тренутак у коме ће интензитет тангенцијалног убрзања бити најнижи

Интензитет је увијек позитивна вриједност. Ако се рачуном добије да је нека величина негативна, минус говори о њеном смјеру. Дакле, најнижа вриједност интензитета било које величине је нула.

$$\left.\begin{array}{l} a_t^{\#} = 0 \\ a_t = \dot{v} = 2 - 6t \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - 6t^{\#} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{t^{\#} = \frac{1}{3}\ \mathrm{s}}$$

угаоно убрзање тачке

$$\left.\begin{array}{l} a_t = R\varepsilon = \dfrac{3}{2}\varepsilon \\ a_t = 2 - 6t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}\varepsilon = 2 - 6t \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = \frac{4}{3} - 4t}$$