ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Положај тачке се мијења према закону $\vec{r} = (2\cos^2 t + 1)\vec{i} + 2t\vec{j}$. Одредити:

- линију путање и путању тачке;
- интензитет убрзања тачке након $\pi/3$ секунди од почетка кретања;
- тангенцијално убрзање тачке у том тренутку;
- угао који вектор положаја заклапа са хоризонталом на почетку кретања.

2. Брзина тачке која врши кружно кретање по кружници пречника 4 m мијења се према закону $v = 2 + 2t - 3t^2$. Одредити:

- број пуних обртаја које направи тачка у другој секунди кретања;
- закон пута, за произвољно усвојени природни координатни систем;
- временски тренутак у коме ће интензитет нормалног убрзања бити најнижи;
- угаоно убрзање тачке.

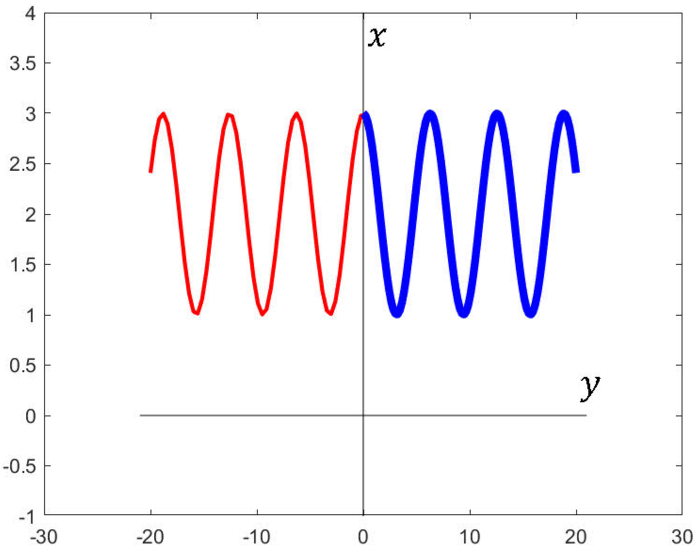
ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (\mathbf{2}\,\mathbf{cos^2}\,\boldsymbol{t} + \mathbf{1})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{2}\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

<u>линија путање и путања тачке</u>

$$\left.\begin{matrix} x = 2\cos^2 t + 1 \\ y = 2t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2\cos^2 t + 1 \\ t = y/2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{x = 2\cos^2\frac{y}{2} + 1}$$

$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x = [1, 3] \\ y = [0, +\infty) \end{cases}$$



<u>интензитет убрзања тачке након $\pi/3$ секунди од почетка кретања</u>

$$\left.\begin{matrix} v_x = \dot{x} = -4\cos t \sin t = -2\sin(2t) \\ v_y = \dot{y} = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{4\sin^2(2t) + 4}$$

$$\left.\begin{matrix} a_x = \dot{v}_x = -4\cos(2t) \\ a_y = \dot{v}_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{16\cos^2(2t) + 0} = |4\cos(2t)| \Rightarrow \boldsymbol{a_{\pi/3}} = \left|4\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right| = \mathbf{2}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

<u>тангенцијално убрзање тачке у тренутку $\pi/3$ секунди</u>

$$a_t = \dot{v} = \frac{8\sin(2t)\cos(2t)\,2}{2\sqrt{4\sin^2(2t) + 4}} = \frac{4\sin(4t)}{\sqrt{4\sin^2(2t) + 4}}$$

$$\boldsymbol{a_{t_{\pi/3}}} = \frac{4\sin(4t)}{\sqrt{4\sin^2(2t) + 4}} = \frac{4\sin\left(4\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{4\sin^2\left(2\frac{\pi}{3}\right) + 4}} = \frac{-4\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \mathbf{-1{,}309}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

<u>угао који вектор положаја заклапа са хоризонталом на почетку кретања</u>

$$\vec{r}_0 = (2\cos^2 t + 1)\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} = 3\vec{\imath}$$

Очигледно је да је у датом тренутку угао између вектора $\vec{r}_0$ и хоризонтале $0°$ (ако је оса x хоризонтална), јер вектор $\vec{r}_0$ има само пројекцију у правцу хоризонталне осе, осе x.

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{r}_0, \vec{\imath}); \quad \cos\alpha = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{\imath}}{|\vec{r}_0| \cdot |\vec{\imath}|} = \frac{3\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}}{3 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0°}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$\boldsymbol{2R = 4\ \mathrm{m};\quad v = 2 + 2t - 3t^2}$$

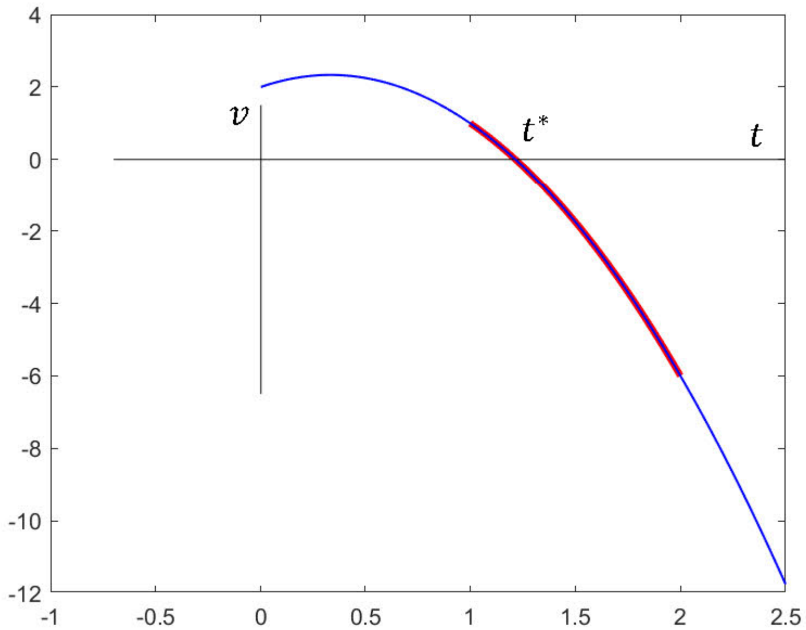
<u>број пуних обртаја које направи тачка у другој секунди кретања</u>

$$v = R \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{2 + 2t - 3t^2}{2} = 1 + t - \frac{3}{2}t^2$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 1 + t - \frac{3}{2}t^2 \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{\varphi_0=0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t_0=0}^{t} \left(1 + t - \frac{3}{2}t^2\right) dt$$

$$\varphi = t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}$$

Треба провјерити да ли тачка мијења смјер кретања у неком тренутку унутар посматраног интервала.



$$\left.\begin{aligned} v &= 2 + 2t - 3t^2 \\ v^* &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 + 2t^* - 3t^{*2} = 0 \Rightarrow t^*_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{-6} = \begin{cases} \boxed{t_1^* = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}\ \mathrm{s} = 1{,}215\ \mathrm{s}} \\ t_2^* = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{3}\ \mathrm{s} \end{cases}$$

$$\varphi = t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = t_1 + \dfrac{t_1^2}{2} - \dfrac{t_1^3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 1\ \mathrm{rad} \\ \varphi_* = t^* + \dfrac{t^{*2}}{2} - \dfrac{t^{*3}}{2} = 1{,}215 + \dfrac{1{,}215^2}{2} - \dfrac{1{,}215^3}{2} = 1{,}056\ \mathrm{rad} \\ \varphi_2 = t_2 + \dfrac{t_2^2}{2} - \dfrac{t_2^3}{2} = 2 + \dfrac{4}{2} - \dfrac{8}{2} = 0\ \mathrm{rad} \end{cases}$$

$$\varphi_{1\div 2} = \varphi_{1\div 1{,}215} + \varphi_{1{,}215\div 2} = |\varphi_{1{,}215} - \varphi_1| + |\varphi_2 - \varphi_{1{,}215}|$$

$$\varphi_{1\div 2} = |1{,}056 - 1| + |0 - 1{,}056| = 0{,}056 + 1{,}056 = 1{,}112\ \mathrm{rad}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{N_{1\div 2}} = \frac{1{,}112}{2\pi} = \mathbf{0,18} \text{ (ниједан пуни обртај)}$$

<u>закон пута, за произвољно усвојени природни координатни систем</u>

Узимајући да је $s_0 = 0$ добија се:

$$s = s_0 \pm \int v dt = \pm \int (2 + 2t - 3t^2) dt = \pm (2t + t^2 - t^3)$$

$$\boldsymbol{s = \pm(2t + t^2 - t^3)}$$

<u>временски тренутак у коме ће интензитет нормалног убрзања бити најнижи</u>

Нормално убрзање никад не може бити негативно. Дакле, његова најнижа вриједност је нула. Како је

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

то ће нормално убрзање бити једнако нули у оном тренутку у коме је брзина једнака нули. Дакле, тражени временски тренутак је

$$t^{\#} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} = 1{,}215 \text{ s.}$$

<u>угаоно убрзање тачке</u>

$$\left. \begin{aligned} a_t &= R\varepsilon = 2\varepsilon \\ a_t &= 2 - 6t \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\varepsilon = 2 - 6t \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = 1 - 3t}$$