Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 8.6.2022.

ПОПРАВНИ ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Убрзање тачке се мијења према закону $\vec{a} = (2 - 6t^2)\vec{i}$. Кретање је започела из положаја $\vec{r}_0 = -\vec{i} + 3\vec{j}$ брзином $\vec{v}_0 = -\vec{j}$. Одредити:

- коначну једначину кретања тачке;
- њено нормално убрзање у тренутку $t_2 = 2$ s;
- угао који вектор положаја заклапа са вектором убрзања на почетку кретања;
- средњу брзину тачке у четвртој секунди кретања.

2. Почевши кретање из истог положаја, по кружној путањи полупречника 2 m истовремено почињу кретање тачка A, чији се положај мијења према закону $\varphi_A = 1 + 2t - 3t^2$, и тачка B која се креће равномјерно убрзано угаоним убрзањем 2 s^{-2}, без почетне угаоне брзине.

- Одредити закон кретања тачке B.
- Која од тачака ће брже направити један пун обртај?
- У ком временском тренутку ће се изједначити брзине тачака?
- Колико је почетно убрзање тачке A?

ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{a} = (2 - 6t^2)\vec{\imath}, \qquad \vec{r}_0 = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}, \qquad \vec{v}_0 = -\vec{\jmath}$$

<u>коначна једначина кретања тачке</u>

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 2 - 6t^2 \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv_x = (2 - 6t^2)dt \Rightarrow \int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t (2 - 6t^2)dt \Rightarrow v_x = 2t - 2t^3$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 2t - 2t^3 \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx = (2t - 2t^3)dt \Rightarrow \int_{-1}^{x} dx = \int_0^t (2t - 2t^3)dt \Rightarrow x = -1 + t^2 - \frac{t^4}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_y &= 0 \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = 0 \Rightarrow v_y = v_{y_0} = -1$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= -1 \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dy = -dt \Rightarrow \int_3^{y} dy = -\int_0^t dt \Rightarrow y = 3 - t$$

$$\vec{r} = \left(-1 + t^2 - \frac{t^4}{2}\right)\vec{\imath} + (3 - t)\vec{\jmath}$$

<u>нормално убрзање тачке у тренутку $t_2 = 2$ s</u>

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2t - 2t^3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4t^2 - 8t^4 + 4t^6 + 1}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{8t - 32t^3 + 24t^5}{2\sqrt{4t^2 - 8t^4 + 4t^6 + 1}} \Rightarrow a_{t_2} = \frac{16 - 256 + 768}{2\sqrt{16 - 128 + 256 + 1}} = 21{,}924$$

$$\vec{a} = (2 - 6t^2)\vec{\imath} \Rightarrow a = |2 - 6t^2| \Rightarrow a_2 = 22$$

$$a_{n_2} = \sqrt{a_2^2 - a_{t_2}^2} = \sqrt{22^2 - 21{,}924^2} = 1{,}827$$

<u>угао који вектор положаја заклапа са вектором убрзања на почетку кретања</u>

$$\vec{a} = (2 - 6t^2)\vec{\imath} \Rightarrow \vec{a}_0 = 2\vec{\imath} \Rightarrow a_0 = 2$$

$$\vec{r} = \left(-1 + t^2 - \frac{t^4}{2}\right)\vec{\imath} + (3 - t)\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{r}_0 = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \Rightarrow r_0 = \sqrt{10}$$

$$\alpha = \measuredangle(\vec{r}_0, \vec{a}_0)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{a}_0}{r_0 \cdot a_0} = \frac{(-\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) \cdot 2\vec{\imath}}{2\sqrt{10}} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -0{,}316 \Rightarrow \alpha = \arccos(-0{,}316) = 108{,}43°$$

средња брзина тачке у четвртој секунди кретања

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}_{sr_{3\div4}} = \frac{\Delta\vec{r}_{3\div4}}{\Delta t_{3\div4}}$$

$$\vec{r} = \left(-1 + t^2 - \frac{t^4}{2}\right)\vec{\imath} + (3 - t)\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_3 = \left(-1 + 9 - \frac{81}{2}\right)\vec{\imath} + (3 - 3)\vec{\jmath} = -\frac{65}{2}\vec{\imath} \\ \vec{r}_4 = \left(-1 + 16 - \frac{256}{2}\right)\vec{\imath} + (3 - 4)\vec{\jmath} = -113\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{sr_{3\div4}} = \frac{(-113\vec{\imath} - \vec{\jmath}) - \left(-\frac{65}{2}\vec{\imath}\right)}{4 - 3} = -\frac{161}{2}\vec{\imath} - \vec{\jmath}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$R = 2\ \mathrm{m}, \qquad \varphi_A = 1 + 2t - 3t^2, \qquad \varepsilon_B = 2\ \mathrm{s}^{-2}, \qquad \omega_{B_0} = 0$$

<u>Одредити закон кретања тачке B.</u>

Потребно је имати на уму да тачка A и тачка B почињу кретање из истог положаја. Тај положај не мора износити нула радијана. Која је његова вриједност закључићемо из закона кретања тачке A.

$$\varphi_A = 1 + 2t - 3t^2 \Rightarrow \varphi_{A_0} = 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 1$$

$$\varphi_{B_0} = \varphi_{A_0} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_B &= 2 \\ \varepsilon_B &= \frac{d\omega_B}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\omega_B = 2dt \Rightarrow \int_{\omega_{B_0}=0}^{\omega_B} d\omega_B = 2\int_0^t dt \Rightarrow \omega_B = 2t$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_B &= 2t \\ \omega_B &= \frac{d\varphi_B}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\varphi_B = 2tdt \Rightarrow \int_{\varphi_{B_0}=1}^{\varphi_B} d\varphi_B = 2\int_0^t tdt \Rightarrow \varphi_B = 1 + t^2$$

<u>Која од тачака ће брже направити један пун обртај?</u>

Провјеравамо да ли тачка A мијења смјер кретања.

$$\omega_A = \frac{d\varphi_A}{dt} = 2 - 6t$$

$$\omega_A^* = 0 \Rightarrow 2 - 6t^* = 0 \Rightarrow t^* = \frac{1}{3}$$

Мијења, и то у тренутку $t^* = 1/3$.

$$N_A = \frac{\varphi_A}{2\pi} = \frac{1 + 2t - 3t^2}{2\pi}$$

Провјеравамо колико обртаја тачка A направи прије него промијени смјер обртања.

$$N_A^* \equiv N_{A_{t^*}} = \frac{1 + 2t^* - 3t^{*2}}{2\pi} = \frac{1 + \frac{2}{3} - 3\frac{1}{9}}{2\pi} = \frac{\frac{4}{3}}{2\pi} = \frac{2}{3\pi} = 0{,}212$$

$$N_{A_0} = \frac{1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} = 0{,}159$$

$$N_{A_{0\div t^*}} = \left|N_{A_{t^*}} - N_{A_0}\right| = \left|\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{2\pi}\right| = \left|\frac{4-3}{6\pi}\right| = \frac{1}{6\pi} = 0{,}053$$

Тачка не направи један пун обртај то тренутка заустављања t^*. Остатак до једног пуног обртања направи након t^*.

$$N_{A_{0\div t^\#}} = N_{A_{0\div t^*}} + N_{A_{t^*\div t^\#}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{6\pi} + N_{A_{t^*\div t^\#}} \Rightarrow N_{A_{t^*\div t^\#}} = 1 - \frac{1}{6\pi} = \frac{6\pi - 1}{6\pi} = 0{,}947$$

$$\left.\begin{matrix} N_{A_{t^*\div t^\#}} = \left|N_{A_{t^\#}} - N_{A_{t^*}}\right| \\ N_{A_{t^*\div t^\#}} = 0{,}947 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|N_{A_{t^\#}} - N_{A_{t^*}}\right| = 0{,}947 \Rightarrow \left|\frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}}\right| = 0{,}947$$

$$\left|\frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}}\right| = \begin{cases} \dfrac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}}, \text{за } \dfrac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}} \geq 0 \\ N_{A_{t^*}} - \dfrac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi}, \text{за } \dfrac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}} < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}} = 0 \Rightarrow 1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2 - 2\pi N_{A_{t^*}} = 0 \Rightarrow -3{t^\#}^2 + 2t^\# + 1 - 2\pi N_{A_{t^*}} = 0$$

$$-3{t^\#}^2 + 2t^\# + 1 - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow -3{t^\#}^2 + 2t^\# - \frac{1}{3} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12\frac{1}{3}}}{6} = \frac{-2 \pm 0}{6} = \begin{cases} t_1 = -\dfrac{1}{3} \\ t_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$-3{t^\#}^2 + 2t^\# - \frac{1}{3} = -3\left(t + \frac{1}{3}\right)\left(t + \frac{1}{3}\right) = -3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2$$

Израз у загради се квадрира, па је број који се добија увијек позитиван. Пошто се тај број множи за -3 цјелокупни израз је увијек негативан. Према томе важи сљедећа релација:

$$\left|\frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}}\right| = N_{A_{t^*}} - \frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi}$$

Са тим се враћамо у полазни израз са почетка странице

$$\left|\frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} - N_{A_{t^*}}\right| = 0{,}947 = \frac{6\pi - 1}{6\pi} \Rightarrow N_{A_{t^*}} - \frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} = \frac{6\pi - 1}{6\pi}$$

$$0{,}212 - \frac{6\pi - 1}{6\pi} - \frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3\pi} - \frac{6\pi - 1}{6\pi} - \frac{1 + 2t^\# - 3{t^\#}^2}{2\pi} = 0$$

$$4 - 6\pi + 1 - 3 - 6t^\# + 9{t^\#}^2 = 0 \Rightarrow 9{t^\#}^2 - 6t^\# + 2 - 6\pi = 0$$

$$t^\#_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot (2 - 6\pi)}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 606{,}584}}{18} = \begin{cases} t^\#_1 = -1{,}075 \\ t^\#_2 = 1{,}7416 \end{cases}$$

<u>Тачки А је потребно 1,7416 секунди да направи један пуни обртај.</u>

Како је $\omega_B = 2t$ закључујемо да тачка B не мијења смјер кретања.

$$N_B = \frac{\varphi_B}{2\pi} = \frac{1 + t^2}{2\pi}$$

$$N^\#_B \equiv N_{B_{t^\#}} = \frac{1 + {t^\#}^2}{2\pi}$$

$$N_{B_0} = \frac{1 + 0^2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

$$N_{B_{0\div t^{\#}}} = \left|N_{B_{t^{\#}}} - N_{B_0}\right| = \left|\frac{1+t^{\#2}}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\right| = \left|\frac{t^{\#2}}{2\pi}\right|$$

$$\left|\frac{t^{\#2}}{2\pi}\right| = \begin{cases} \frac{t^{\#2}}{2\pi}, \text{за } \frac{t^{\#2}}{2\pi} \geq 0 \\ -\frac{t^{\#2}}{2\pi}, \text{за } \frac{t^{\#2}}{2\pi} < 0 \end{cases}$$

Посматрани израз не може бити негативан због квадрата, па је

$$\left|\frac{t^{\#2}}{2\pi}\right| = \frac{t^{\#2}}{2\pi}$$

$$\left.\begin{matrix} N_{B_{0\div t^{\#}}} = \frac{t^{\#2}}{2\pi} \\ N_{B_{0\div t^{\#}}} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{t^{\#2}}{2\pi} = 1 \Rightarrow t^{\#2} = 2\pi \Rightarrow t^{\#} = \sqrt{2\pi} = 2{,}507 \text{ s}$$

<u>Тачки B је потребно 2,507 секунди да направи један пуни обртај.</u>

Дакле, тачка A ће брже направити један пун обртај него тачка B.

<u>У ком временском тренутку ће се изједначити брзине тачака?</u>

$$\left.\begin{matrix} \omega_A = 2 - 6t \\ v_A = R\omega_A \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_A = 2(2 - 6t)$$

$$\left.\begin{matrix} \omega_B = 2t \\ v_B = R\omega_B \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_B = 4t$$

$$v_A^* = v_B^* \Rightarrow 2(2 - 6t^*) = 4t^* \Rightarrow 2 - 6t^* = 2t^* \Rightarrow 2 = 8t^* \Rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

<u>Колико је почетно убрзање тачке A?</u>

$$\left.\begin{matrix} \omega_A = 2 - 6t \\ \varepsilon_A = \frac{d\omega_A}{dt} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon_A = -6$$

$$\left.\begin{matrix} a_{A_t} = R\varepsilon_A \\ a_{A_n} = R\omega_A^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_{A_t} = 12 \\ a_{A_n} = 2(2 - 6t)^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_A = \sqrt{12^2 + [2(2 - 6t)^2]^2}$$

$$a_{A_0} = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208} = 14{,}42$$