

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Убрзање тачке се мијења према закону $\vec{a} = 2 \cos t \vec{i}$. Кретање је започела из положаја $(1,0)$ брзином $2\vec{i} - 4\vec{j}$. Одредити:
 - линију путање и путању тачке;
 - полупречник закривљености путање у тренутку $t_1 = 1$ s;
 - положај тачке у правцу осе x у тренутку у коме њена удаљеност од координатног почетка у правцу осе y износи 3 m;
 - средње убрзање за прве три секунде кретања.
2. Нормално убрзање тачке која се креће по кружници чији је полупречник $R = 0,5$ m мијења се према закону $a_n = 8t^2(1 - t)^2$.
 - Одредити број обртаја које тачка направи за прве три секунде кретања.
 - Одредити средњу угаону брзину за наведени период кретања.
 - Одредити убрзање тачке у тренутку заустављања.
 - Нацртати закон промјене техничке угаоне брзине тачке.

ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{a} = 2 \cos t \vec{i}, \quad M_0(1,0), \quad \vec{v}_0 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

линија путање и путања тачке

$$\left. \begin{array}{l} a_x = 2 \cos t \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_x = 2 \cos t dt \Rightarrow \int_2^{v_x} dv_x = 2 \int_0^t \cos t dt \Rightarrow v_x = 2 + 2 \sin t$$

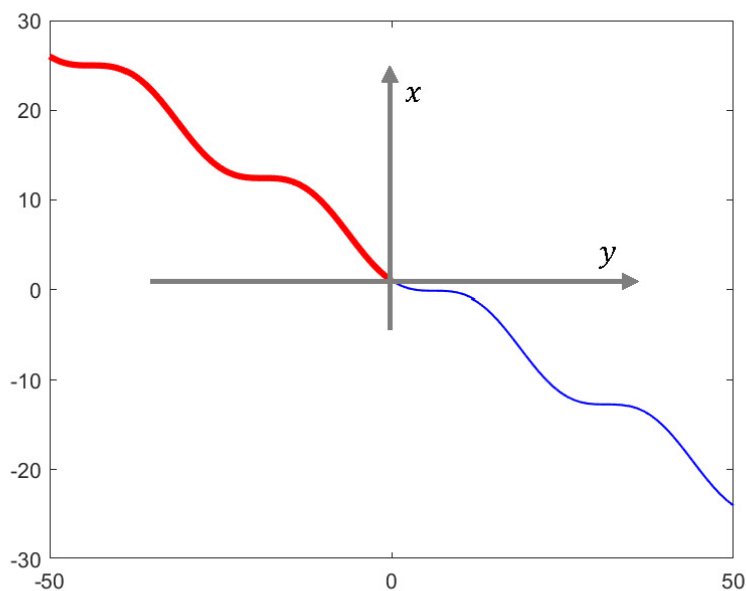
$$\left. \begin{array}{l} v_x = 2 + 2 \sin t \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dx = (2 + 2 \sin t) dt \Rightarrow \int_1^x dx = \int_0^t (2 + 2 \sin t) dt \Rightarrow$$

$$x = 1 + 2t - 2(\cos t - \cos 0) = 1 + 2t - 2 \cos t + 2 = 3 + 2t - 2 \cos t$$

$$\left. \begin{array}{l} a_y = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_y = 0 dt \Rightarrow \int_{-4}^{v_y} dv_y = 0 \Rightarrow v_y = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} v_y = -4 \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dy = -4 dt \Rightarrow \int_0^y dy = -4 \int_0^t dt \Rightarrow y = -4t$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + 2t - 2 \cos t \\ y = -4t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 - \frac{y}{2} - 2 \cos\left(-\frac{y}{4}\right) \\ t = -\frac{y}{4} \end{array} \right\}$$



$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in [1, +\infty) \\ y \in (-\infty, 0] \end{array} \right\}$$

полупречник закривљености путање у тренутку $t_1 = 1$ s

$$\left. \begin{array}{l} v_x = 2 + 2 \sin t \\ v_y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{(2 + 2 \sin t)^2 + 16}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2(2 + 2 \sin t)2 \cos t}{2\sqrt{(2 + 2 \sin t)^2 + 16}} \Rightarrow a_{t_1} = \frac{4(1 + \sin 1) \cos 1}{\sqrt{(2 + 2 \sin 1)^2 + 16}} = 0,7319$$

$$\vec{a} = 2 \cos t \vec{i} \Rightarrow a = |2 \cos t| \Rightarrow a_1 = |2 \cos 1| = 1,0806$$

$$a_{n_1} = \sqrt{a_1^2 - a_{t_1}^2} = \sqrt{1,0806^2 - 0,7319^2} = 0,795$$

$$a_{n_1} = \frac{v_1^2}{R_{k_1}} \Rightarrow R_{k_1} = \frac{v_1^2}{a_{n_1}} = \frac{(2 + 2 \sin 1)^2 + 16}{0,795} = 37,19 \text{ m}$$

положај тачке у правцу осе x у тренутку u коме њена удаљеност од координатног почетка у правцу осе y износи 3 m

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + 2t - 2 \cos t \\ y = -4t \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} |y^*| = 3 \\ |y^*| = 4t^* \end{array} \right\} \Rightarrow 4t^* = 3 \Rightarrow t^* = \frac{3}{4}$$

$$x^* = 3 + 2t^* - 2 \cos t^* = 3 + \frac{3}{2} - 2 \cos \frac{3}{4} = 3,0366 \text{ m}$$

средње убрзање за прве три секунде кретања

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{sr0 \div 3} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_0}{3 - 0} = \frac{(2 + 2 \sin 3)\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{i} + 4\vec{j}}{3} = \frac{2 \sin 3 \vec{i}}{3} = 0,094\vec{i}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$a_n = 8t^2(1-t)^2, \quad R = 0,5 \text{ m}$$

број обртаја које тачка направи за прве три секунде кретања

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 8t^2(1-t)^2 \\ a_n = R\omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega^2 = \frac{8t^2(1-t)^2}{R} = 16t^2(1-t)^2 \Rightarrow \omega = 4t(1-t)$$

$$\omega^* = 0 \Rightarrow 4t^*(1-t^*) = 0 \Rightarrow t^* = 1 \text{ s}$$

$$N_{0 \div 3} = N_{0+1} + N_{1 \div 3} = |N_1 - N_0| + |N_3 - N_1|$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 4t(1-t) = 4t - 4t^2 \\ \omega = \frac{d\varphi}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow d\varphi = (4t - 4t^2)dt \Rightarrow \int_0^\varphi d\varphi = \int_0^t (4t - 4t^2)dt \Rightarrow \varphi = 2t^2 - \frac{4t^3}{3}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2t^2 - \frac{4t^3}{3}}{2\pi} \Rightarrow \begin{cases} N_0 = 0 \\ N_1 = \frac{2 - \frac{4}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3\pi} \\ N_3 = \frac{18 - 36}{2\pi} = -\frac{9}{\pi} \end{cases}$$

$$N_{0 \div 3} = |N_1 - N_0| + |N_3 - N_1| = \left| \frac{1}{3\pi} \right| + \left| -\frac{9}{\pi} - \frac{1}{3\pi} \right| = \frac{1}{3\pi} + \frac{28}{3\pi} = \frac{29}{3\pi} = \mathbf{3,077}$$

средња угаона брзина за прве три секунде кретања

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\omega_{sr0 \div 3} = \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{3 - 0} = \frac{2\pi(N_3 - N_0)}{3} = -6 \text{ s}^{-1}$$

убрзање тачке у тренутку заустављања

$$a_t = R\varepsilon = R \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (4t - 4t^2) = 2 - 4t \Rightarrow a_t^* = 2 - 4t^* = 2 - 4 = -2$$

$$a_n = 8t^2(1-t)^2 \Rightarrow a_n^* = 8t^{*2}(1-t^*)^2 = 0$$

$$\mathbf{a^* = 2 \text{ m/s}^2}$$

закон промјене техничке угаоне брзине тачке

$$\frac{\text{obr}}{\text{min}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{\pi \text{ rad}}{30 \text{ s}} \Rightarrow n \frac{\pi}{30} = \omega$$

$$\omega = 4t - 4t^2 \Rightarrow \mathbf{n = (4t - 4t^2) \frac{30}{\pi} = \frac{120t}{\pi} (1-t)}$$

