ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

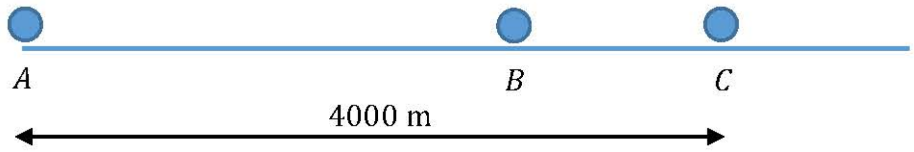
1. Почевши праволинијско кретање без почетне брзине, тачка се прву половину времена кретала убрзањем од $0{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, а другу половину убрзањем од $-2{,}2\ \mathrm{m/s^2}$ све док није доспјела у положај који је у односу на почетни удаљен 4 km. Одредити средњу брзину на посматраном кретању.

2. Положај тачке се мијења према закону $\vec{r} = 2t\vec{\imath} + (4t^3 + t + 1/2)\vec{\jmath}$. Одредити:

- линију путање тачке;
- интензитет нормалног убрзања након једне секунде од почетка кретања;
- приближну вриједност положаја у правцу осе y након 0,6 s од почетка кретања користећи се трапезним правилом за нумеричку интеграцију закона промјене брзине у правцу осе y, уз дијељење домена на три области једнаке ширине, а потом рачунску грешку која се прави.

ПРВИ ЗАДАТАК

Почевши праволинијско кретање без почетне брзине, тачка се прву половину времена кретала убрзањем од 0,8 $\mathrm{m/s^2}$, а другу половину убрзањем од $-2{,}2\ \mathrm{m/s^2}$ све док није доспјела у положај који је у односу на почетни удаљен 4 km. Одредити средњу брзину на посматраном кретању.



Кретање је равномјерно промјенљиво праволинијско, па можемо да се користимо сљедећим готовим изразима:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

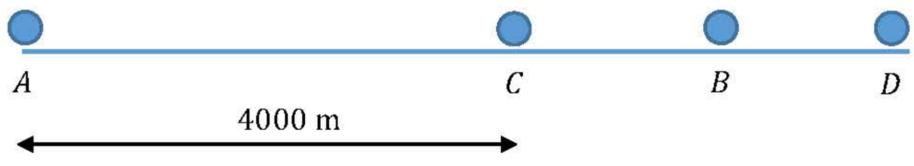
Укупно вријеме кретања означићемо са $2t^{\#}$.

$\boldsymbol{A-B}$	$\boldsymbol{B-C}$
$a = 0{,}8$ $t_{AB} = t^{\#}$ $\left.\begin{array}{l} v = 0{,}8t \\ s = 0{,}4t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_B = 0{,}8t^{\#} \\ s_B = 0{,}4{t^{\#}}^2 \end{array}\right\}$	$a = -2{,}2$ $t_{BC} = t^{\#}$ $\left.\begin{array}{l} v = v_B - 2{,}2t \\ s = v_B t - 1{,}1t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = 0{,}8t^{\#} - 2{,}2t \\ s = 0{,}8t^{\#}t - 1{,}1t^2 \end{array}\right\}$

Провјеравамо да ли ће тачка промијенити смјер кретања у неком моменту на дионици $B-C$ гдје је кретање успорено.

$$\left.\begin{array}{l} v^* = 0{,}8t^{\#} - 2{,}2t^* \\ v^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0{,}8t^{\#} - 2{,}2t^* = 0 \Rightarrow t^* = \frac{0{,}8}{2{,}2}t^{\#}$$

Тачка у другој дионици путује $t^{\#}$ секунди, а зауставиће се након t^* секунди. Пошто је $t^* < t^{\#}$, то значи да ће тачка промијенити смјер кретања у посматраном временском интервалу, тј. да ће тачка продужити кретање мимо тачке C све док не стигне у положај D у коме се зауставља, а затим вратити назад према положају C.



Према томе, постоје три етапе кретања, при чему је:

$$t_{AB} = t^{\#}, \qquad t_{BD} = t^{*}, \qquad t_{BD} + t_{DC} = t^{\#} \Rightarrow t_{DC} = t^{\#} - t^{*} = t^{\#} - \frac{0,8}{2,2}t^{\#} = \frac{1,4}{2,2}t^{\#}.$$

$\boldsymbol{A-B}$	$\boldsymbol{B-D}$	$\boldsymbol{D-C}$
$a = 0,8$	$a = -2,2$	$a = -2,2$
$\left.\begin{matrix} v = 0,8t \\ s = 0,4t^2 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} v = v_B - 2,2t \\ s = v_B t - 1,1t^2 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} v = v_D - 2,2t \\ s = v_D t - 1,1t^2 \end{matrix}\right\}$
$\left.\begin{matrix} v_B = 0,8t^{\#} \\ s_{AB} = 0,4{t^{\#}}^2 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} v = 0,8t^{\#} - 2,2t \\ s = 0,8t^{\#}t - 1,1t^2 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} v = -2,2t \\ s = -1,1t^2 \end{matrix}\right\}$
	$\left.\begin{matrix} v_D = 0 \\ s_{BD} = 0,8t^{\#}t^{*} - 1,1{t^{*}}^2 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} v_C = -2,2t_{DC} \\ s_{DC} = -1,1{t_{DC}}^2 \end{matrix}\right\}$

Из поставке задатка знамо да је $s_C = 4000$ m.

$$\left.\begin{matrix} s_C = 4000 \text{ m} \\ s_C = s_{AB} + s_{BD} + s_{DC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0,4{t^{\#}}^2 + 0,8t^{\#}t^{*} - 1,1{t^{*}}^2 - 1,1{t_{DC}}^2 = 4000$$

$$0,4{t^{\#}}^2 + 0,8t^{\#}\frac{0,8}{2,2}t^{\#} - 1,1\frac{0,8^2}{2,2^2}{t^{\#}}^2 - 1,1\frac{1,4^2}{2,2^2}{t^{\#}}^2 = 4000$$

$${t^{\#}}^2\left(0,4 + \frac{0,8^2}{2,2} - 1,1\frac{0,8^2}{2,2^2} - 1,1\frac{1,4^2}{2,2^2}\right) = 4000$$

$$t^{\#} = 200 \text{ s}$$

$$t^{*} = \frac{0,8}{2,2}200, \qquad t_{DC} = \frac{1,4}{2,2}200$$

Укупно вријеме кретања је:

$$\Delta t = t_{AB} + t_{BD} + t_{DC} = 2t^{\#} = 400 \text{ s}.$$

Укупни пређени пут је:

$$\Delta s = |s_{AB}| + |s_{BD}| + |s_{DC}| = |16000| + |5818,18| + |-17818,18| = 39636,36 \text{ m}.$$

Средња брзина је:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathbf{39636,36}}{\mathbf{400}} = \mathbf{99,09 \ m/s = 356,73 \ km/h}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

Положај тачке се мијења према закону $\vec{r} = 2t\vec{\imath} + (4t^3 + t + 1/2)\vec{\jmath}$. Одредити:

- линију путање тачке;
- интензитет нормалног убрзања након једне секунде од почетка кретања;
- приближну вриједност положаја у правцу осе y након 0,6 s од почетка кретања користећи се трапезним правилом за нумеричку интеграцију закона промјене брзине у правцу осе y, уз дијељење домена на три области једнаке ширине, а потом рачунску грешку која се прави.

<u>Линија путање тачке</u>

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^3 + t + 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = x/2 \\ y = 4t^3 + t + 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4\frac{x^3}{8} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^3 + x + 1)}$$

<u>Екстремне вриједности функције</u>

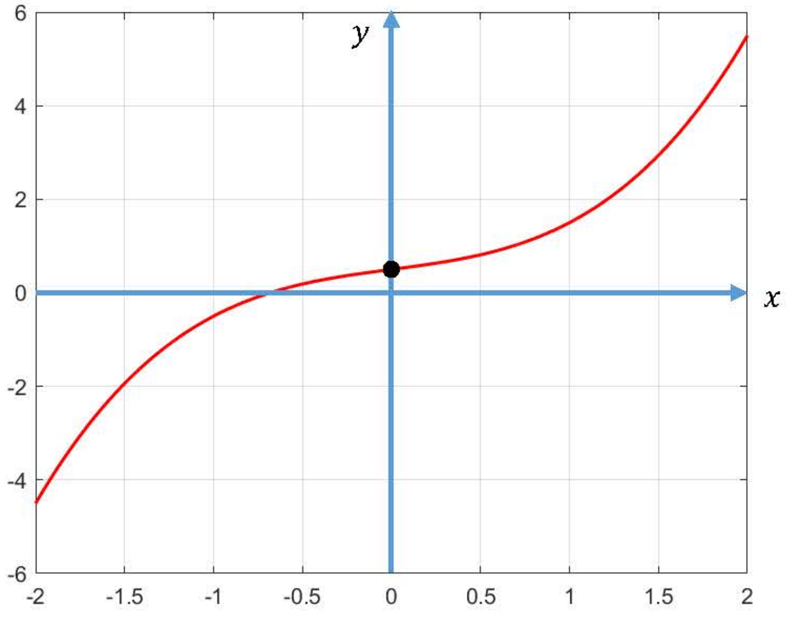
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^2 + 1), \qquad \frac{1}{2}(3x^2 + 1) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}}$$

Извод функције нема нуле у скупу реалних бројева, па самим тим ни екстремне вриједности. То значи да ће конкретна функција трећег степена сигурно имати само једну нулу.

<u>Превојне тачке</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x, \qquad 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Превојна тачка ће постојати за $x = 0$ и у њој је $y = 1/2$.



Интензитет нормалног убрзања након једне секунде од почетка кретања

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^3 + t + 1/2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \dot{x} = 2 \\ v_y = \dot{y} = 12t^2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{4 + (12t^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = \dot{v}_x = 0 \\ a_y = \dot{v}_y = 24t \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{0^2 + (24t)^2} = |24t| \Rightarrow \boxed{a_1 = 24 \ \mathrm{m/s^2}}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{4 + (12t^2+1)^2}}[2(12t^2+1)24t] = \frac{(12t^2+1)24t}{\sqrt{4+(12t^2+1)^2}}$$

$$\boxed{a_{t_1}} = \frac{(12+1)24}{\sqrt{4+(12+1)^2}} = \boxed{\frac{312}{\sqrt{173}} \ \mathrm{m/s^2}}$$

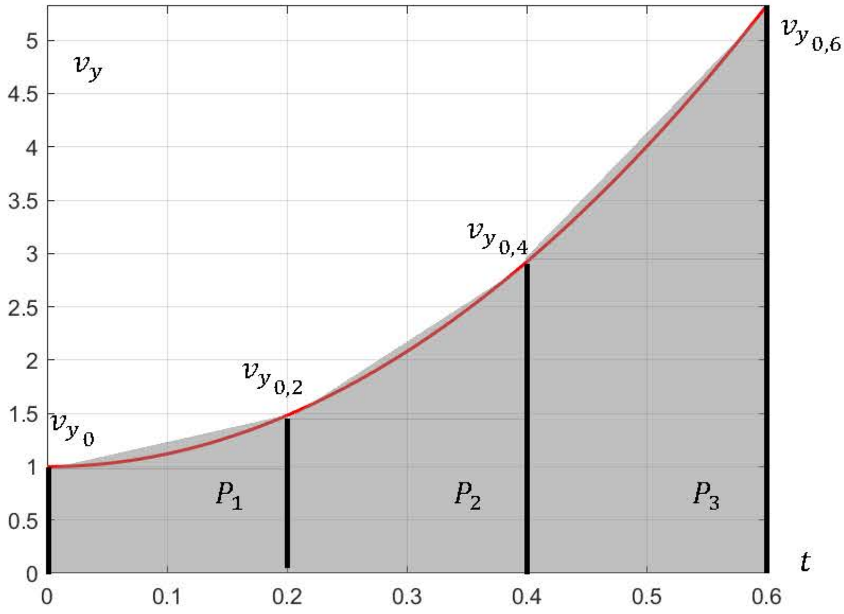
$$a^2 = {a_t}^2 + {a_n}^2 \Rightarrow \boldsymbol{a_{n_1}} = \sqrt{24^2 - \left(\frac{312}{\sqrt{173}}\right)^2} = \mathbf{3,6493 \ m/s^2}$$

Приближна вриједност положаја

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y dt \Rightarrow y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y dt \Rightarrow \boldsymbol{y_{0,6}} = \mathbf{\frac{1}{2}} + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{0,6}} (\mathbf{12}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1})\boldsymbol{dt}$$

$$v_{y_0} = 12 \cdot 0^2 + 1 = 1, \qquad v_{y_{0,2}} = 12 \cdot 0{,}2^2 + 1 = 1{,}48$$

$$v_{y_{0,4}} = 12 \cdot 0{,}4^2 + 1 = 2{,}92, \qquad v_{y_{0,6}} = 12 \cdot 0{,}6^2 + 1 = 5{,}32$$



$$I \approx P_1 + P_2 + P_3 = \frac{v_{y_0} + v_{y_{0,2}}}{2} \cdot 0{,}2 + \frac{v_{y_{0,2}} + v_{y_{0,4}}}{2} \cdot 0{,}2 + \frac{v_{y_{0,4}} + v_{y_{0,6}}}{2} \cdot 0{,}2$$

$$I \approx 0{,}1\left(v_{y_0} + 2v_{y_{0,2}} + 2v_{y_{0,4}} + v_{y_{0,6}}\right) = 0{,}1(1 + 2{,}96 + 5{,}84 + 5{,}32) = 1{,}512$$

Нумеричко рјешење је:

$$\boldsymbol{y_{0,6}} \approx 0{,}5 + 1{,}512 = \mathbf{2,012\ m}$$

Аналитичко рјешење је:

$$y_{0,6} = \frac{1}{2} + \int_0^{0,6} (12t^2 + 1)dt = \frac{1}{2} + 12\frac{0{,}6^3}{3} + 0{,}6 = 1{,}964\ \mathrm{m}$$

Апсолутна рачунска грешка је:

$$2{,}012 - 1{,}964 = \mathbf{0,048}$$

Релативна рачунска грешка је:

$$\frac{0{,}048}{1{,}964} \cdot 100\% = \mathbf{2,44\%}$$