ПОПРАВНИ ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ КИНЕМАТИКЕ

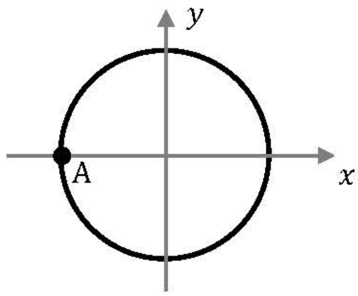
1. Тачка је кретање започела брзином $\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ из координатног почетка. Ако јој је тангенцијално убрзање константно и износи $4\ \mathrm{m/s^2}$ и ако се компонента брзине у правцу осе y мијења према закону $\sqrt{3}(2t + 1)$, одредити:

- коначну једначину кретања тачке;
- полупречник закривљености путање у тренутку $t_3 = 3\ \mathrm{s}$.

Кретање је у првом квадранту.

2. Почевши кретање по кружници полупречника $2\ \mathrm{m}$ из положаја A без почетне брзине у негативном математичком смјеру, тачка се креће тако да јој се тангенцијална компонента убрзања мијења према закону $3 + 2t^2$.

- Када ће доћи до промјене смјера кретања тачке?
- Одредити угао између вектора убрзања и вектора брзине након три секунде од почетка кретања.
- Одредити коначну једначину кретања у Декартовом координатном систему и Декартове координате тачке након три секунде од почетка кретања.



ПРВИ ЗАДАТАК

Тачка је кретање започела брзином $\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$ из координатног почетка. Ако јој је тангенцијално убрзање константно и износи $4\ \mathrm{m/s^2}$ и ако се компонента брзине у правцу осе y мијења према закону $\sqrt{3}(2t+1)$, одредити:

- коначну једначину кретања тачке;
- полупречник закривљености путање у тренутку $t_3 = 3$ s.

Кретање је у првом квадранту.

<u>Коначна једначина кретања тачке</u>

$$\vec{v}_0 = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath} \Rightarrow v_0 = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} a_t &= 4 \\ a_t &= \frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv = 4dt \Rightarrow \int_2^v dv = 4\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{v = 2 + 4t}$$

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 \Rightarrow {v_x}^2 = v^2 - {v_y}^2 \Rightarrow {v_x}^2 = 4 + 16t + 16t^2 - 3(2t+1)^2$$

$${v_x}^2 = 4 + 16t + 16t^2 - 12t^2 - 12t - 3 \Rightarrow {v_x}^2 = 4t^2 + 4t + 1$$

$$t_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = -\frac{1}{2}$$

$${v_x}^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) = (2t+1)(2t+1) = (2t+1)^2$$

$$\boxed{v_x = 2t + 1}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 2t + 1 \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx = (2t+1)dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (2t+1)dt \Rightarrow x = t^2 + t$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= \sqrt{3}(2t+1) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dy = \sqrt{3}(2t+1)dt \Rightarrow \int_0^y dy = \sqrt{3}\int_0^t (2t+1)dt \Rightarrow y = \sqrt{3}(t^2 + t)$$

$$\boldsymbol{\vec{r} = (t^2 + t)\vec{\imath} + \sqrt{3}(t^2 + t)\vec{\jmath}}$$

<u>Полупречник закривљености путање</u>

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2\sqrt{3}$$

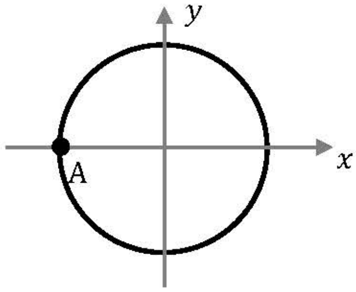
$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\left.\begin{aligned} a_t &= a \Rightarrow a_n = 0 \\ a_n &= \frac{v^2}{R_k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{R_k = \infty}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

Почевши кретање по кружници полупречника 2 m из положаја A без почетне брзине у негативном математичком смјеру, тачка се креће тако да јој се тангенцијална компонента убрзања мијења према закону $3 + 2t^2$.

- Када ће доћи до промјене смјера кретања тачке?
- Одредити угао између вектора убрзања и вектора брзине након три секунде од почетка кретања.
- Одредити коначну једначину кретања у Декартовом координатном систему и Декартове координате тачке након три секунде од почетка кретања.



<u>Промјена смјера кретања тачке</u>

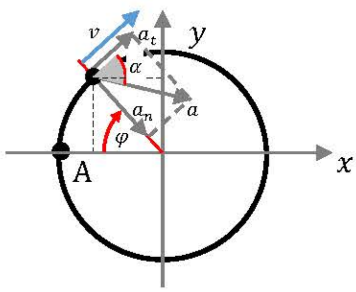
$$\left.\begin{aligned} a_t &= 3 + 2t^2 \\ a_t &= \frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv = (3 + 2t^2)dt \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t (3 + 2t^2)dt \Rightarrow v = 3t + \frac{2t^3}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} v^* &= 0 \\ v^* &= 3t^* + \frac{2t^{*3}}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3t^* + \frac{2t^{*3}}{3} = 0 \Rightarrow t^*\left(3 + \frac{2t^{*2}}{3}\right) = 0$$

$$t_1^* = 0, \qquad t_2^* = -\sqrt{-\frac{9}{2}}, \qquad t_3^* = +\sqrt{-\frac{9}{2}}$$

Неће доћи до промјене смјера кретања.

<u>Угао између вектора убрзања и вектора брзине након три секунде од почетка кретања</u>



$$v_3 = 9 + 18 = 27, \qquad a_{t_3} = 3 + 18 = 21, \qquad a_{n_3} = \frac{{v_3}^2}{R} = \frac{27^2}{2} = \frac{729}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{n_3}}{a_{t_3}} = \frac{\frac{729}{2}}{21} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 86,7^\circ}$$

Коначна једначина кретања у Декартовом координатном систему

$$\left.\begin{aligned} v &= 3t + \frac{2t^3}{3} \\ v &= R\omega = 2\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{3t}{2} + \frac{t^3}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{3t}{2} + \frac{t^3}{3} \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\varphi = \left(\frac{3t}{2} + \frac{t^3}{3}\right) dt \Rightarrow \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{t} \left(\frac{3t}{2} + \frac{t^3}{3}\right) dt$$

$$\varphi = \frac{3t^2}{4} + \frac{t^4}{12}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -R\cos\varphi = -2\cos\left(\frac{3t^2}{4} + \frac{t^4}{12}\right) \\ y &= R\sin\varphi = 2\sin\left(\frac{3t^2}{4} + \frac{t^4}{12}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{r} = -2\cos\left(\frac{3t^2}{4} + \frac{t^4}{12}\right)\vec{\imath} + 2\sin\left(\frac{3t^2}{4} + \frac{t^4}{12}\right)\vec{\jmath}}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -2\cos\left(\frac{3\cdot 3^2}{4} + \frac{3^4}{12}\right) \\ y_3 &= 2\sin\left(\frac{3\cdot 3^2}{4} + \frac{3^4}{12}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{M_3(-1,19;1,61)}$$