Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 26. 6. 2024.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Убрзање тачке мијења се према закону $\vec{a} = 12t\vec{j}$. Ако је кретање тачке започето брзином $\vec{v}_0 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ из положаја дефинисаног вектором $\vec{r}_0 = \vec{j}$, одредити:

- линију путање и путању тачке;
- полупречник закривљености путање у тренутку $t_2 = 2\mathrm{s}$.

2. Тачка A се креће према закону $\vec{r}_\mathrm{A} = (3 + 2\sin(2t))\vec{i} + 2\cos(2t)\,\vec{j}$. Тачка B је започела кретање из положаја $\vec{r}_{\mathrm{B}_0} = 2\vec{i}$ брзином $\vec{v}_{\mathrm{B}_0} = 4\vec{j}$, при чему јој се убрзање мијења према закону $\vec{a}_\mathrm{B} = -8[\cos(2t)\,\vec{i} + \sin(2t)\,\vec{j}]$.

- Утврдити мјеста потенцијалног судара тачака и провјерити да ли до судара може доћи.
- Установити која се тачка креће већом угаоном брзином.

ПРВИ ЗАДАТАК

Убрзање тачке мијења се према закону $\vec{a} = 12t\vec{j}$. Ако је кретање тачке започето брзином $\vec{v}_0 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ из положаја дефинисаног вектором $\vec{r}_0 = \vec{j}$, одредити:

- линију путање и путању тачке;
- полупречник закривљености путање у тренутку $t_2 = 2\text{s}$.

Линија путање и путања тачке

$$\vec{a} = 12t\vec{j} = 0\vec{i} + 12t\vec{j}, \qquad \vec{v}_0 = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_{x0} = 2 \\ v_{y0} = -3 \end{cases}, \qquad \vec{r}_0 = \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{v_{x0}=2}^{v_x} dv_x = 0\int_0^t dt \Rightarrow v_x \Big|_2^{v_x} = 0 \Rightarrow v_x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_x = 2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 2 \\ v_x = \dfrac{dx}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow \int_{x_0=0}^{x} dx = 2\int_0^t dt \Rightarrow x\Big|_0^x = 2t\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{x = 2t}$$

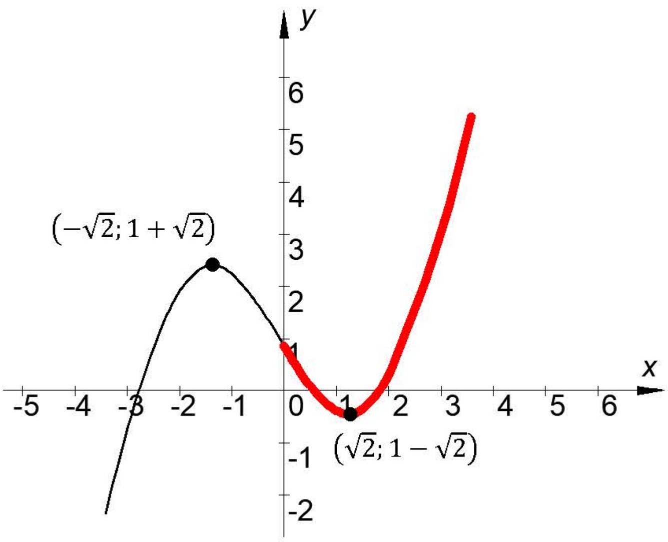
$$\left.\begin{array}{l} a_y = 12t \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = 12t \Rightarrow \int_{v_{y0}=-3}^{v_y} dv_y = 12\int_0^t tdt \Rightarrow v_y\Big|_{-3}^{v_y} = 12\frac{t^2}{2}\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{v_y = -3 + 6t^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_y = -3 + 6t^2 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -3 + 6t^2 \Rightarrow \int_{y_0=1}^{y} dy = \int_0^t (-3 + 6t^2)dt \Rightarrow \boxed{y = 1 - 3t + 2t^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 1 - 3t + 2t^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x}{2} \\ y = 1 - 3\dfrac{x}{2} + 2\dfrac{x^3}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{y = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{x^3}{4}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4}x^2 \\ \dfrac{dy}{dx}\Big|_{\text{M}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4}x_{\text{M}}^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_{\text{M}} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{M}_1} = 1 - 3(-\sqrt{2}) + 2(-\sqrt{2})^3 = 1 + \sqrt{2} \\ y_{\text{M}_2} = 1 - 3(+\sqrt{2}) + 2(+\sqrt{2})^3 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x = [0, +\infty) \\ y = [1 - \sqrt{2}, +\infty) \end{cases}$$



Полупречник закривљености путање

I начин

$$a = \sqrt{0^2 + (12t)^2} = 12t \Rightarrow a_2 = 24$$

$$\left.\begin{matrix} v_x = 2 \\ v_y = -3 + 6t^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3 + 6t^2)^2} = \sqrt{13 - 36t^2 + 36t^4} \Rightarrow v_2 = \sqrt{445}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{13 - 36t^2 + 36t^4}\right) = \frac{-72t + 144t^3}{2\sqrt{13 - 36t^2 + 36t^4}} \Rightarrow a_{t_2} = \frac{504}{\sqrt{445}}$$

$$a_{n_2} = \sqrt{a_2^2 - a_{t_2}^2} = \sqrt{24^2 - \frac{504^2}{445}} = \frac{48}{\sqrt{445}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R_k} \Rightarrow \boldsymbol{R_{k_2}} = \frac{v_2^2}{a_{n_2}} = \frac{445}{\frac{48}{\sqrt{445}}} = \frac{445\sqrt{445}}{48} = \mathbf{195,57}$$

II начин

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}x$$

$$\left.\begin{matrix} R_k = \dfrac{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|} = \dfrac{\left(1 + \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4}x^2\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{3}{2}x\right|} \\ x = 2t \Rightarrow x_2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{R_{k_2}} = \frac{\left(1 + \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4}2^2\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{3}{2}2\right|} = \mathbf{195,57}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

Тачка А се креће према закону $\vec{r}_A = (3 + 2\sin(2t))\vec{i} + 2\cos(2t)\,\vec{j}$. Тачка B је започела кретање из положаја $\vec{r}_{B_0} = 2\vec{i}$ брзином $\vec{v}_{B_0} = 4\vec{j}$, при чему јој се убрзање мијења према закону $\vec{a}_B = -8[\cos(2t)\,\vec{i} + \sin(2t)\,\vec{j}]$.

- Утврдити мјеста потенцијалног судара тачака и провјерити да ли до судара може доћи.
- Установити која се тачка креће већом угаоном брзином.

<u>Мјеста потенцијалног судара тачака</u>

$$\left.\begin{aligned} a_{B_x} &= -8\cos(2t) \\ a_{B_x} &= \frac{dv_{B_x}}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{v_{B_x}} dv_{B_x} = -8\int_0^t \cos(2t)\,dt \Rightarrow v_{B_x} = -8\frac{1}{2}\sin(2t) \Rightarrow \boxed{v_{B_x} = -4\sin(2t)}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{B_x} &= -4\sin(2t) \\ v_{B_x} &= \frac{dx_B}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_2^{x_B} dx_B = -4\int_0^t \sin(2t)\,dt \Rightarrow x_B - 2 = 4\frac{1}{2}(\cos(2t) - 1) \Rightarrow \boxed{x_B = 2\cos(2t)}$$

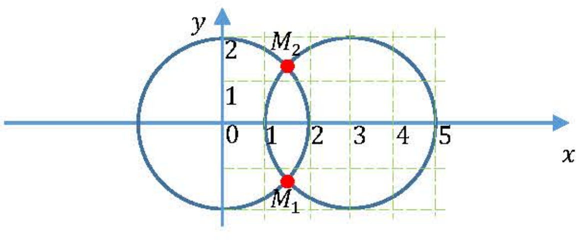
$$\left.\begin{aligned} a_{B_y} &= -8\sin(2t) \\ a_{B_y} &= \frac{dv_{B_y}}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_4^{v_{B_y}} dv_{B_y} = -8\int_0^t \sin(2t)\,dt \Rightarrow v_{B_y} - 4 = 8\frac{1}{2}(\cos(2t) - 1) \Rightarrow \boxed{v_{B_y} = 4\cos(2t)}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{B_y} &= 4\cos(2t) \\ v_{B_y} &= \frac{dy_B}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{y_B} dy_B = 4\int_0^t \cos(2t)\,dt \Rightarrow y_B = 4\frac{1}{2}\sin(2t) \Rightarrow \boxed{y_B = 2\sin(2t)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_A &= 3 + 2\sin(2t) \\ y_A &= 2\cos(2t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_A - 3 &= 2\sin(2t) \\ y_A &= 2\cos(2t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (x_A - 3)^2 &= 4\sin^2(2t) \\ y_A^2 &= 4\cos^2(2t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_A - 3)^2 + y_A^2 = 2^2$$

$$\left.\begin{aligned} x_B &= 2\cos(2t) \\ y_B &= 2\sin(2t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} {x_B}^2 &= 4\cos^2(2t) \\ y_B^2 &= 4\sin^2(2t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow {x_B}^2 + y_B^2 = 2^2$$

Тачке M_1 и M_2 су мјеста потенцијалног судара тачака. Њихове координате се добијају изједначавањем једначина путања.



$$\left.\begin{aligned} &\text{A: } (x - 3)^2 + y^2 = 2^2 \\ &\text{B: } x^2 + y^2 = 2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_M - 3)^2 + y_M^2 - (x_M^2 + y_M^2) = 2^2 - 2^2$$

$$-6x_M + 9 = 0 \Rightarrow x_M = \frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{3}{2} \\ x_M^2 + y_M^2 &= 2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{9}{4} + y_M^2 = 4 \Rightarrow y_M^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow y_{M_{1/2}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} = \pm 1{,}32$$

$$\boldsymbol{M_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right), \qquad M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{3}{2} \\ x_{\mathrm{A}} = 3 + 2\sin(2t) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2} = 3 + 2\sin(2t^*) \Rightarrow \sin(2t^*) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boldsymbol{t^* = -0,424 + k\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{3}{2} \\ x_{\mathrm{B}} = 2\cos(2t) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2} = 2\cos(2t^*) \Rightarrow \cos(2t^*) = \frac{3}{4} \Rightarrow \boldsymbol{t^* = 0,361 + k\pi}$$

t^* у првом и t^* у другом случају немају исте вриједности. Према томе, до судара не може доћи.

<u>Угаоне брзине тачака</u>

A	**B**
$R_{\mathrm{A}} = 2$	$R_{\mathrm{B}} = 2$
$\left.\begin{array}{l} v_{\mathrm{A}_x} = \dot{x}_{\mathrm{A}} = 4\cos(2t) \\ v_{\mathrm{A}_y} = \dot{y}_{\mathrm{A}} = -4\sin(2t) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $v_{\mathrm{A}} = \sqrt{16\cos^2(2t) + 16\sin^2(2t)} = \sqrt{16} = 4$	$\left.\begin{array}{l} v_{\mathrm{B}_x} = -4\sin(2t) \\ v_{\mathrm{B}_y} = 4\cos(2t) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $v_{\mathrm{B}} = \sqrt{16\sin^2(2t) + 16\cos^2(2t)} = \sqrt{16} = 4$
$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} = \dfrac{v_{\mathrm{A}}}{R_{\mathrm{A}}} = \dfrac{4}{2} = \mathbf{2}$	$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{B}} = \dfrac{v_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{B}}} = \dfrac{4}{2} = \mathbf{2}$

Угаоне брзине тачака су једнаке.