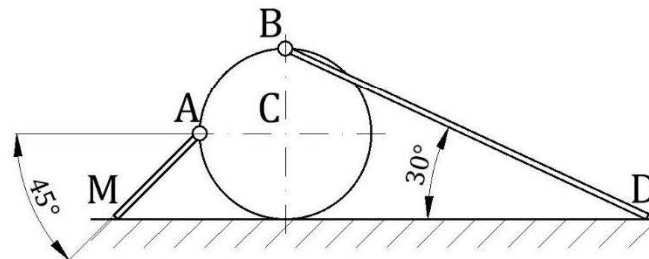


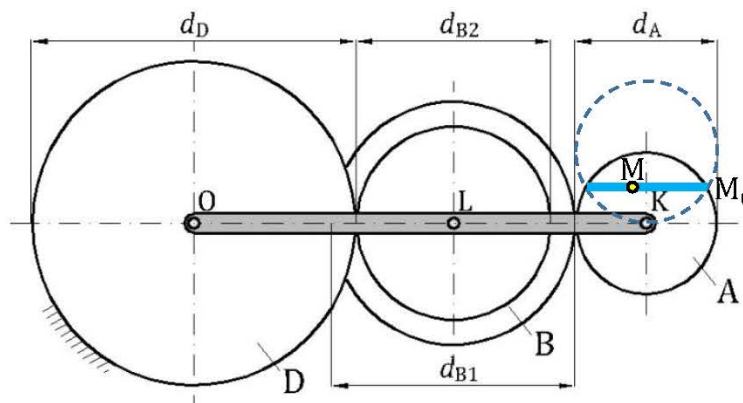
**ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ**

1. Диск полупречника 2 m котрља се без клизања по хоризонталној подлози константном брзином од 4 m/s (улијево). За положај система приказан на слици одредити брзину и убрзање тачке D.



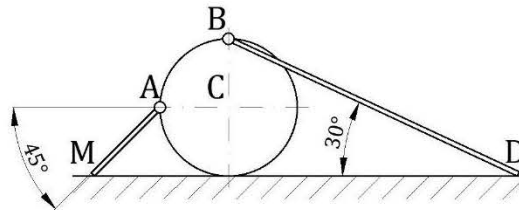
2. Доказати да је угаона брзина зупчаника А двоструко већа од угаоне брзине криваје ОК која погони приказани систем. Криваја ОК се обрће у позитивном математичком смјеру према закону  $\varphi = 2\pi t^2$ . Почевши кретање из положаја  $M_0$ , тачка М се креће дуж канала према релативном закону  $s_r = 0,5d_A \sin(2\pi t/3)$ . Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке након 0,5 s од почетка кретања, ако је кретање започето из положаја приказаног на слици.

Дато је:  $d_A = 25 \text{ mm}$ ,  $d_{B1} = 50 \text{ mm}$ ,  $d_{B2} = 40 \text{ mm}$  и  $d_D = 60 \text{ mm}$ .

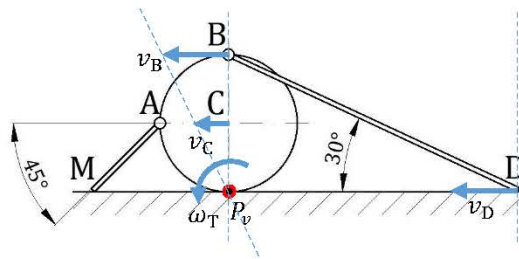


## ПРВИ ЗАДАТАК

Диск полупречника 2 m котрља се без клизања по хоризонталној подлози константном брзином од 4 m/s (улијево). За положај система приказан на слици одредити брзину и убрзање тачке D.



### Брзина тачке D



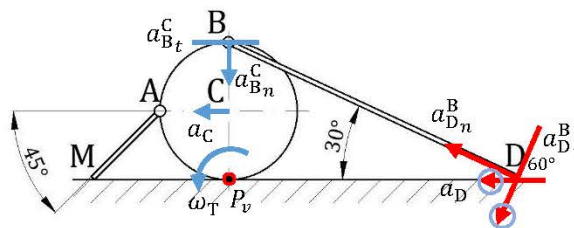
$$\left. \begin{aligned} v_C &= \overline{CP_v} \omega_T = R \omega_T \\ v_B &= \overline{BP_v} \omega_T = 2R \omega_T \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_B = 2 \cdot v_C = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m/s}$$

$$\left. \begin{aligned} v_C &= R \omega_T \\ v_C &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_T = \frac{4}{R} = \frac{4}{2} = 2$$

Нормала на  $\vec{v}_B$  се сијече у бесконачности са нормалом на  $\vec{v}_D$ , па штап BD врши тренутну translацију. Стога је  $\vec{v}_D = \vec{v}_B$ , односно:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B = \mathbf{8 \text{ m/s}}$$

### Убрзање тачке D



$$\left. \begin{aligned} v_C &= \text{const} \\ a_C &= a_{C_t} = \frac{dv_C}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_C = 0$$

$$v_C = \overline{\underbrace{CP_v}_{\text{const}}} \omega_T \Rightarrow \frac{d}{dt}(v_C) = \frac{d}{dt} \left( \overline{\underbrace{CP_v}_{\text{const}}} \omega_T \right) \Rightarrow a_C = \overline{\underbrace{CP_v}_{\text{const}}} \varepsilon_T$$

$$\left. \begin{aligned} a_C &= 0 \\ a_C &= \overline{\underbrace{CP_v}_{\text{const}}} \varepsilon_T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_T = 0 \Rightarrow a_{B_t}^C = 0$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\vec{a}_C}_0 + \underbrace{\vec{a}_{B_t}^C}_0 + \vec{a}_{B_n}^C$$

$$a_{B_n}^C = \overline{BC} \omega_T^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$a_{D_n}^B = \overline{BD} \omega_{BD}^2 = \overline{BD} \cdot 0^2 = 0$$

$$\underline{\vec{a}_D} = \vec{a}_B + \vec{a}_{D_t}^B + \vec{a}_{D_n}^B = \underline{\underline{\vec{a}_{B_n}^C}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_t}^B}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_n}^B}}$$

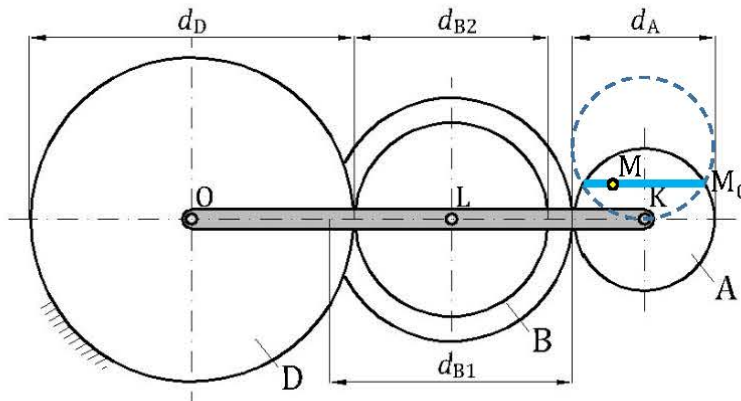
$$\underline{\vec{a}_D} = \underline{\underline{\vec{a}_{B_n}^C}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_t}^B}} + \underbrace{\underline{\underline{\vec{a}_{D_n}^B}}}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} x: -a_D = -a_{D_t}^B \cos 60^\circ \\ y: 0 = -a_{B_n}^C - a_{D_t}^B \sin 60^\circ \end{array} \right\}$$

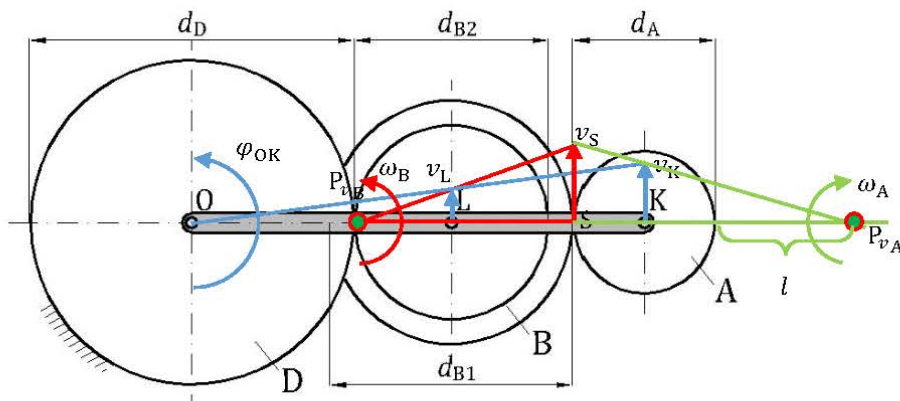
$$\left. \begin{array}{l} -a_D = -a_{D_t}^B \frac{1}{2} \\ 0 = -8 - a_{D_t}^B \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_D = a_{D_t}^B \frac{1}{2} \\ a_{D_t}^B \frac{\sqrt{3}}{2} = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_D = -\frac{16}{\sqrt{3}} \\ a_{D_t}^B = -\frac{16}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow a_D = -\frac{8}{\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{3} = -4,62 \text{ m/s}^2$$

## ДРУГИ ЗАДАТАК

Доказати да је угаона брзина зупчаника А двоструко већа од угаоне брзине криваје ОК која погони приказани систем. Криваја ОК се обрће у позитивном математичком смјеру према закону  $\varphi = 2\pi t^2$ . Почевши кретање из положаја  $M_0$ , тачка М се креће дуж канала према релативном закону  $s_T = 0,5d_A \sin(2\pi t/3)$ . Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке након 0,5 s од почетка кретања, ако је кретање започето из положаја приказаног на слици. Дато је:  $d_A = 25 \text{ mm}$ ,  $d_{B1} = 50 \text{ mm}$ ,  $d_{B2} = 40 \text{ mm}$  и  $d_D = 60 \text{ mm}$ .



### Угаона брзина зупчаника А



$$\left. \begin{aligned} v_L &= \overline{OL} \omega_{OK} = \left( \frac{d_D}{2} + \frac{d_{B2}}{2} \right) 4\pi t = (0,06 + 0,04) 2\pi t = 0,2\pi t \\ v_L &= \overline{LP_{vB}} \omega_B = \frac{d_{B2}}{2} \omega_B = 0,02 \omega_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_B = \frac{0,2\pi t}{0,02} = 10\pi t$$

$$\left. \begin{aligned} v_S &= \overline{SP_{vB}} \omega_B = \left( \frac{d_{B1}}{2} + \frac{d_{B2}}{2} \right) 10\pi t = \left( \frac{0,05}{2} + \frac{0,04}{2} \right) 10\pi t = 0,45\pi t \\ v_S &= \overline{SP_{vA}} \omega_A = (d_A + l) \omega_A = (0,025 + l) \omega_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow l = \frac{0,45\pi t}{\omega_A} - 0,025$$

$$\left. \begin{aligned} v_K &= \overline{OK} \omega_{OK} = \left( \frac{d_D}{2} + \frac{d_{B2}}{2} + \frac{d_{B1}}{2} + \frac{d_A}{2} \right) 4\pi t = 0,35\pi t \\ v_K &= \overline{KP_{vA}} \omega_A = \left( \frac{d_A}{2} + l \right) \omega_A = (0,0125 + l) \omega_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow l = \frac{0,35\pi t}{\omega_A} - 0,0125$$

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{0,45\pi t}{\omega_A} - 0,025 \\ l &= \frac{0,35\pi t}{\omega_A} - 0,0125 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{0,45\pi t}{\omega_A} - 0,025 = \frac{0,35\pi t}{\omega_A} - 0,0125 \Rightarrow 0,1\pi t = 0,0125 \omega_A \Rightarrow \omega_A = 8\pi t$$

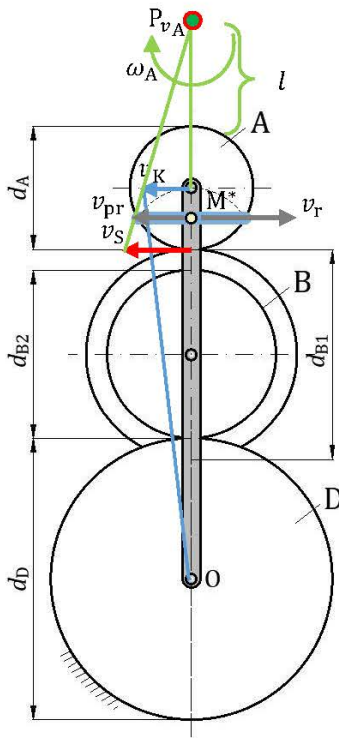
$$\omega_A / \omega_{OK} = 8\pi t / (4\pi t) = 2$$

Положај система након 0,5 s од почетка кретања

$$\varphi_{OK}^* = 2\pi 0,5^2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \quad \varphi_A = 2\varphi_{OK} \Rightarrow \varphi_A^* = \pi \text{ rad}, \quad s_r^* = 0,5d_A \sin(2\pi 0,5/3) = \frac{d_A\sqrt{3}}{4} \text{ m}$$

$$l = \frac{0,35\pi t}{\omega_A} - 0,0125 = \frac{0,35\pi t}{8\pi t} - 0,0125 = 0,03125$$

Апсолутна брзина тачке након 0,5 s од почетка кретања



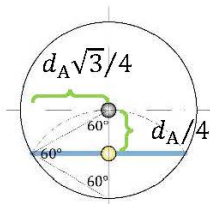
$$v_{pr}^* = \overline{M^*P_{v_A}} \omega_A^* = \left( l + \frac{d_A}{2} + \frac{d_A}{4} \right) \omega_A^*$$

$$v_{pr}^* = (0,03125 + 0,0125 + 0,00625) \cdot 4\pi = 0,2\pi = 0,628 \text{ m/s}$$

$$v_r = \dot{s}_r = 0,5d_A \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) \frac{2\pi}{3}$$

$$v_r^* = 0,5 \cdot 0,025 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{2\pi}{3} = 0,5 \cdot 0,025 \cdot 0,5 \frac{2\pi}{3} = 0,013 \text{ m/s}$$

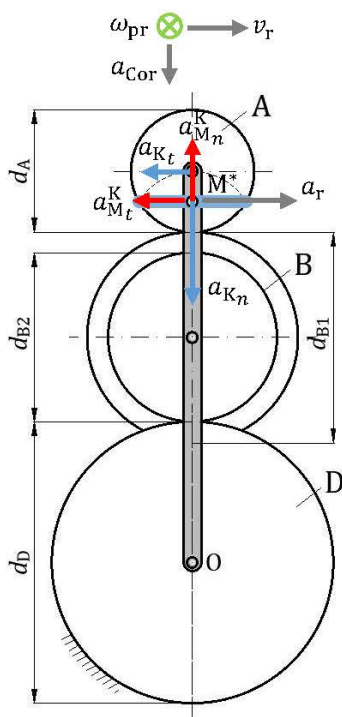
$$v_a^* = v_{pr}^* - v_r^* = 0,628 - 0,013 = \mathbf{0,615 \text{ m/s}}$$



$$\frac{d_A}{2} \cos 60^\circ = \frac{d_A}{2} \frac{1}{2} = \frac{d_A}{4}$$

$$\frac{d_A}{2} \sin 60^\circ = \frac{d_A}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d_A\sqrt{3}}{4}$$

Апсолутно убрзање тачке након 0,5 s од почетка кретања



$$a_{K_t} = \overline{OK} \varepsilon_{OK} = \left( \frac{d_D}{2} + \frac{d_{B2}}{2} + \frac{d_{B1}}{2} + \frac{d_A}{2} \right) 4\pi = 0,35\pi$$

$$a_{K_t}^* = 1,1 \text{ m/s}^2$$

$$a_{K_n} = \overline{OK} \omega_{OK}^2 = \left( \frac{d_D}{2} + \frac{d_{B2}}{2} + \frac{d_{B1}}{2} + \frac{d_A}{2} \right) (4\pi t)^2 = 1,4\pi^2 t^2$$

$$a_{K_n}^* = 3,454 \text{ m/s}^2$$

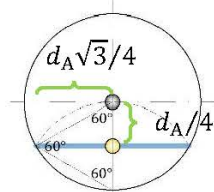
$$a_{M_t}^{K^*} = \overline{M^*K} \varepsilon_A^* = \frac{d_A}{4} 8\pi = 0,157 \text{ m/s}^2$$

$$a_{M_n}^{K^*} = \overline{M^*K} \omega_A^{*2} = \frac{d_A}{4} (8\pi \cdot 0,5)^2 = 0,987 \text{ m/s}^2$$

$$a_r = a_{r_t} = \frac{dv_r}{dt} = -0,5d_A \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) \frac{4\pi^2}{9}$$

$$a_r^* = -0,5d_A \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) \frac{4\pi^2}{9} = -0,047 \text{ m/s}^2$$

$$a_{Cor}^* = 2\omega_A^* v_r^* \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 4\pi \cdot 0,013 = 0,327 \text{ m/s}^2$$



$$a_a^* = \sqrt{(a_r^* - a_{M_t}^{K^*} - a_{K_t}^*)^2 + (a_{K_n}^* + a_{Cor}^* - a_{M_n}^{K^*})^2}$$

$$a_a^* = \sqrt{(-0,047 - 0,157 - 1,1)^2 + (3,454 + 0,327 - 0,987)^2}$$

$$a_a^* = 3,083 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{d_A}{2} \cos 60^\circ = \frac{d_A}{2} \frac{1}{2} = \frac{d_A}{4}$$

$$\frac{d_A}{2} \sin 60^\circ = \frac{d_A}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d_A \sqrt{3}}{4}$$