

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Коначне једначине кретања тачке су: $x = 1 - 2 \cos 2t - 2 \sin^2 t$ и $y = \cos^2 2t$. Одредити:
- линију путање и путању;
 - брзину у произвољном временском тренутку;
 - полупречник кривине путање у тренутку $t_{\pi/4} = \pi/4$ s;
 - нормално убрзање у произвољном временском тренутку;
 - провјерити да ли постоји временски тренутак у којем убрзање заклапа угао од 45° у односу на хоризонталу.

Основни тригонометријски идентитети

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$	$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$	$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$
$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos t)$	$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$	$\tan^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$
$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$	$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$	$\tan t = \frac{1}{\cot t}$

2. Тачка М врши праволинијско кретање убрзањем $a = \frac{v^2 - 1}{2s} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$, гдје је v брзина тачке, а s пређени пут. У почетном тренутку тачка се налазила у положају M_0 који је одређен са $s_0 = 3$ m и $v_0 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Одредити:
- брзину, убрзање и пређени пут у произвољном временском тренутку;
 - брзину, убрзање и пређени пут у тренутку $t_6 = 6$ s.

Нацртати кинематске дијаграме и укратко их описати.

$$\begin{aligned}
 x &= 1 - 2 \cos 2t - 2 \sin^2 t = 1 - 2(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2 \sin^2 t = 1 - 2 \cos^2 t \\
 &= \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \cos^2 t = \sin^2 t - \cos^2 t = -(\cos 2t)
 \end{aligned}$$

$$y = \cos^2 2t = x^2$$

$$a = \frac{v^2 - 1}{2s}, a = \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} = \frac{v dv}{ds} \rightarrow a ds = v dv \rightarrow \frac{v^2 - 1}{2s} ds = v dv \rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{2v}{v^2 - 1}$$

$$\int_{s_0}^s \frac{ds}{s} = \int_{v_0}^v \frac{2v}{v^2 - 1}$$

$$\rightarrow \ln \frac{s}{s_0} = \ln \frac{v^2 - 1}{v_0^2 - 1} \rightarrow \frac{s}{s_0} = \frac{v^2 - 1}{v_0^2 - 1} \rightarrow \frac{s}{3} = \frac{v^2 - 1}{4 - 1} \rightarrow s = v^2 - 1$$

$$a = \frac{v^2 - 1}{2s} = \frac{v^2 - 1}{2(v^2 - 1)} = \frac{1}{2}$$

1. задатак

Коначне једначине кретања су:

$$x = 2 + \sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t$$

$$y = 1 + \sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \cos t$$

Брзина и убрзање у произвољном временском тренутку

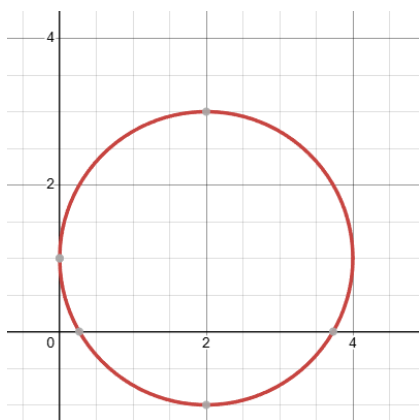
$$v_x = \dot{x} = \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \sin t \quad a_x = \ddot{x} = -\sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \cos t$$

$$v_y = \dot{y} = \sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t \quad a_y = \ddot{y} = -\sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t$$

Линија путање и путања:

$$\left. \begin{aligned} x - 2 &= \sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t \\ y - 1 &= \sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \cos t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x - 2)^2 &= (\sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t)^2 \\ (y - 1)^2 &= (\sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \cos t)^2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (x - 2)^2 &= 2 \sin^2 t + 4 \sin t \cos t + 2 \cos^2 t \\ (y - 1)^2 &= 2 \sin^2 t - 4 \sin t \cos t + 2 \cos^2 t \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$



Како бисмо нашли путању тражимо изводе од коначних једначина кретања (x, y) , а затим их изједначавамо са нулом како бисмо добили њихове екстремне вриједности односно интервал у коме се крећу.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \sin t \\ \dot{y} &= \sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &= \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \sin t \quad \sin t = \cos t \\ 0 &= \sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t \quad -\sin t = \cos t \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{5\pi}{4} \\ t_1 &= \frac{3\pi}{4}, t_2 = \frac{7\pi}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 4, \quad t_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = 0$$

$$t_1 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow y = 3, \quad t_2 = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow y = -1$$

Можемо закључити да је цијела кружница путања.

Интензитет брзине у временском тренутку $t_3 = 3 \text{ s}$

$$\left. \begin{aligned} v_x = \dot{x} &= \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \sin t \\ v_y = \dot{y} &= \sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t \end{aligned} \right\} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ m/s} = \text{const}$$

Брзина је константна па ће $v_3 = \sqrt{4} = 2 \text{ m/s}$

Пут који је тачка прешла у трећој секунди кретања

Налазимо закон пута:

$$s = \int_{t_0}^t v dt = \int_0^t 2 dt = 2t$$

$$s_{2-3} = 2 * 3 - 2 * 2 = 2 \text{ m}$$

Провјерити да ли постоји временски тренутак у којем убрзање заклапа угао од 45° у односу на правац тангенте на путању

Када убрзање заклапа угао од 45° у односу на правац тангенте на путању, значи да је нормално и тангенцијално убрзање једнако. Међутим како је брзина тачке константна постоји само нормално убрзање па ће угао који убрзање заклапа са правцем тангенте на путању увијек бити 90° .

2. задатак

Број пуних обртаја које направи тачка за прве четири секунде кретања;

$$w = \frac{v}{R} = 2t^2 - 4t + 2$$

Треба провјерити да ли тачка мијења смјер кретања:

$$2t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$w = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow w dt = d\varphi \Rightarrow \int_{t_0}^t (2t^2 - 4t + 2) dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi$$

$$\varphi = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 2t$$

$$\varphi_{0-1} = |\varphi_1 - \varphi_0| = \frac{2}{3}$$

$$\varphi_{1-4} = |\varphi_4 - \varphi_1| = 18$$

$$\varphi_{0-4} = \varphi_{0-1} + \varphi_{1-4} = 18,67$$

$$N_{0-4} = \frac{\varphi}{2\pi} = 2$$

Закон пута

$$s = \int_{t_0}^t v dt = \int_0^t (4t^2 - 8t + 4) dt = \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 4t$$

Закон промјене техничке угаоне брзине и графички га представити

$$w = \frac{\pi n}{30}, n = \frac{30w}{\pi} = \frac{30}{\pi}(2t^2 - 4t + 2)$$

$$n = 19,09t^2 - 38,19t + 19,09$$

Угаоно убрзање тачке

$$\varepsilon = \frac{dw}{dt} = 4t - 4$$

Временски тренутак у коме ће тачка заузимати положај $\varphi = 4/3 \text{ rad}$

$$4/3 = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 2t$$

$$\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 2t - \frac{4}{3} = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}\right) * (t - 2) = 0$$

$$\boldsymbol{t = 2 \text{ s}}$$