Kinematika 2 + 2

predavanja: Ranislav Bulatović
vježbe: Rade Grujičić

Literatura: 1) pisana predavanja;
2) M. Kašić, Kinematika, Mašinski fakultet u Podgorici, 2011.
3) L. Vujošević, Mehanika II - Kinematika, Univerzitetska riječ, Nikšić, 1988.
4) S.M. Targ, Kratki kurs teorijske mehanike, Beograd, 1996.

Sadržaj kursa:

- kinematika tačke,
- kinematika krutog tijela,
- kinematika složenog kretanja.

I Kinematika tačke

Pod tačkom se u kinematici podrazumijeva geometrijska tačka čiji se položaj u prostoru mijenja tokom vremena.

Osnovni zadaci kinematike tačke:

a) utvrđivanje postupaka za definisanje ~~tačke~~ kretanja tačke – određivanja položaja tačke u odnosu na dati koordinatni sistem referencije u bilo kom trenutku vremena;

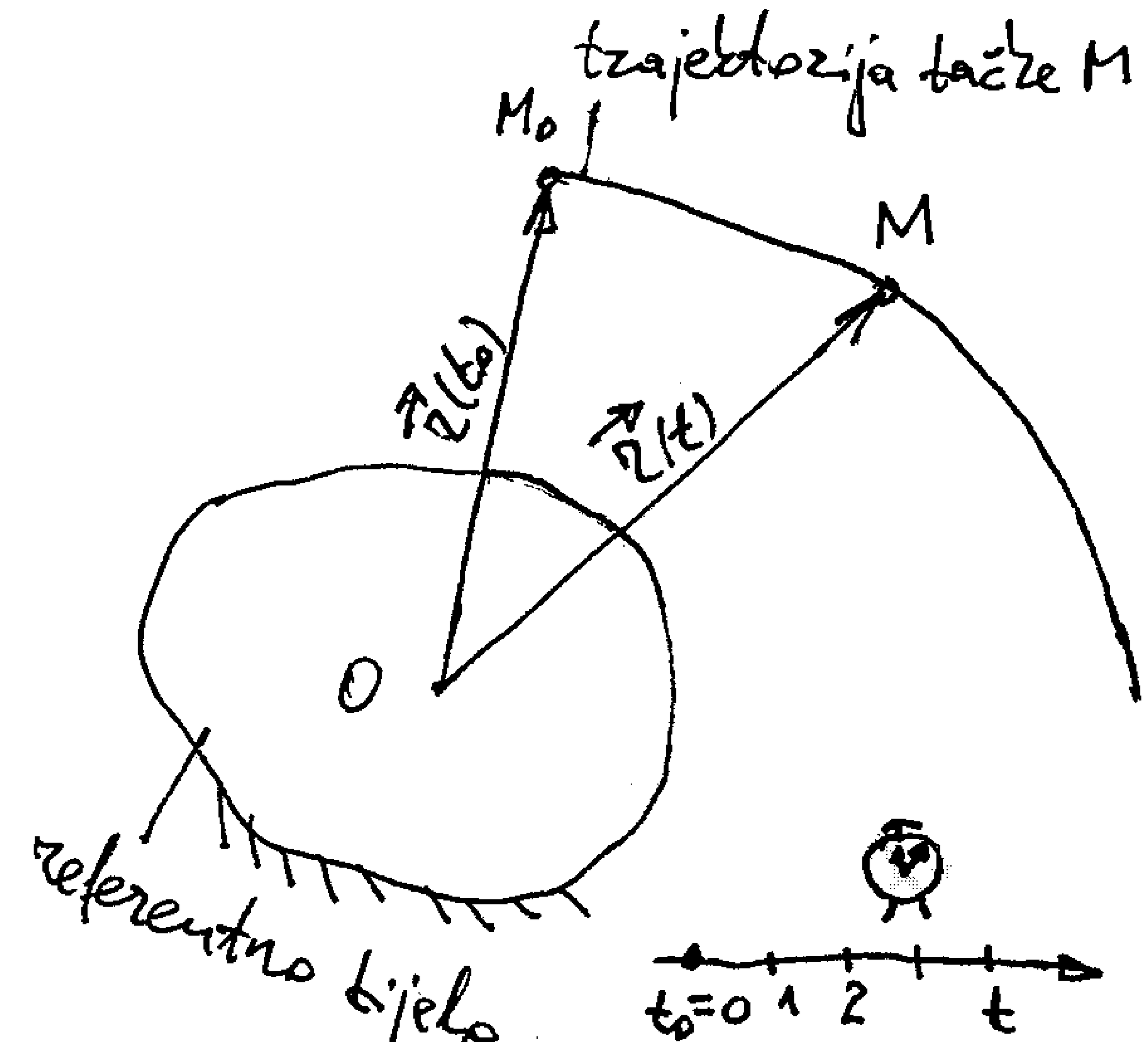
b) određivanje, na osnovu poznatog zakona kretanja, kinematičkih karakteristika kretanja tačke (trajektorije, brzine, ubrzanja idr.).

Zamišljena neprekidna linija koju opisuje pokretna tačka u prostoru naziva se <u>putanjom</u> ili <u>trajektorijom</u> te tačke.

Kretanje tačke posmatraćemo u odnosu na uslovno apsolutno nepokretni sistem referencije.

1. Postupci za definisanje kretanja tačke

1.1 Vektorski postupak



Položaj tačke M koja se kreće potpuno je određen vektorom $\vec{OM} = \vec{r}$ čiji je početak u nekoj uočenoj tački O referentnog tijela (referentna tačka), a kraj u pokretnoj tački M. Vektor $\vec{r}$ zove se vektor položaja tačke M. Pri kretanju tačke M mijenja se vektor $\vec{r}$ i po intezitetu i po pravcu. Dakle, $\vec{r}$ je promjenjivi vektor koji u svakom trenutku vremena t ima određenu vrijednost, tj. on je vektorska funkcija skalarnog argumenta t:

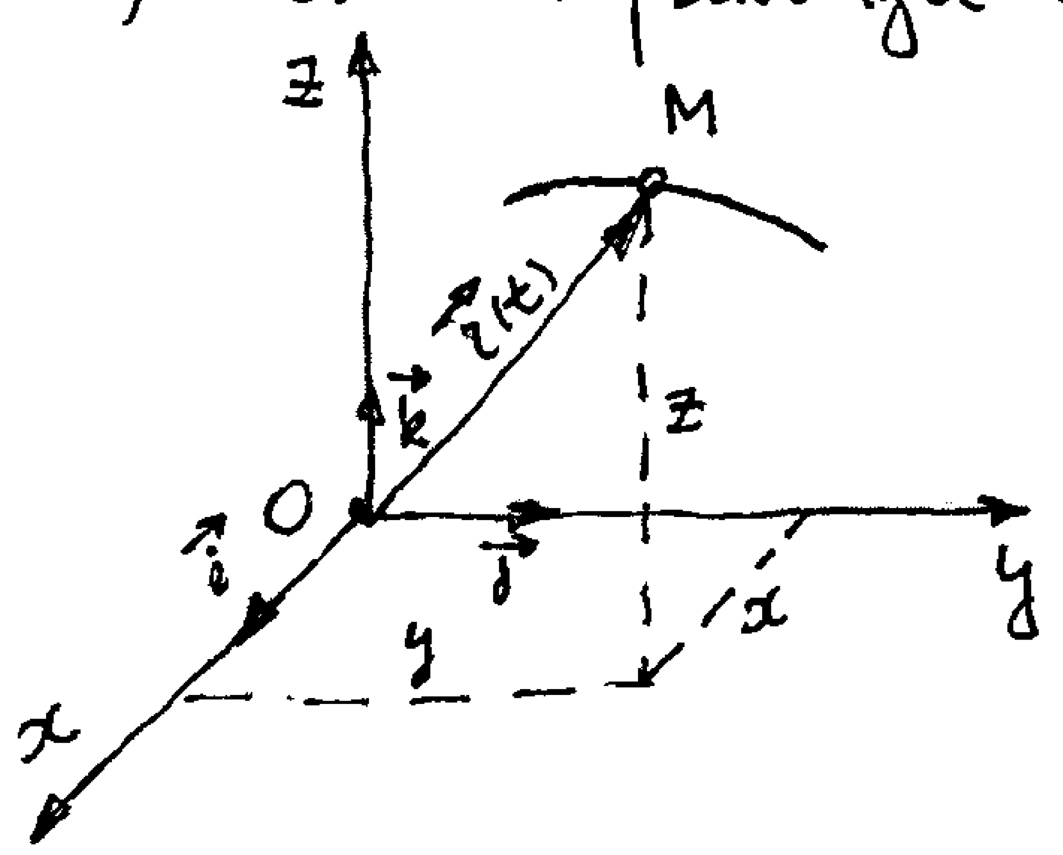
$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

Jednačina (1) određuje zakon kretanja tačke u vektorskom obliku, odnosno kaže se da je ona konačna jednačina kretanja tačke u vektorskom obliku.

Geometrijsko mjesto krajeva vektora položaja (hodograf vektora položaja) određuje putanju pokretne tačke.

1.2 Koordinatni postupak

a) Dekartove pravougle koordinate



Tačku O usvajamo za početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxyz. Tada je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

gdje su $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori osa x, y i z.

Pri promjeni vektora položaja mijenjaju se i koordinate pokretne tačke x, y, z, tj. vektorskoj funkciji

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

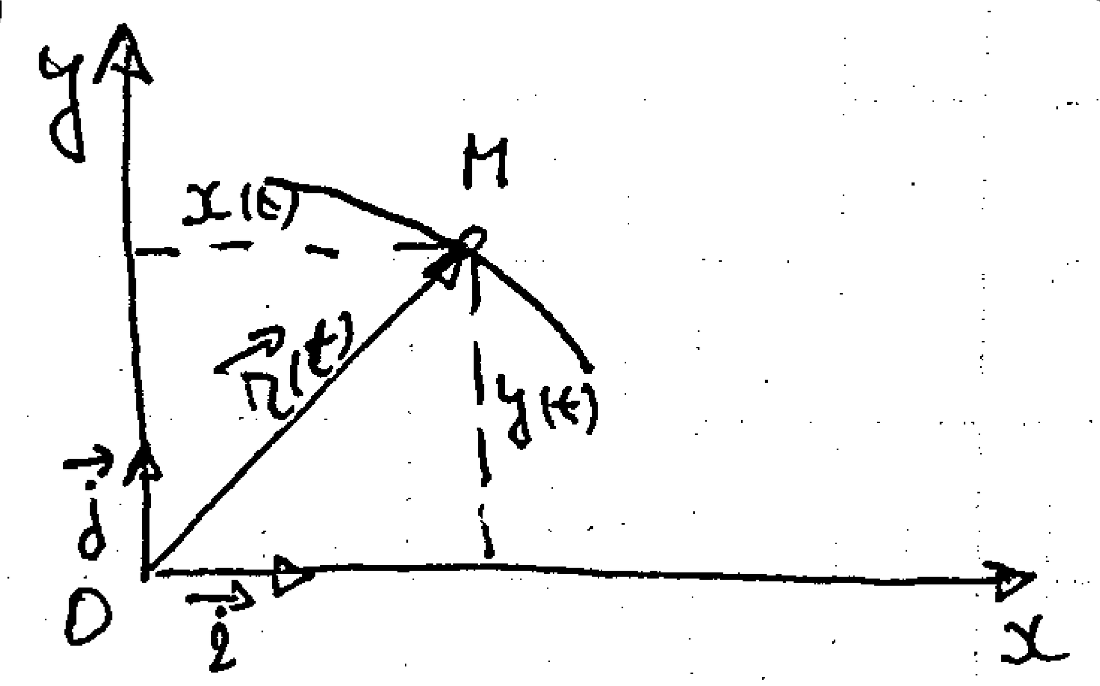
odgovaraju tri skalarne funkcije

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \qquad (2)$$

koje predstavljaju konačne jednačine kretanja tačke u Dekartovim pravouglim koordinatama.

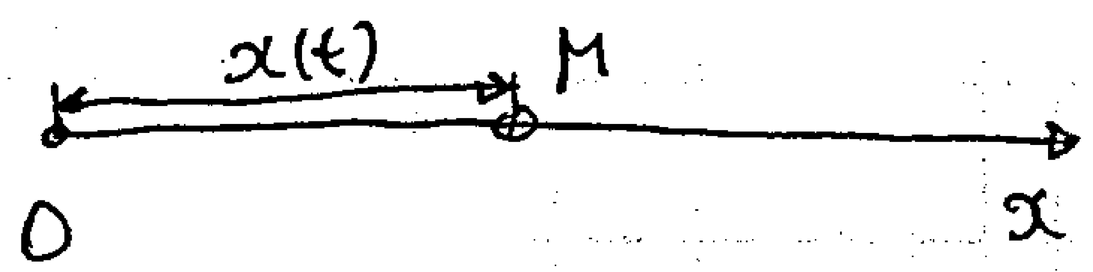
Ako se tačka M kreće u ravni, recimo Oxy, tada su konačne jednačine kretanja tačke određene relacijama

$$x=x(t),\quad y=y(t) \qquad (3)$$



Ako se tačka M kreće pravolinijski, recimo duž ose x, tada je zakon pravolinijskog kretanja određen jednom relacijom

$$x=x(t)$$



Eliminacijom vremena t iz jednačina (2), odnosno (3), dobija se jednačina linije putanje. Trajektorija je dio ili cijela linija putanje što se u svakom konkretnom slučaju utvrđuje na osnovu konačnih jednačina kretanja.

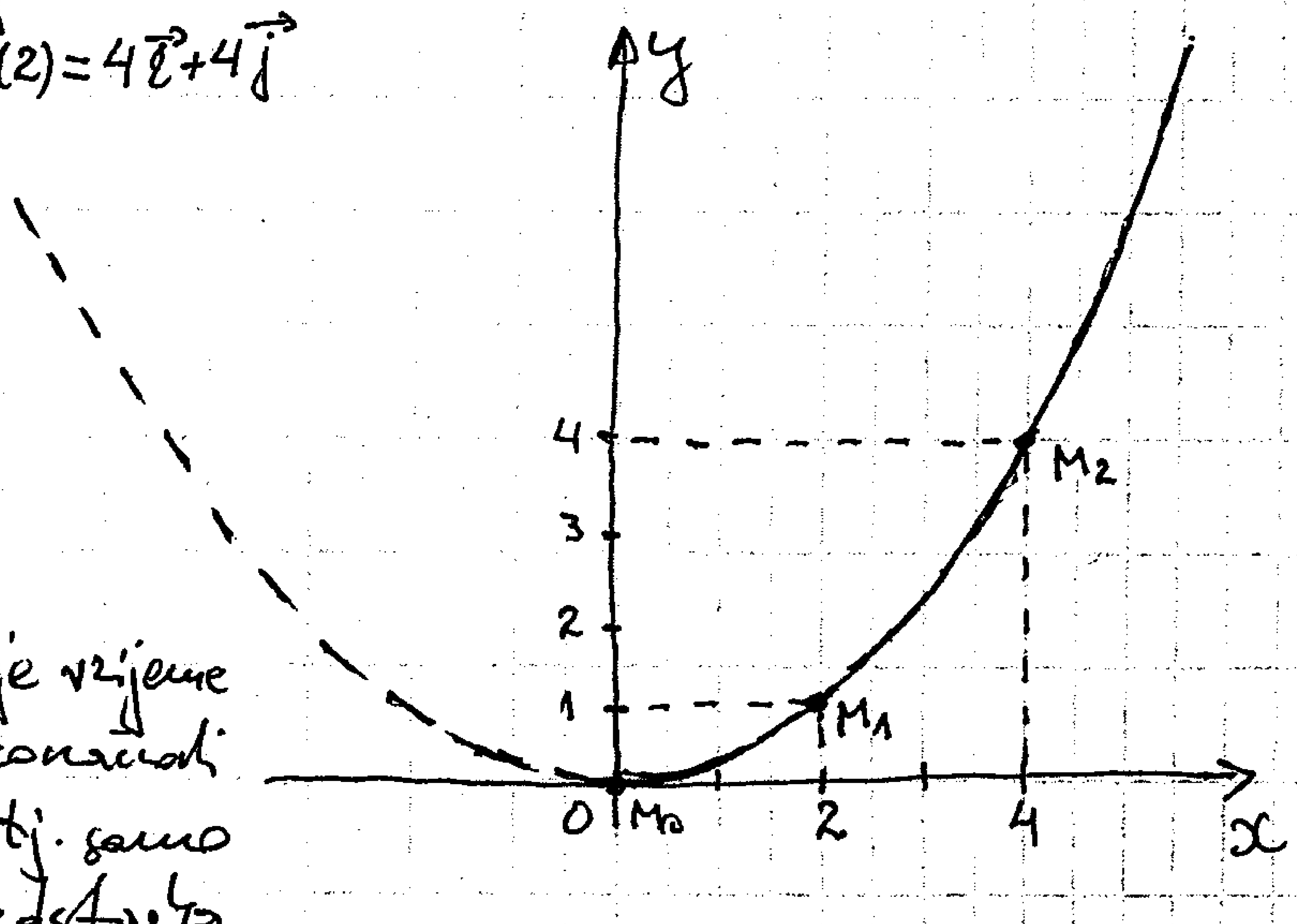
Primjer 1. Konačna jednačina kretanja tačke u ravni zadata je jednačinom: $\vec{r}=2t\vec{i}+t^2\vec{j}$. Odrediti: a) položaj tačke u trenucima $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$; b) konačne jednačine kretanja u Dekartovim koordinatama; c) putanju tačke.

a) $\vec{r}_0=\vec{r}(0)=0$; $\vec{r}_1=\vec{r}(1)=2\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{r}_2=\vec{r}(2)=4\vec{i}+4\vec{j}$

b) $x=2t$, $y=t^2$

c) eliminacijom parametra t iz gornjih jednačina dobija se jednačina linije putanje

$$y=\frac{x^2}{4} \text{ – parabola}$$



Parametar t u jednačinama kretanja je vrijeme i ono ima vrijednosti od nule do beskonačnosti pa će biti: $0\le x(t)<\infty$ i $0\le y(t)<\infty$, tj. samo dio parabole smješten desno od ose y predstavlja putanju.

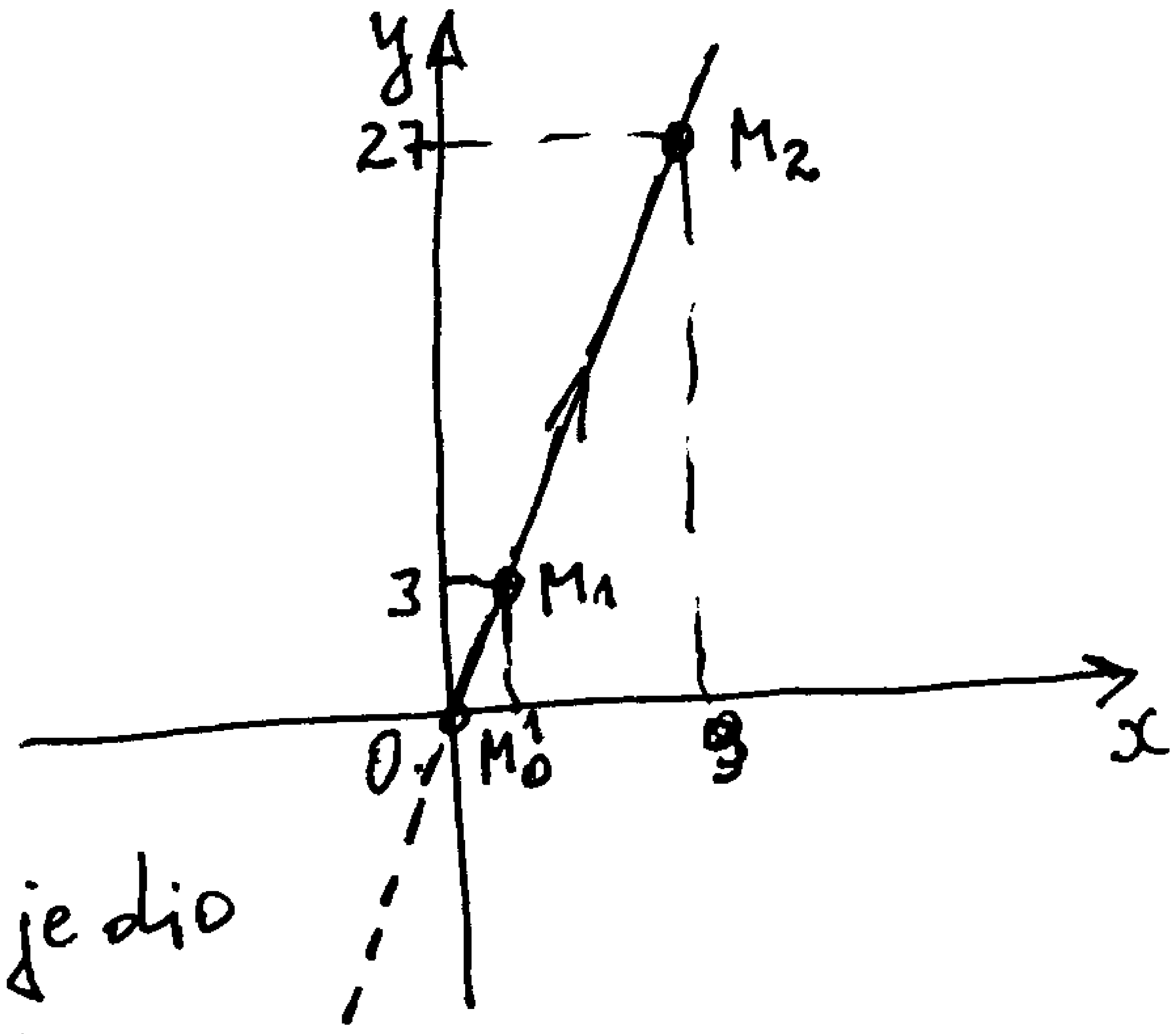
Primjer 2. Konačna jednačina kretanja tačke zadata je jednačinom:

$$\vec{r} = t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j}.$$

Odrediti: a) položaj tačke u trenucima $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$;

b) konačne jednačine kretanja u Dekartovim koordinatama;

c) putanju tačke.



a) $t_0 = 0: \vec{r}_0 = \vec{0}$, $M_0 = (0;0)$

$t_1 = 1: \vec{r}_1 = \vec{i} + 3\vec{j}$, $M_1 = (1;3)$

$t_2 = 3: \vec{r}_2 = 9\vec{i} + 27\vec{j}$, $M_2 = (9,27)$

b) $x = t^2$, $y = 3t^2$

c) $y = 3x$ – linija putanje, a putanja je dio ove prave koji leži u prvom kvadrantu.

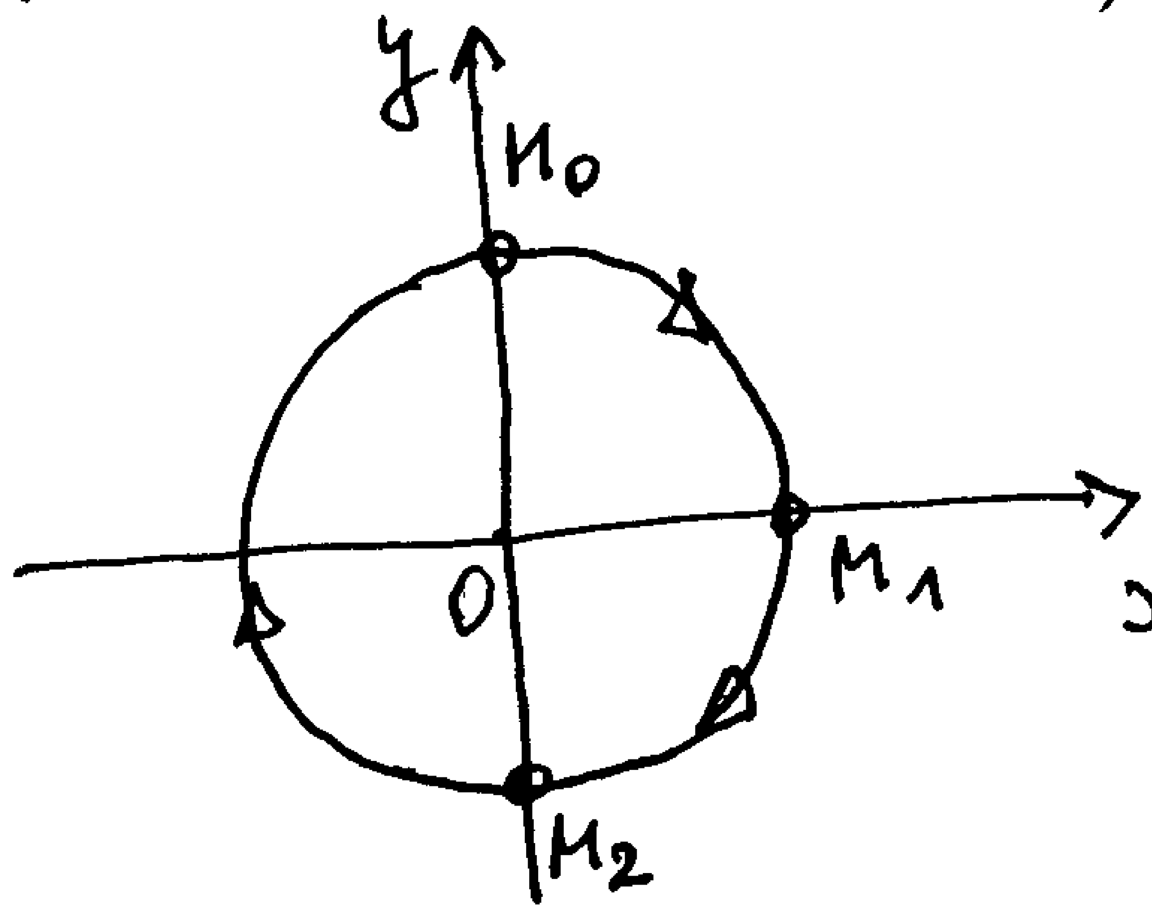
Primjer 3. Konačne jednačine kretanja tačke zadate su jednačinama:

$$x = \sin t, \; y = \cos t.$$

Odrediti: a) položaj tačke u trenutku $t = 0, \pi/2, \pi$;

b) konačnu jednačinu kretanja u vektorskom obliku;

c) putanju tačke.



a) $t_0 = 0: M_0(0;1)$

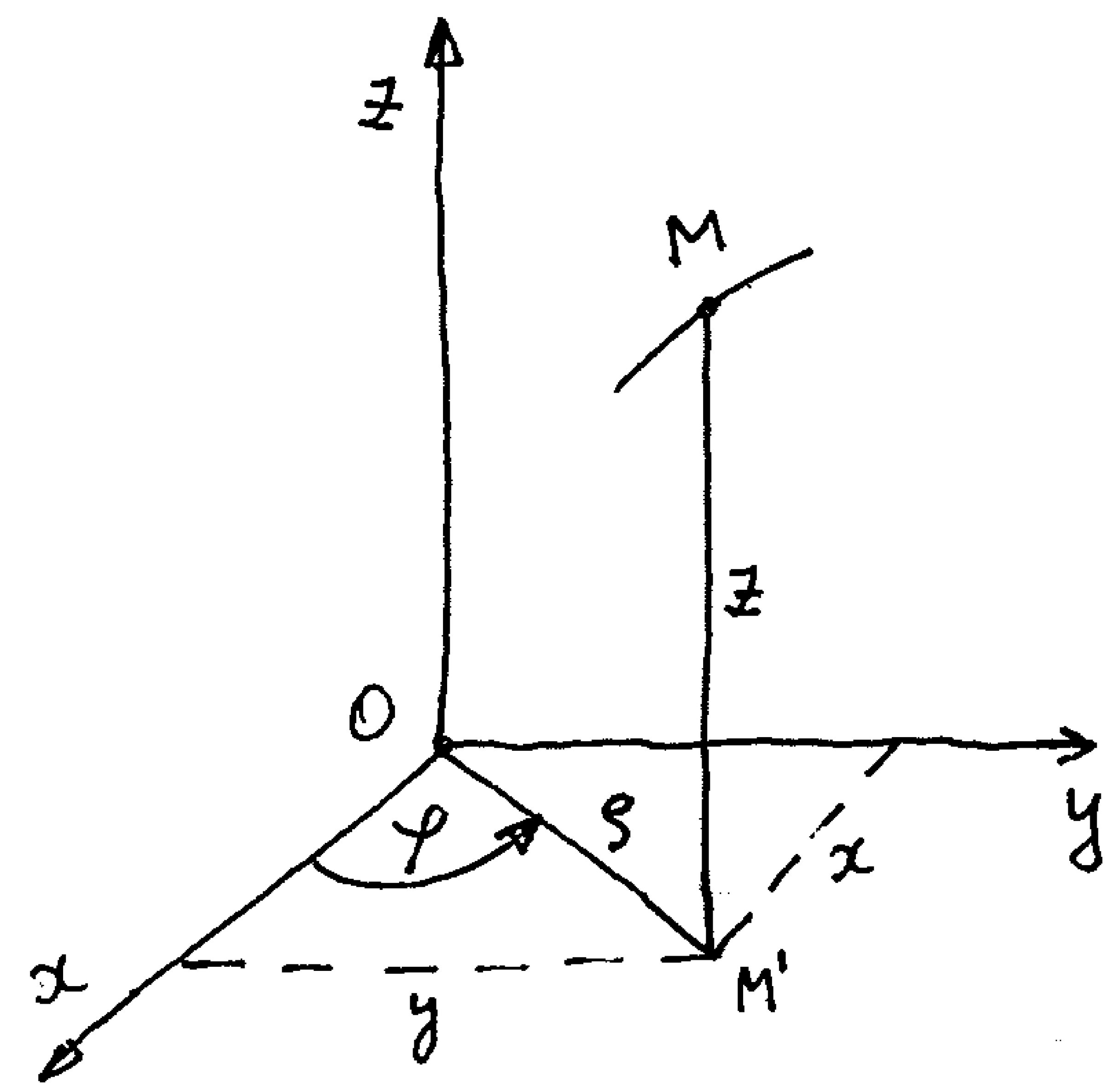
$t_1 = \pi/2: M_1(1;0)$

$t_2 = \pi: M_2(0;-1)$

b) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

c) $\left.\begin{aligned} x &= \sin t \;\Big|^2 \\ y &= \cos t \;\Big|^2 \end{aligned}\right. + \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ – putanja

6) Polarno cilindarske koordinate



Položaj pokretne tačke M može se odrediti veličinama ρ, φ, z koje se zovu polarnocilindarske koordinate.

$\rho = \overline{OM'}$ – polarno rastojanje (poteg) – predstavlja rastojanje tačke M od ose z;

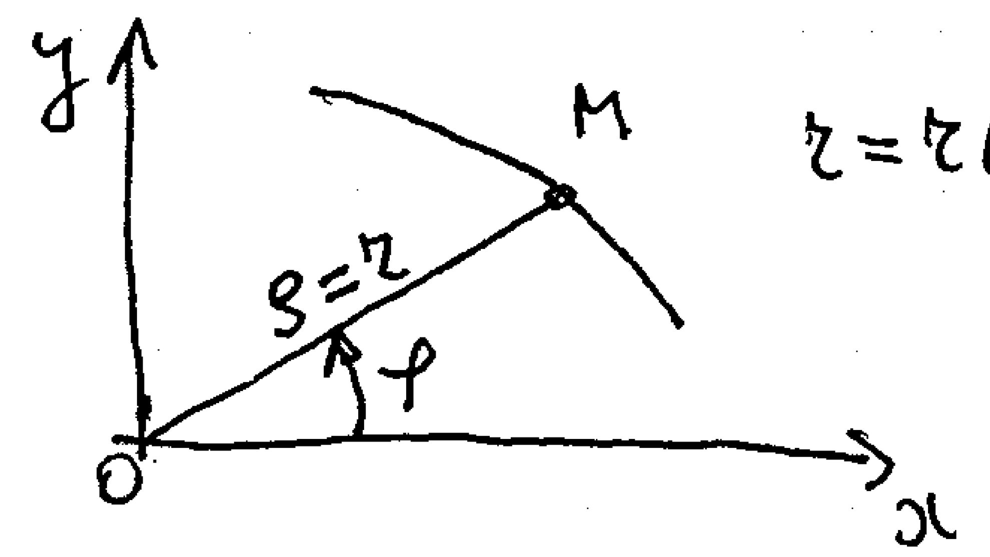
φ – polarni ugao

Relacije

$$\rho=\rho(t),\ \varphi=\varphi(t),\ z=z(t) \qquad (4)$$

predstavljaju konačne jednačine kretanja tačke u polarno cilindričnim koordinatama.

Ako se tačka kreće u ravni upotrebljavaju se polarne koordinate (r, φ)

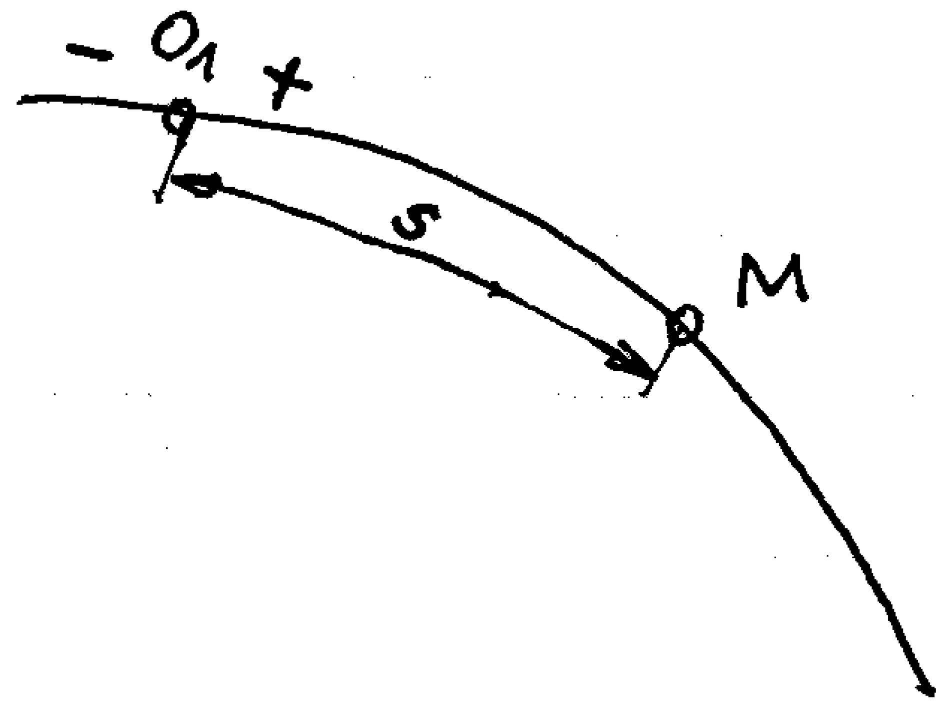


$r=r(t),\ \varphi=\varphi(t)$

Zavisnost između Dekartovih i polarno cilindričnih koordinata: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$ (5)

1.3 Prirodni postupak

Ovaj postupak se primjenjuje u slučajevima kada je putanja tačke unaprijed poznata. Na putanji se neka tačka (obično početni položaj pokretne tačke M) uzima za referentnu tačku. Krivolinijskom koordinatom $s=\overset{\frown}{O_1M}$ koja je jednaka rastojanju tačke M od referentne tačke O_1 mjerenim duž trajektorije određen je položaj tačke M na putanji. Pri tome ~~[illegible]~~ lučnu udaljenost s mjerenu na jednu stranu usvajamo za pozitivnu, a na drugu stranu za negativnu.



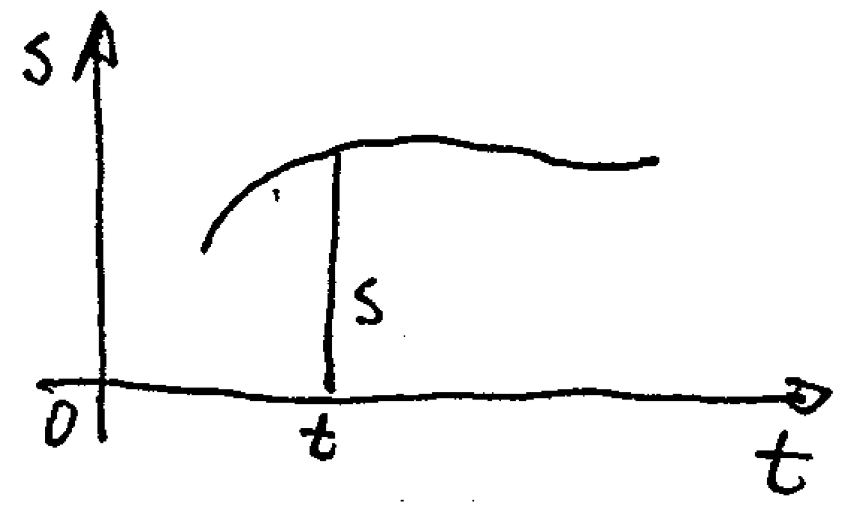
Da bismo poznavali položaj tačke M u svakom trenutku na putanji potrebno je da znamo zavisnost

$$s=s(t) \qquad (6)$$

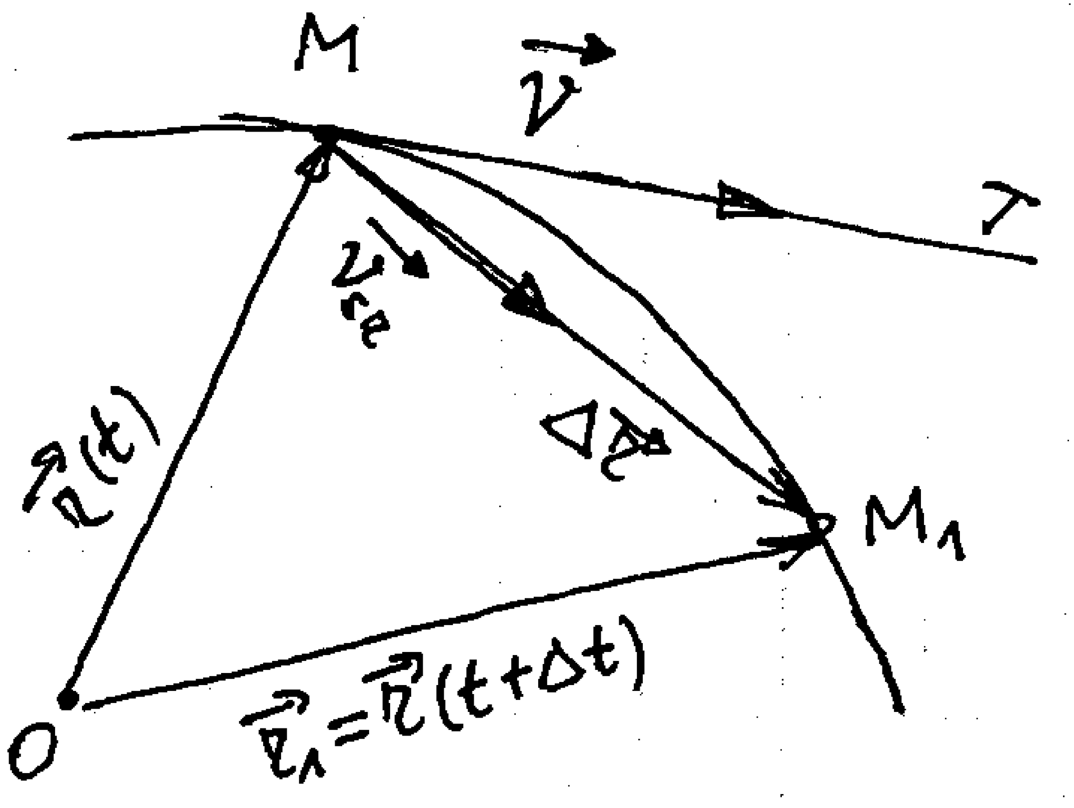
Jednačina (6) predstavlja konačnu jednačinu kretanja tačke po putanji, odnosno zakon kretanja tačke po putanji.

Napomena. Krivolinijska koordinata s (zove se i prirodna koordinata) ne predstavlja u opštem slučaju pređeni put tačke do datog trenutka vremena. Samo u slučaju kada se tačka svo vrijeme kreće u istom smjeru ($s(t)$-monotona funkcija) koordinatom s određen je i pređeni put tačke po putanji, ako je $s(0)=0$.

Zavisnost (6) prikazana u Ost sistemu zove se grafik kretanja



2. Brzina tačke



Δt – konačan vremenski interval potreban da tačka pređe iz položaja M u M_1

$\Delta\vec r = \vec r_1 - \vec r$ – priraštaj vektora položaja (vektor pomjeranja ili pomjeraja)

Srednja brzina $\vec v_{sr}$ za vremenski interval se definiše kao količnik priraštaja vektora položaja $\Delta\vec r$ i odgovarajućeg vremenskog intervala Δt za koji se taj priraštaj ostvari:

$$\vec v_{sr} = \frac{\Delta\vec r}{\Delta t} \qquad (1)$$

Očigledno je da je $\vec v_{sr}$ vektor kolinearan sa $\Delta\vec r$ (tj. ima pravac sječice MM_1), istog smjera kao $\Delta\vec r$.

Brzinom tačke M u datom trenutku vremena t naziva se vektorska veličina $\vec v$ kojoj teži srednja brzina $\vec v_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli:

$$\vec v = \lim_{\Delta t\to 0}(\vec v_{sr}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}$$

Granična vrijednost odnosa $\Delta\vec r/\Delta t$ kada $\Delta t\to 0$ predstavlja prvi izvod vektora $\vec r$ po argumentu t pa će biti

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r} \qquad (2)$$

(Napomena. Diferenciranje po vremenu obično se označava tačkom iznad odgovarajućeg simbola)

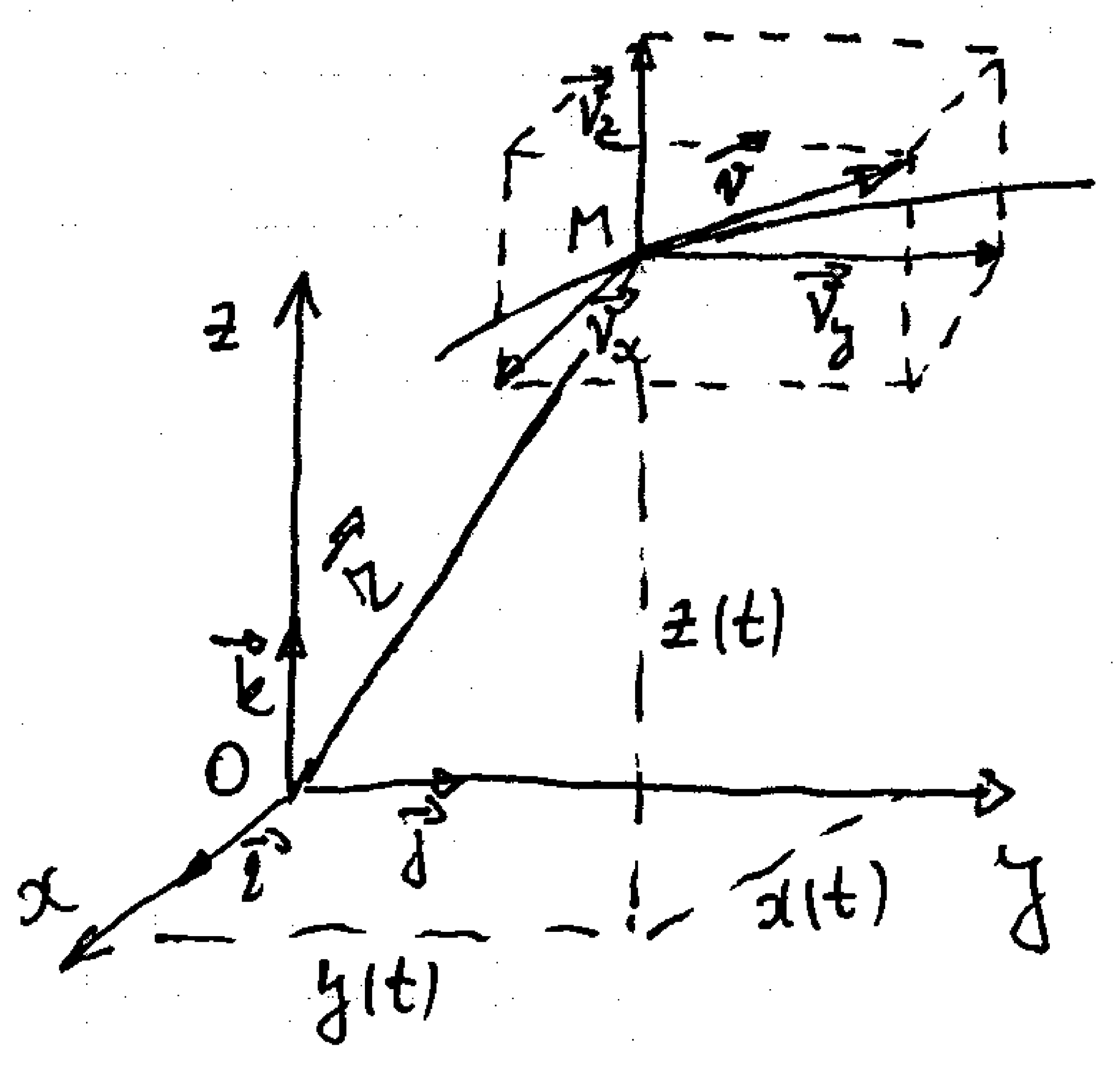
Dakle, vektor brzine tačke u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

Kako se granični pravac sječice MM_1 poklapa sa pravcem tangente, to vektor $\vec v$ ima pravac tangente na putanji i usmjeren je u smjeru kretanja.

Iz definicije vektora brzine slijedi njena dimenzija: $[\vec v] = [\text{dužina}]/[\text{vrijeme}]$.

Osnovna jedinica za brzinu je m/s (metar u sekundi)

2.1 Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu



$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec i) + \frac{d}{dt}(y\vec j) + \frac{d}{dt}(z\vec k)$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec i + \frac{dy}{dt}\vec j + \frac{dz}{dt}\vec k = \dot x\vec i + \dot y\vec j + \dot z\vec k,$$

jer su $\vec i, \vec j$ i $\vec k$ konstantni jedinični vektori (ose x, y, z su nepokretne) pa su njihovi izvodi po vremenu jednaki nuli.

12

Iz $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ slijedi da su projekcije vektora brzine na koordinatne ose: $v_x = \vec{v}\cdot\vec{i} = \dot{x}$, $v_y = \vec{v}\cdot\vec{j} = \dot{y}$, $v_z = \vec{v}\cdot\vec{k} = \dot{z}$

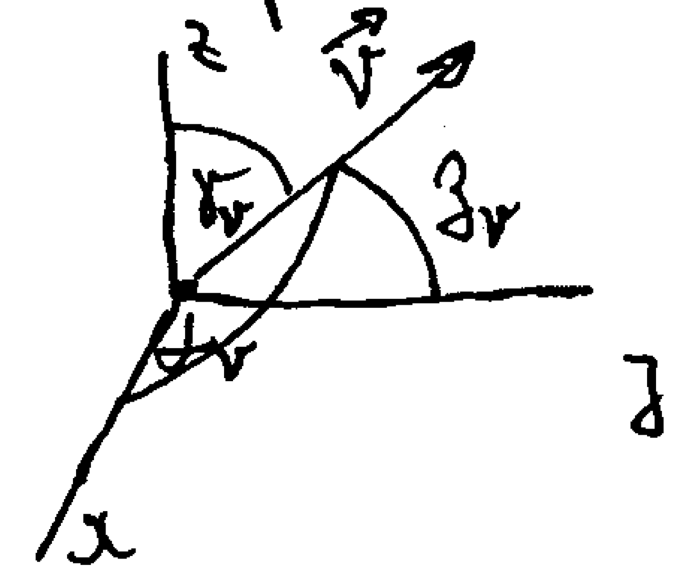
tj. one su određene prvim izvodima Dekartovih koordinata po vremenu.

Intezitet vektora brzine je

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

a pravac vektora $\vec{v}$ određen je uglovima α_v, β_v i γ_v koje taj vektor gradi sa koordinatnim osama x, y, z:

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta_v = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\gamma_v = \frac{v_z}{v}$$

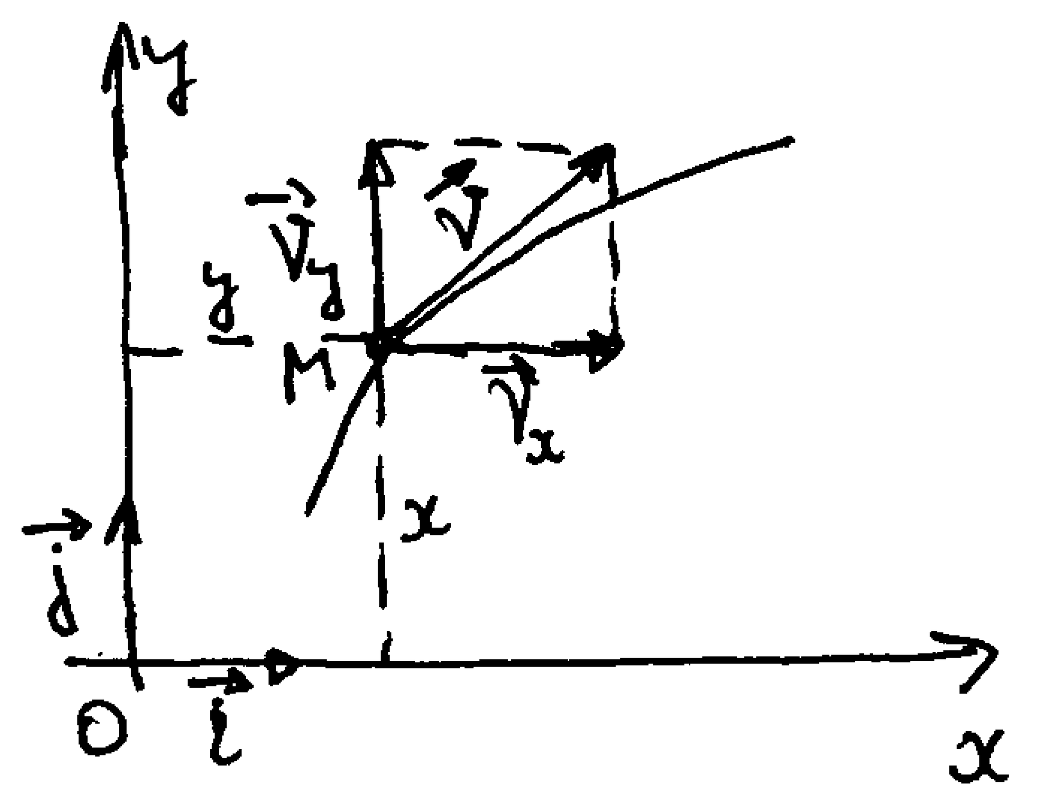


Ako se tačka kreće u ravni biće:

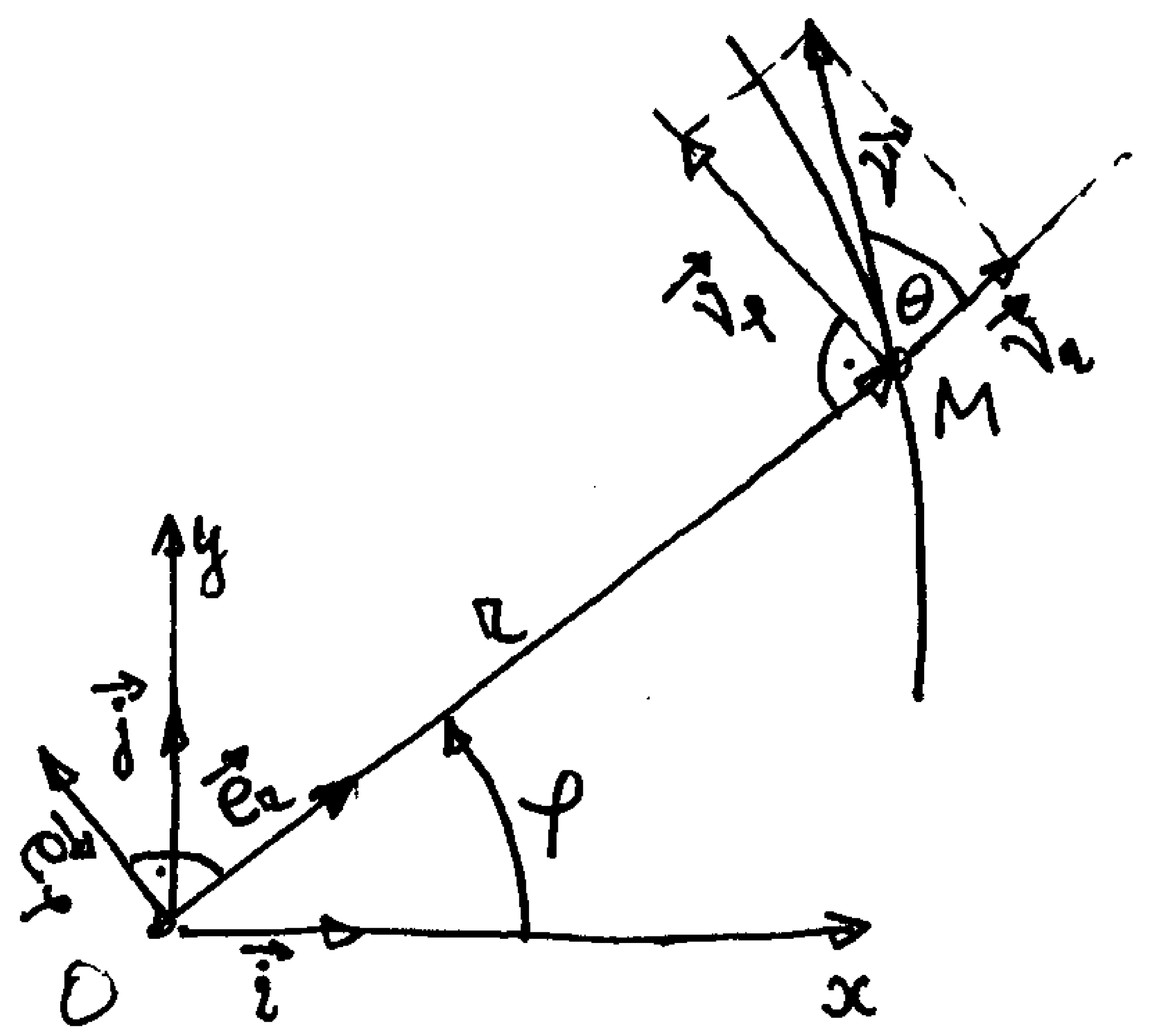
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$



2.2 Brzina tačke u polarnom koordinatnom sistemu



$\vec{e}_r$ – jedinični vektor radijalnog pravca usmjeren od pola O ka tački M

$\vec{e}_\varphi$ – jedinični vektor poprečnog (cirkularnog) pravca koji je normalan na pravac OM

Pri kretanju tačke M $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\varphi$ mijenjaju svoje pravce.

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}, \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = ?$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = (-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \quad \left(\begin{matrix}\text{Analogno je} \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r\end{matrix}\right)$$

$$\rightarrow \quad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$\vec{v}_r = \dot{r}\,\vec{e}_r$ – radijalna komponenta brzine; $\vec{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ – poprečna komponenta

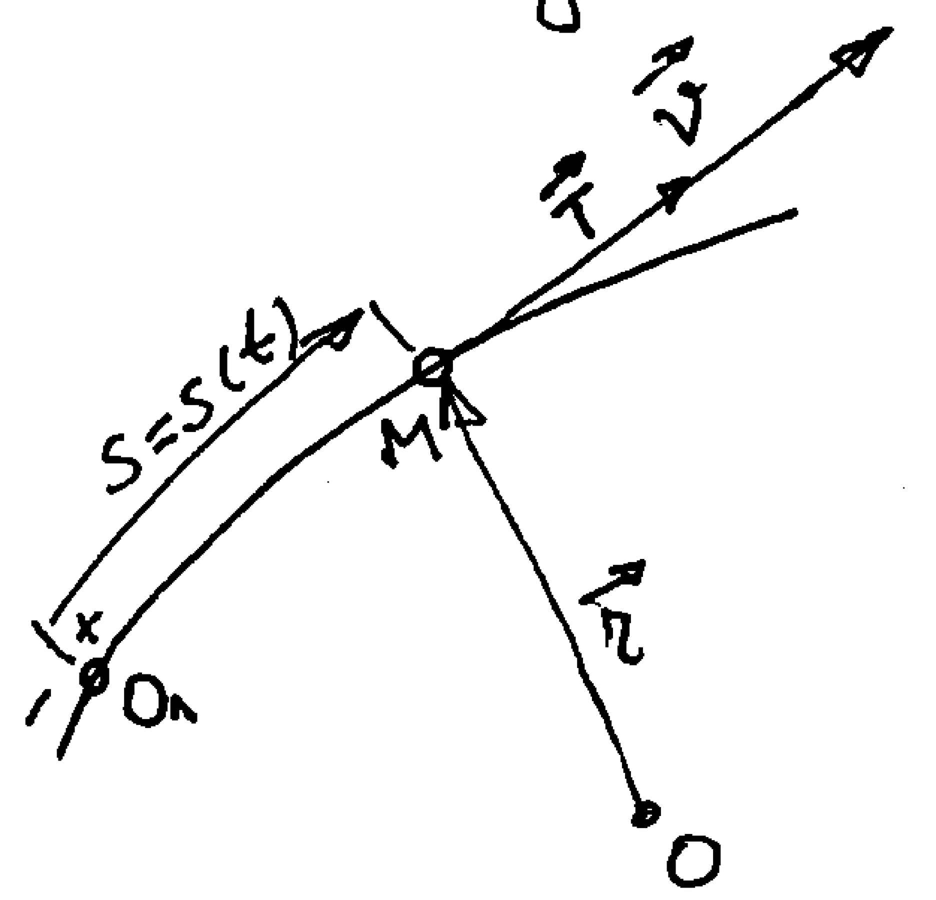
Intezitet brzine je: $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$

Ugao θ koji vektor brzine zaklapa sa potegom određen je relacijom

$$tg\theta = \frac{v_\varphi}{v_r} = \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}}$$

N. U polarno cilindričnom koordinatnom sistemu, osim radijalne i poprečne komponente postoji i komponenta u pravcu ose z, tj. biće $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$

2.3. Određivanje brzine tačke pri prirodnom postupku definisanja kretanja



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

Ako se ima u vidu da se može dokazati da je

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T} \text{ - jedinični vektor tangente,}$$

onda je

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{T}$$

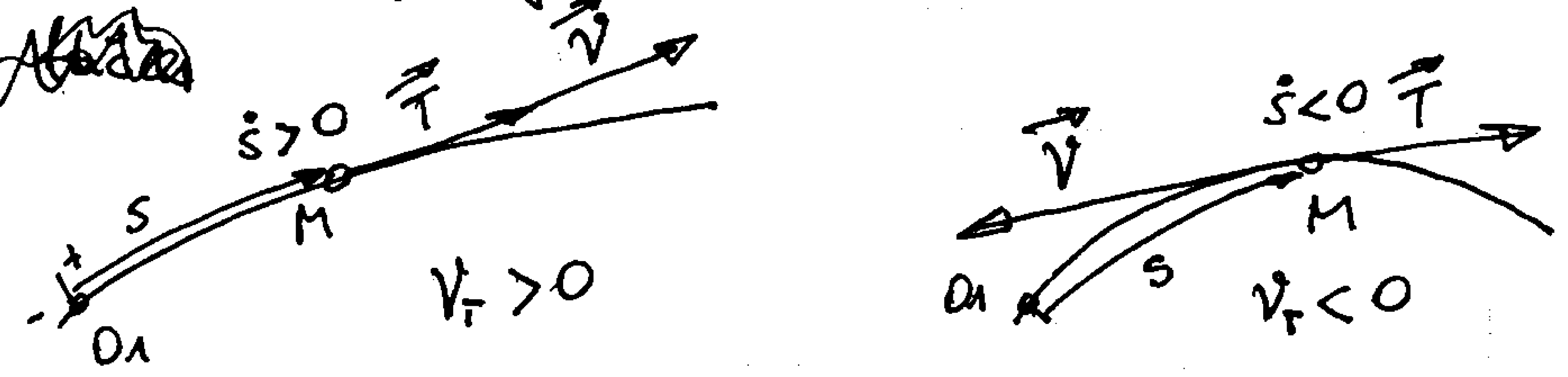
Projekcija vektora brzine na tangentu je

$$v_T = \vec{v}\cdot\vec{T} = \dot{s}$$

jer je $\vec{T}\cdot\vec{T} = 1$. Intenzitet brzine je $|\vec{v}| = v = |v_T| = |\dot{s}|$.

Ako je $v_T = \dot{s} > 0$ tačka se kreće u stranu porasta lučne koordinate s, a ako je $v_T = \dot{s} < 0$ tačka se kreće u stranu smanjivanja koordinate s.

~~Ubrzanje tačke~~



N. U ovom postupku obično se sa v ne označava intenzitet već algebarska vrijednost vektora $\vec{v}(t)$, tj. njegova projekcija v_T) koja se može razlikovati od njegovog intenziteta samo znakom.
Tako se često piše $\vec{v} = v\vec{T}$ i $v = \dot{s}$.

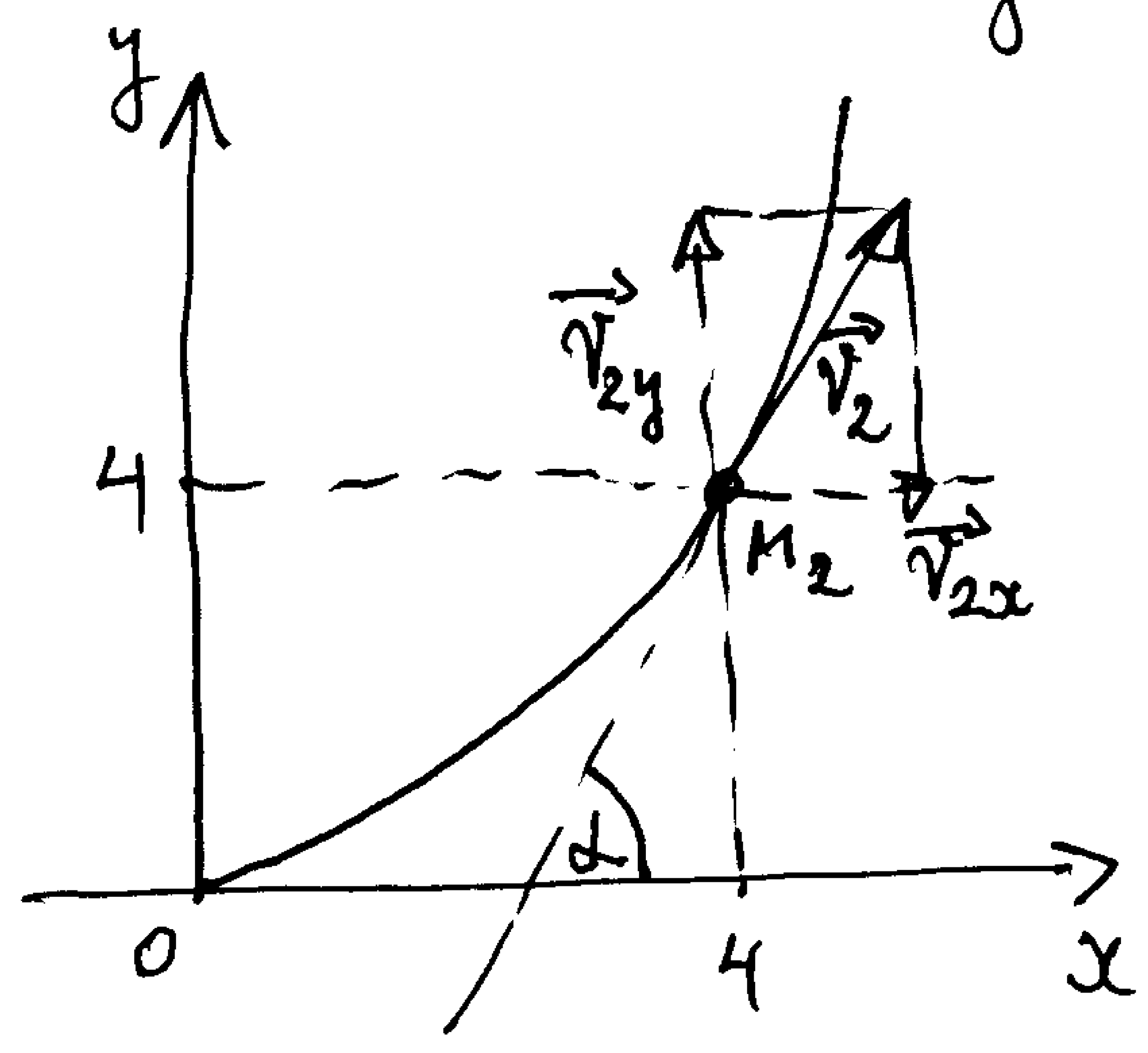
Kada je poznata algebarska vrijednost brzine, onda je

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v\,dt \quad \text{- zakon kretanja tačke po putanji}$$

Ovdje je $s_0 = s(0)$ - početna vrijednost lučne koordinate.

Takođe, lako je pokazati da se pređeni put $\boxed{L_{[t_1, t_2]}}$ za određeni interval vremena $[t_1, t_2]$ može izraziti relacijom: $\int_{t_1}^{t_2} |v|\,dt$

U primjeru 1, odrediti brzinu tačke u proizvoljnom trenutku t. Kolika je brzina u trenutku $t_2 = 2s$ i koliki ugao zaklapa sa x-osom.



$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t)\vec{i} + \frac{d}{dt}(t^2)\vec{j}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} \quad [m/s]$$

$$t = t_2 = 2: \ \vec{v}(t_2) = \vec{v}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\vec{j}; \ v_{2x} = 2, \ v_{2y} = 4$$

$$v_2 = |\vec{v}_2| = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 2\sqrt{5}\ \frac{m}{s}$$

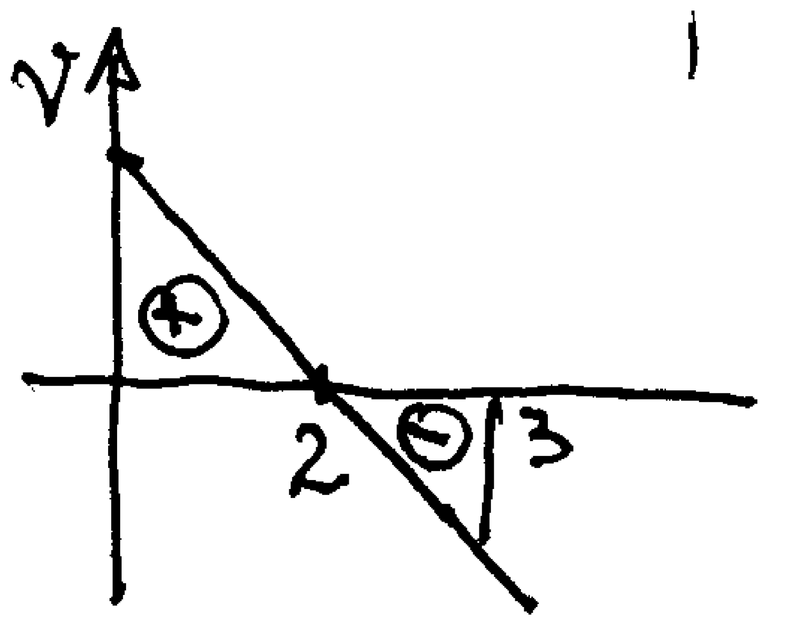
$$tg\alpha = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = 2 \rightarrow \alpha = arctg\,2 \simeq 63,4°$$

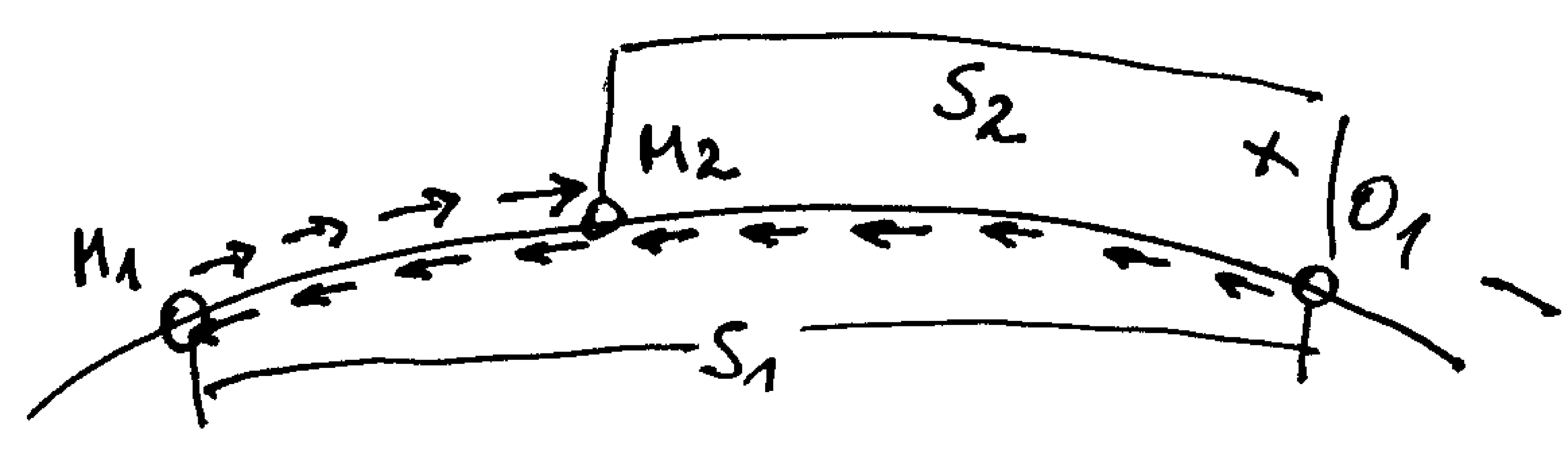
N. $y = \frac{x^2}{4}$ - jednačina trajektorije, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \rightarrow y'(4) = 2$

Primjer 4. Zakon puta je $s = 4t - t^2$, $t[s]$, $s[m]$. Koliki put pređe tačka za prve 3 sekunde kretanja

$v = \dot{s} = 4 - 2t$; $v(t) = 0 \rightarrow t_1 = 2$ - trenutak promjene smjera kretanja

$s(0) = 0$, $s(t_1 = 2) = 4 = s_1$, $s(t_2 = 3) = s_2 = 3$



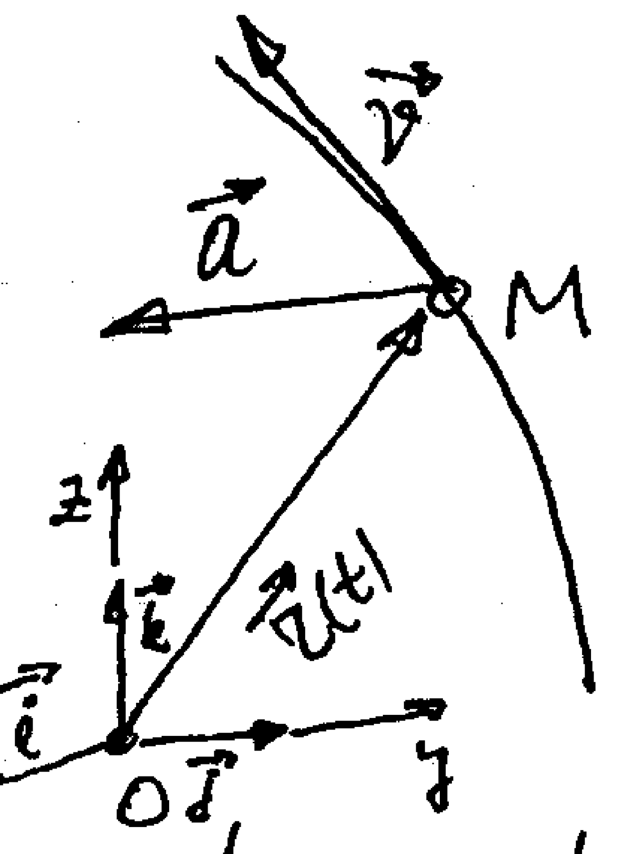


$$L_{[0,3]} = \widehat{O_1M_1} + \widehat{M_1M_2} = s_1 + (s_1 - s_2) = 5m$$

Provjeriti da je $L_{[0,3]} = \int_0^3 |v(t)|dt = \int_0^2 (4-2t)dt + \int_2^3 -(4-2t)dt = 5$

3. Ubrzanje tačke

Ubrzanje tačke je kinematička veličina koja karakteriše promjenu intenziteta i pravca vektora brzine u toku vremena.



Vektor ubrzanja $\vec{a}$ u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora brzine ili drugom izvodu vektora položaja tačke po vremenu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (1)$$

Vektor $\vec{a}$ uvijek je usmjeren u konkavnu (izdubljenu) stranu putanje tačke. On leži u tzv. oskulatornoj ravni krive u tački M, tj. u ravni koja prolazi kroz tačku M i najbolje se priljubljuje uz krivu (putanju). Kod ravanskih krivih oskulatorna ravan se poklapa sa ravni krive.

Na osnovu definicije (1) slijedi dimenzija ubrzanja: $[a] = \frac{[\text{brzina}]}{[\text{vrijeme}]}$ pa je osnovna jedinica m/s^2.

3.1 Ubrzanje tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \xrightarrow{(1)} \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Odavde slijedi da su projekcije ubrzanja na ose Dekartovog koord. sistema:

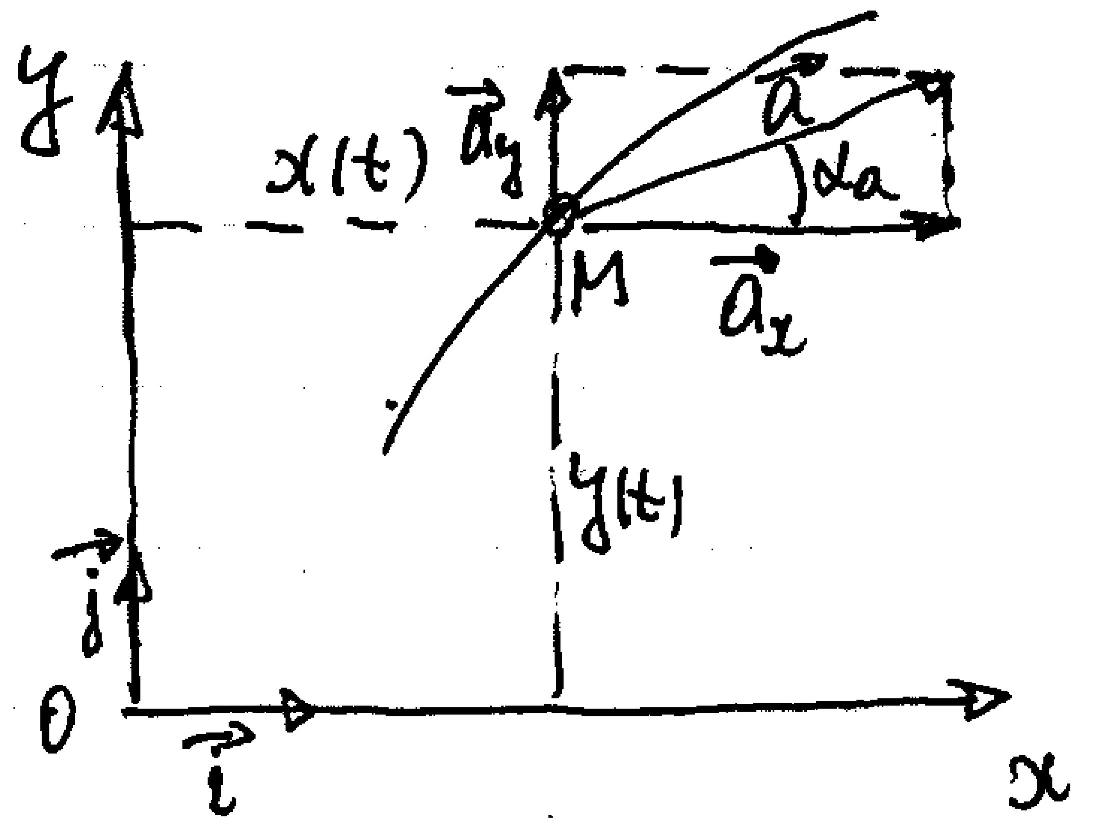
$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}$$

i one predstavljaju druge izvode po vremenu odgovarajućih koordinata tačke.

Intenzitet ubrzanja je $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, a uglovi $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a$ vektora ubrzanja sa koordinatnim osama dobijaju se iz

$$\cos\alpha_a = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta_a = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma_a = \frac{a_z}{a}$$

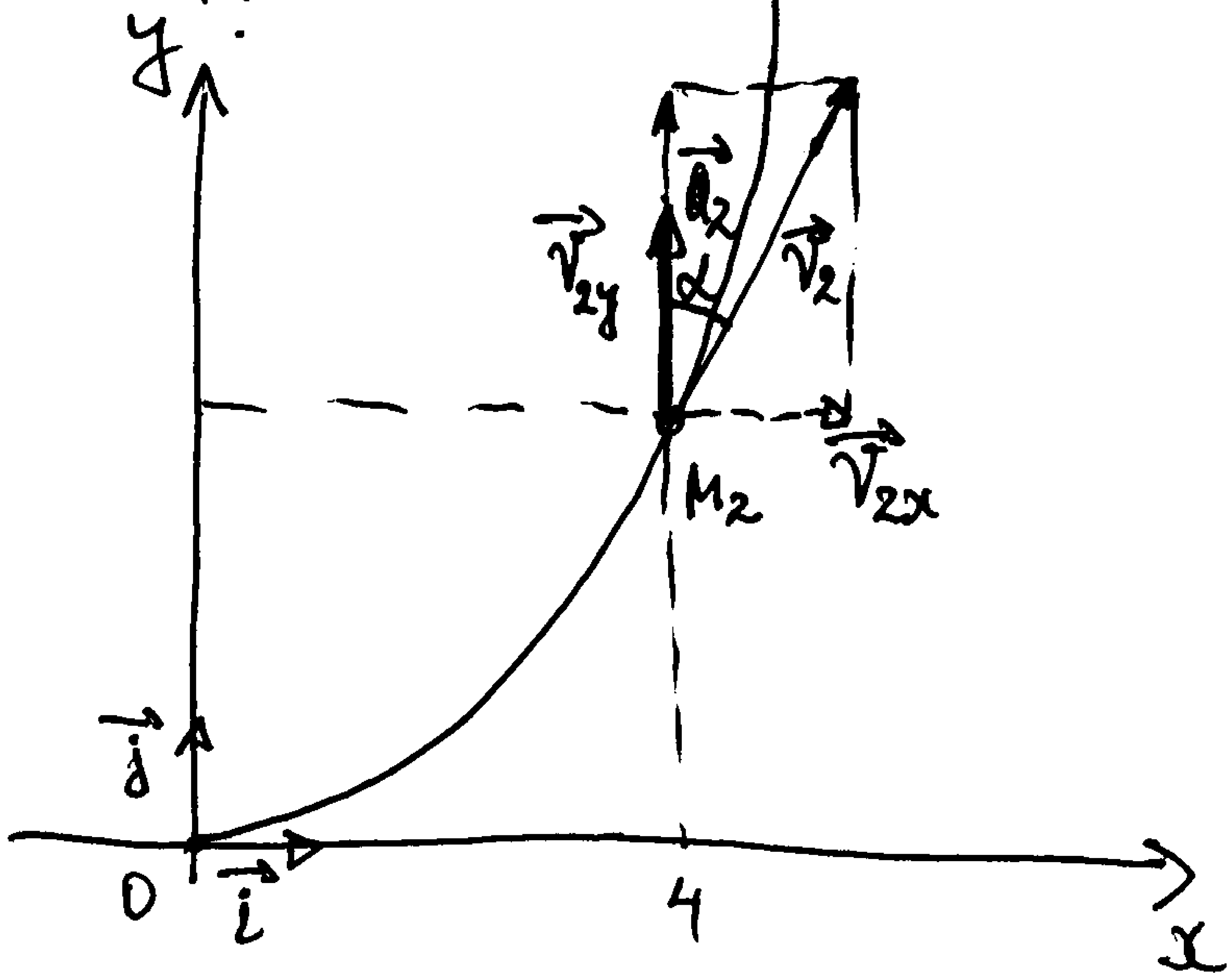
Ako se kretanje tačke vrši u nekoj ravni, recimo xOy, tada je $z(t) \equiv 0$ i prema tome $a_z = \ddot{z} \equiv 0$, tj. vektor ubrzanja leži u toj ravni.



$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_a = \frac{a_y}{a_x}$$

Primjer 5. U primjeru 1, odrediti ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku t. Koliko je ubrzanje tačke u trenutku $t_2 = 2s$ i koliki ugao zaklapa ubrzanje sa brzinom u tom trenutku?



$\vec{r} = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \underbrace{2}_{v_x}\vec{i} + \underbrace{2t}_{v_y}\vec{j}$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = 2\vec{j}$

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

$\rightarrow a_x = 0,\ a_y = 2\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$

za $t = t_2 = 2s$: $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2) = \underbrace{2}_{v_{2x}}\vec{i} + \underbrace{4}_{v_{2y}}\vec{j} \rightarrow v_2 = |\vec{v}_2| = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 2\sqrt{5}\ \frac{m}{s}$

$\vec{a}_2 = \vec{a}(t_2) = 2\vec{j}$

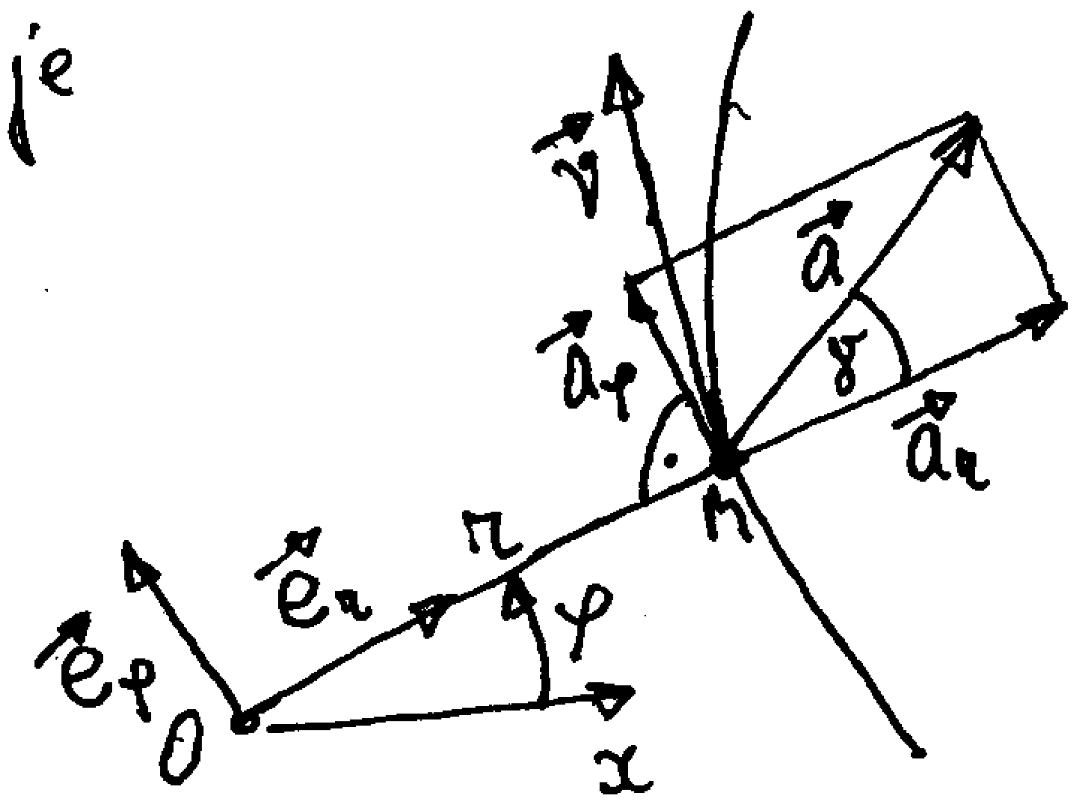
$a_2 = |\vec{a}_2| = 2\ \frac{m}{s^2}$

$\vec{v}_2 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{v}_2||\vec{a}_2|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{v}_2||\vec{a}_2|} = \frac{v_{2x}a_{2x} + v_{2y}a_{2y}}{|\vec{v}_2||\vec{a}_2|}$

$\cos\alpha = \frac{2\cdot 0 + 4\cdot 2}{2\sqrt{5}\cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = 26{,}56^\circ$

3.2 Ubrzanje tačke u polarnom koordinatnom sistemu

Vektor brzine u polarnim koordinatama je



$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Diferenciranjem po vremenu vektora brzine dobijamo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \underbrace{(r\dot{\varphi})^{\cdot}}_{\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi$$

Kako je (~~na obrascu~~ vidi 2.2) $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ i $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$, to je

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Prema tome, ubrzanje se sastoji iz dvije međusobno normalne komponente $\vec{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r$ i $\vec{a}_\varphi = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$. Prva je usmjerena duž poteg r i zove se radijalno ubrzanje, a druga je upravna na poteg r i naziva se poprečno (cirkularno ili obrtno) ubrzanje.

Projekcije radijalnog i poprečnog ubrzanja na radijalni i poprečni pravac iznose

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$$

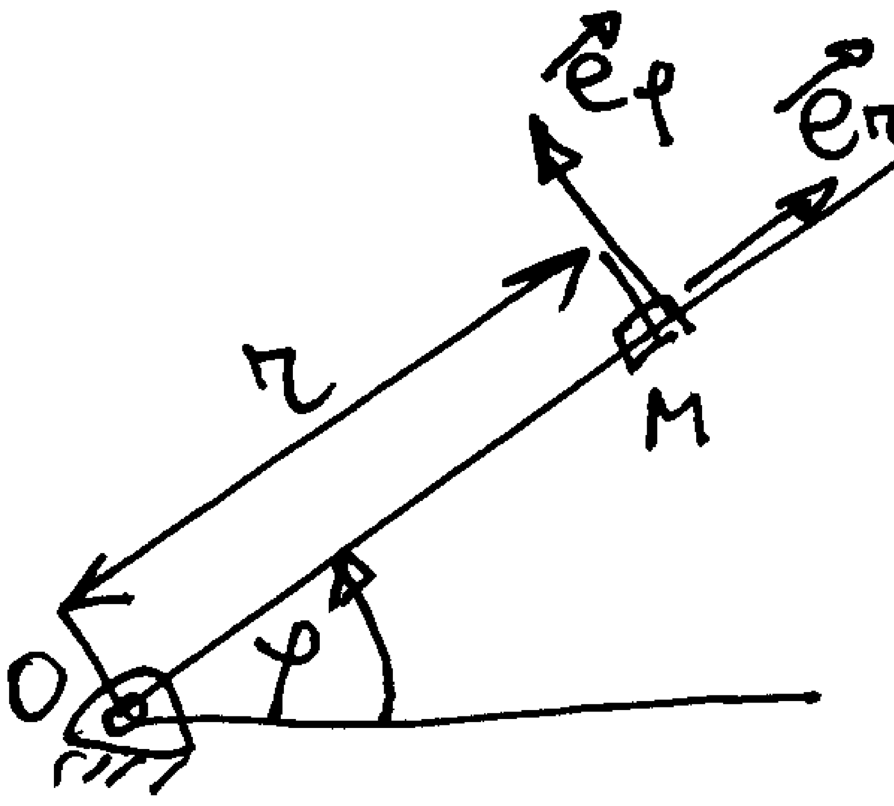
Intenzitet ubrzanja je: $a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$

Ugao γ između ubrzanja $\vec{a}$ i radijalnog pravca određen je izrazom $tg\gamma = \frac{a_\varphi}{a_r}$.

N. U polarno cilindarskom koordinatnom sistemu, osim radijalne i poprečne komponente ubrzanja postoji i komponenta u pravcu ose z, tj. biće

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)}_{a_\rho}\vec{e}_\rho + \underbrace{(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})}_{a_\varphi}\vec{e}_\varphi + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{k}$$

Primjer 6. Obrtanje štapa OA oko kraja O je određeno zakonom $\varphi = 0{,}25\,t^2$ (t [s], φ [rad]). Klizač M se pomjera duž štapa tako da je njegovo rastojanje od tačke O: $r = 2 - 0{,}5\,t^2$ (r [m]). Odrediti trajektoriju klizača, kao i njegovu brzinu i ubrzanje u trenutku $t_1 = 1$ s.



$$\left.\begin{aligned} r &= 2 - 0{,}5t^2 \\ \varphi &= 0{,}25t^2 \end{aligned}\right\} (1)$$

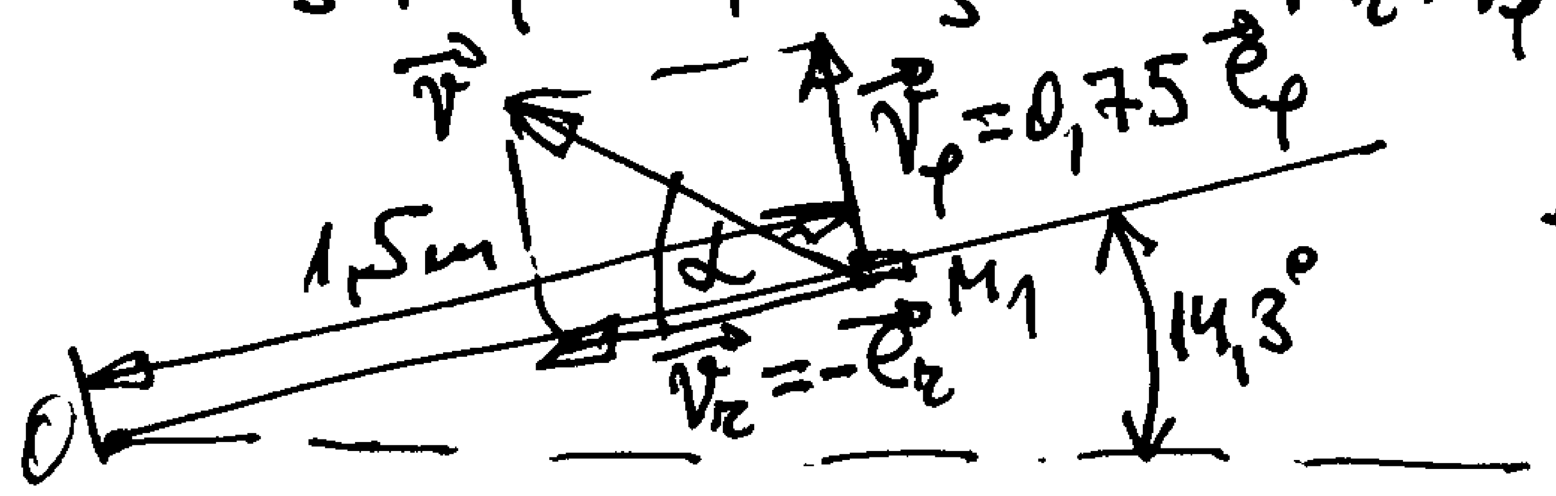
$(1) \rightarrow r = 2 - 2\varphi$ – trajektorija

$(1) \rightarrow \dot{r} = -t,\ \ddot{r} = -1;\ \dot{\varphi} = 0{,}5t,\ \ddot{\varphi} = 0{,}5$

$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi;\quad v_r = \dot{r} = -t,\quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = (2 - 0{,}5t^2)\cdot 0{,}5t$

U trenutku $t = t_1 = 1$ s: $r(t_1) = 1{,}5$ m; $\varphi(t_1) = 0{,}25$ rad ($\approx 14{,}3°$)

$v_r = -1\ \frac{m}{s},\ v_\varphi = 0{,}75\ \frac{m}{s} \rightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 1{,}25\ \frac{m}{s}$



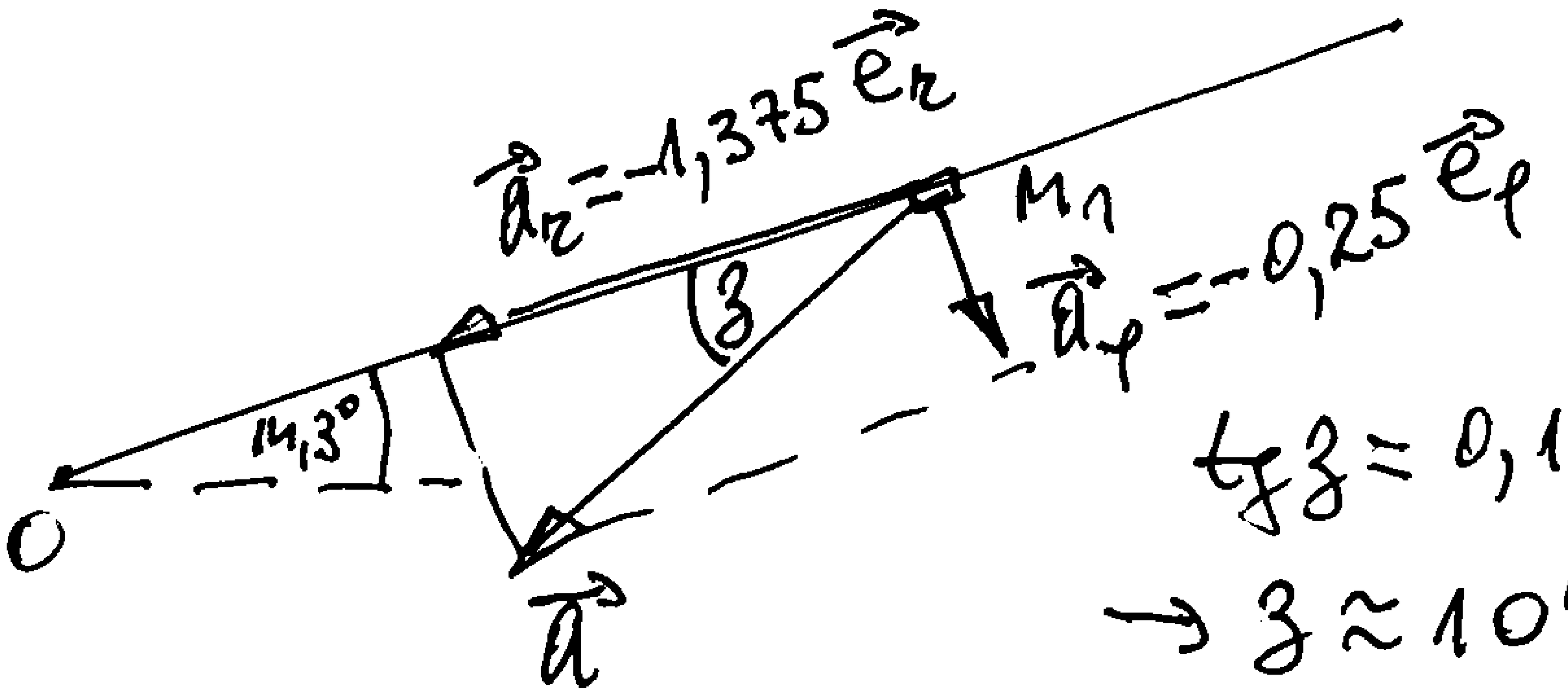
$tg\,\alpha = 0{,}75$

$\alpha = 36{,}9°$

ubrzanje: $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi;\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$

za $t = t_1 = 1$ s: $a_r = -1{,}375\ m/s^2,\ a_\varphi = -0{,}25\ m/s^2$

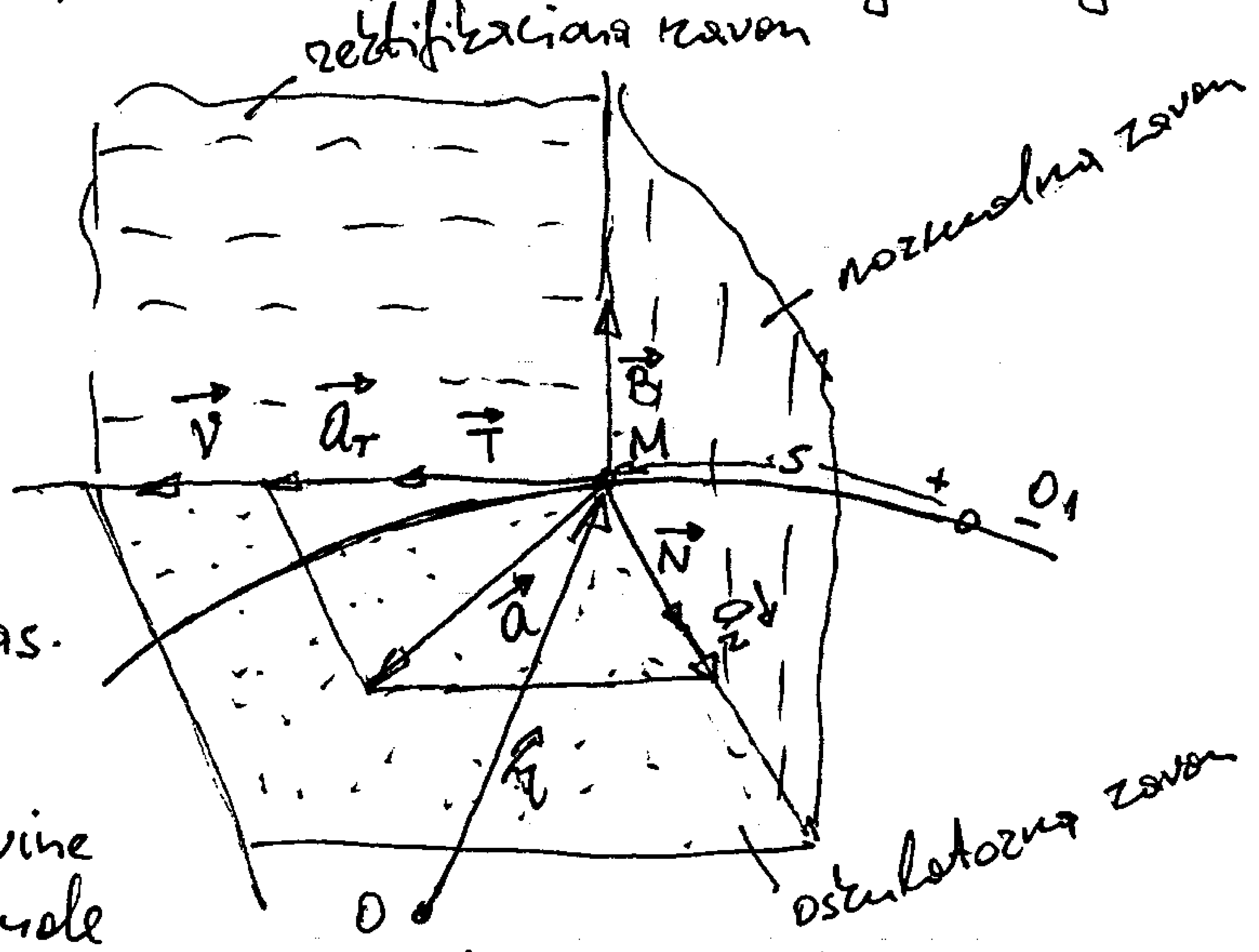
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = 1{,}4\ m/s^2$$



$tg\,\beta = 0{,}18$

$\rightarrow \beta \approx 10°$

3.3 Određivanje ubrzanja tačke pri prirodnom postupku definisanja kretanja



U tački M, za trajektoriju tačke može se vezati ~~vezati~~ pravougli koordinatni sistem sa osama usmjerenim duž tangente ($\vec{T}$), glavne normale ($\vec{N}$) i binormale ($\vec{B}$). Jedinični vektor tangente $\vec{T}$ je u pravcu tangente na putanju u tački M i uvijek je orjentisan u smjeru u kome raste lučna koordinata s. Glavna normala je normala koja leži u oskulatornoj ravni a njen jedinični vektor $\vec{N}$ je usmjeren ka centru krivine trajektorije. Jedinični vektor $\vec{B}$ binormale normalan je na oskulatornu ravan a smjer mu je određen tako da sa vektorima $\vec{T}$ i $\vec{N}$ obrazuje desni trijedar, tj. $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$. Dobijeni trijedar zove se prirodni trijedar. Pri kretanju tačke M prirodni trijedar se kreće zajedno sa njom pri čemu njegove ose mijenjaju orjentaciju (pravce).

U diferencijalnoj geometriji se dokazuju tzv. Freneovi obrasci:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R_k}\vec{N},$$ R_k – poluprečnik krivine putanje u datoj tački

Ako pođemo od izraza za brzinu $\vec{v} = \dot{s}\vec{T}$ imaćemo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{T}) = \ddot{s}\vec{T} + \dot{s}\dot{\vec{T}}$$

Dalje je

$$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{R_k}\vec{N}$$

tako da je konačno

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k}\vec{N}$$

Prema tome, vektor ubrzanja tačke ima dvije komponente u prirodnom trijedru:

$\vec{a}_T = \ddot{s}\vec{T}$ – tangencijalno ubrzanje koje je usmjereno duž tangente

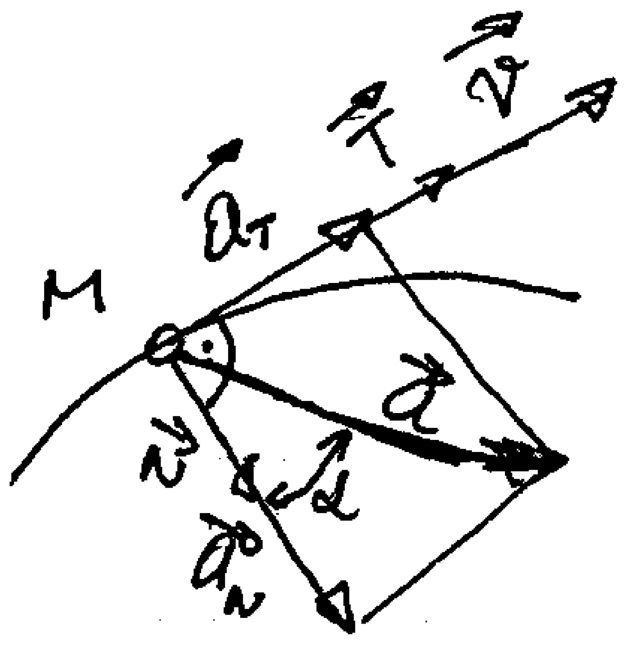
$\vec{a}_N = \frac{\dot{s}^2}{R_k}\vec{N}$ – normalno ubrzanje koje je usmjereno po normali ka centru krivine putanje

Imajući u vidu da je $\dot{s} = v_T = v$ (vidi napomenu u 2.2) nalazimo projekcije ~~možemo pisati da je~~ vektora ubrzanja na ose prirodnog trijedra:

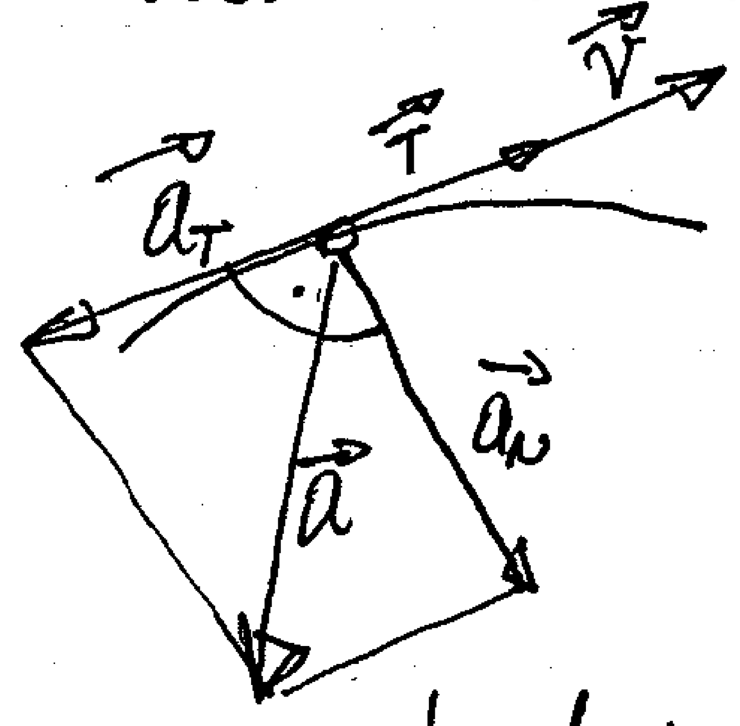
$$a_T = \vec{a}\cdot\vec{T} = \ddot{s} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad a_N = \vec{a}\cdot\vec{N} = \frac{\dot{s}^2}{R_k} = \frac{v^2}{R_k}, \quad a_B = \vec{a}\cdot\vec{B} \equiv 0$$

Projekcija ubrzanja na pravac binormale jednaka je nuli, jer $\vec{a}$ leži u oskulatornoj ravni. Tangencijalno ubrzanje karakteriše promjenu intenziteta brzine a normalno promjenu pravca vektora brzine na putanji. Normalno ubrzanje uvijek ima smjer ka centru krivine putanje dok tangencijalno ubrzanje može biti u smjeru tangente (kada je $\ddot{s} > 0$) ili u suprotnom smjeru ($\ddot{s} < 0$).

Ako su u nekom trenutku v i $a_T = \dot{v}$ istog znaka kretanje je ubrzano, a ako su te veličine suprotnog znaka kretanje je usporeno.



ubrzano kretanje ($v>0$, $\dot{v}>0$)



usporeno kretanje ($v>0$, $\dot{v}<0$)

Normalno ubrzanje jednako je nuli u trenucima kada je brzina jednaka nuli ili kada tačka prolazi kroz prevojnu tačku putanje ($R_k = \infty$). Ako je normalno ubrzanje jednako nuli za svo vrijeme kretanja ($v \neq 0$, $R_k = \infty$) onda je kretanje pravolinijsko.
Ako je u nekom trenutku tangencijalno ubrzanje jednako nuli onda u tom trenutku brzina ima ekstremalnu vrijednost (minimum ili maksimum). Ako je $a_T = 0$ za svo vrijeme kretanja, onda je intezitet brzine tačke konstantan i takvo kretanje se zove jednoliko (ravnomjerno).

Intezitet vektora ubrzanja je $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$, a ugao α između vektora ubrzanja i glavne normale je određen relacijom

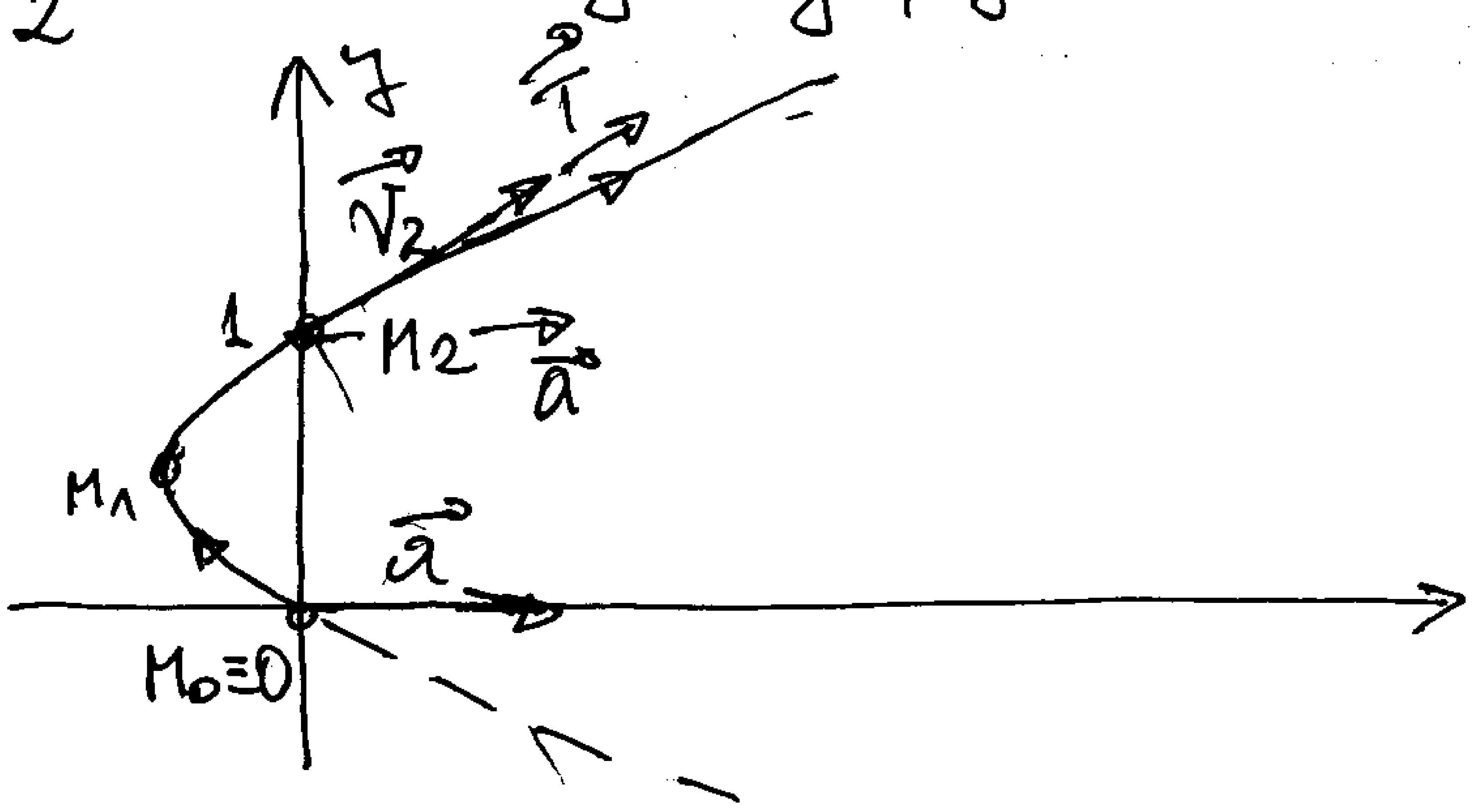
$$tg\alpha = \frac{|a_T|}{a_N}$$

Primjer 7. Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$x(t)=\frac{t^2}{2}-t,\quad y(t)=\frac{t}{2}.$$

a) Nacrtati trajektoriju tačke. b) Odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku. c) Odrediti brzinu i ubrzanje tačke u trenutku u kom tačka siječe y-osu. d) Odrediti prirodne komponente ubrzanja u trenutku u kom tačka siječe y-osu, kao i poluprečnik krivine trajektorije.

a) $x=\frac{t^2}{2}-t,\ y=\frac{t}{2} \Rightarrow x=2y^2-2y,\ y(t)\geq 0$



b) $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}=(t-1)\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

$\vec{a}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}=\vec{i}$

c) $x(t)=0 \Leftrightarrow t\left(\frac{t}{2}-1\right)=0 \rightarrow t_0=0,\ t_2=2\ s$

$\vec{v}_0=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j},\quad v_0=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{5}/2\ m/s,\quad \vec{a}_0=\vec{i},\quad a_0=1\ m/s^2$

$\vec{v}_2=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j},\quad v_2=\sqrt{5}/2\ m/s,\quad \vec{a}_2=\vec{a}=\vec{i},\quad a_2=1\ m/s^2$

d) $\vec{T}=\frac{\vec{v}_2}{v_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i}+\vec{j}),\quad a_{2T}=\vec{a}_2\cdot\vec{T}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{m}{s^2},\quad a_N=\sqrt{a_2^2-a_T^2}$

$a_{2N}=\sqrt{1-4/5}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ \frac{m}{s^2},\quad a_{2N}=\frac{v_2^2}{R_k} \rightarrow R_k=\frac{5/4}{1/5}=\frac{25}{4}\ m$