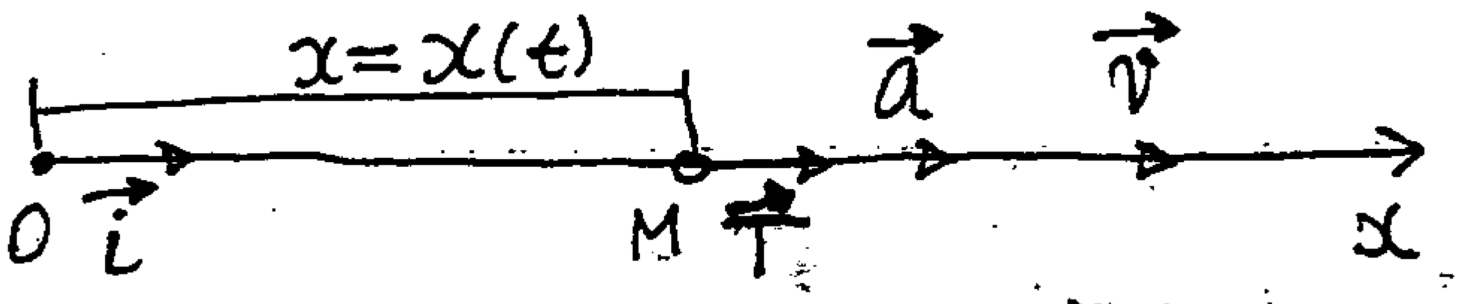
4. Posebni slučajevi kretanja tačke

4.1 Pravolinijsko kretanje tačke

Kretanje tačke je pravolinijsko ako je njena linija putanje prava. Za pravu je $R_k = \infty$ pa je normalno ubrzanje tačke jednako nuli ($\vec{a}_N = 0$) i, dakle, ukupno ubrzanje je jednako tangencijalnom: $\vec{a} = \vec{a}_T$.



Duž pravolinijske linije putanje usvajamo koordinatnu osu Ox sa jediničnim vektorom $\vec{i}$ (u ovom slučaju koordinata x ima takođe ulogu prirodne (lučne) koordinate: $s = x$, $\vec{T} = \vec{i}$).

Konačna jednačina kretanja (zakon puta) daje se jednačinom:

$$x = x(t),$$

a vektori brzine i ubrzanja tačke su:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= v\vec{i} = v_x\vec{i} = \dot{x}\vec{i}, \\ \vec{a} &= a\vec{i} = a_x\vec{i} = \dot{v}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}, \end{aligned}\right\} (1)$$

gdje su $v = v_x = \dot{x}$, $a = a_x = \dot{v} = \ddot{x}$ algebarska brzina i algebarsko ubrzanje (projekcije vektora brzine i ubrzanja na x-osu).

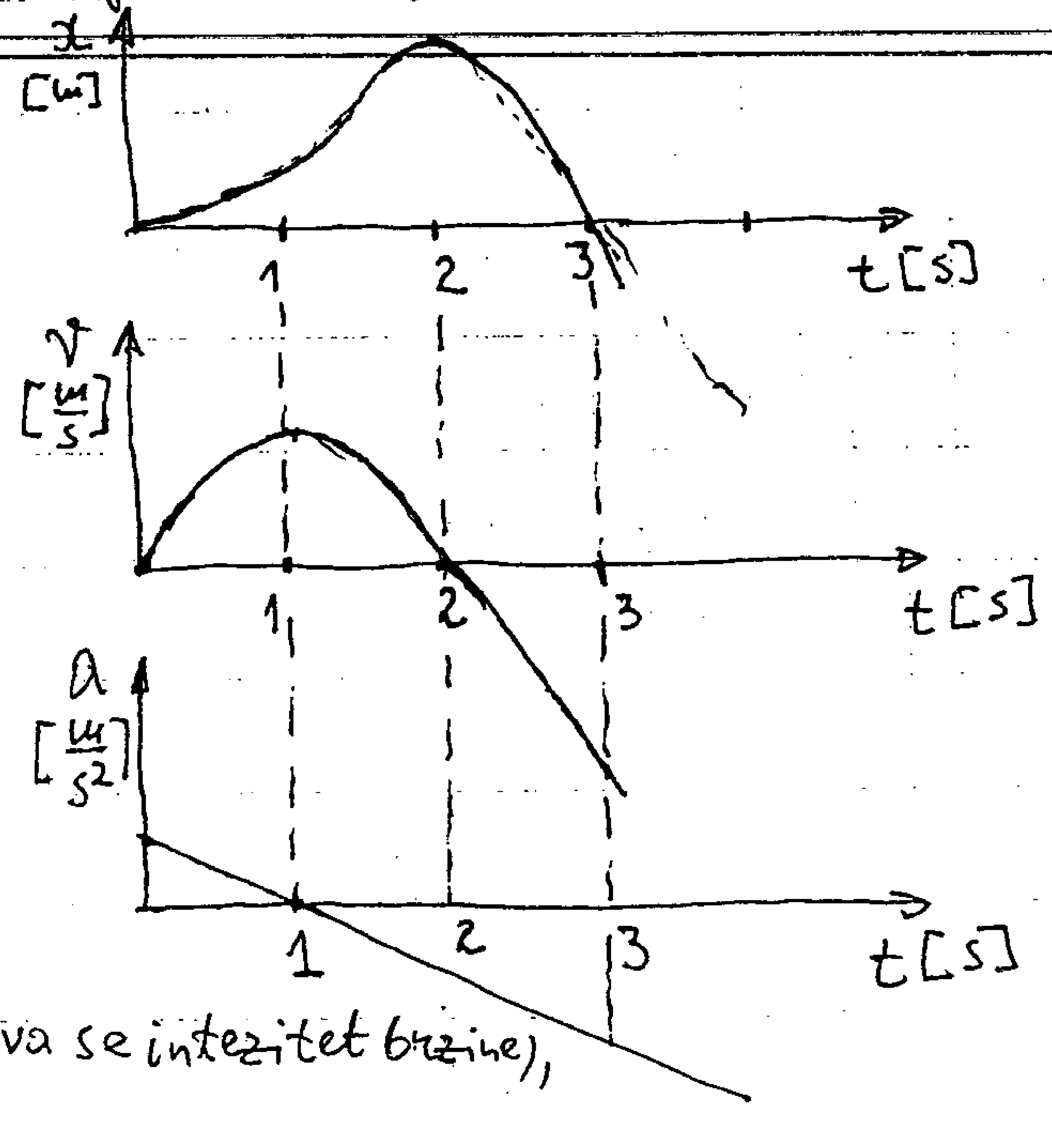
Dakle, kod pravolinijskog kretanja brzina i ubrzanje tačke padaju duž prave po kojoj se vrši kretanje.

Primjer 8. Konačna jednačina pravolinijskog kretanja tačke je $x = 3t^2 - t^3$ [m]. a) Odrediti brzinu i ubrzanje tačke i skicirati kinematičke dijagrame ($x-t$, $v-t$, $a-t$); b) Odrediti trenutak t^* u kom tačka mijenja smjer kretanja; c) Odrediti put koji će tačka preći za prve 3 sekunde kretanja; d) Odrediti intervale vremena tokom prvih 3 sekundi kretanja u kojima je kretanje ubrzano, odnosno usporeno.

a) $x = 3t^2 - t^3$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 6t - 3t^2,$$

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = 6 - 6t$$



b) $v(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = 2\,s$

c) $L = |x(2) - x(0)| + |x(3) - x(2)| = 8\,m$

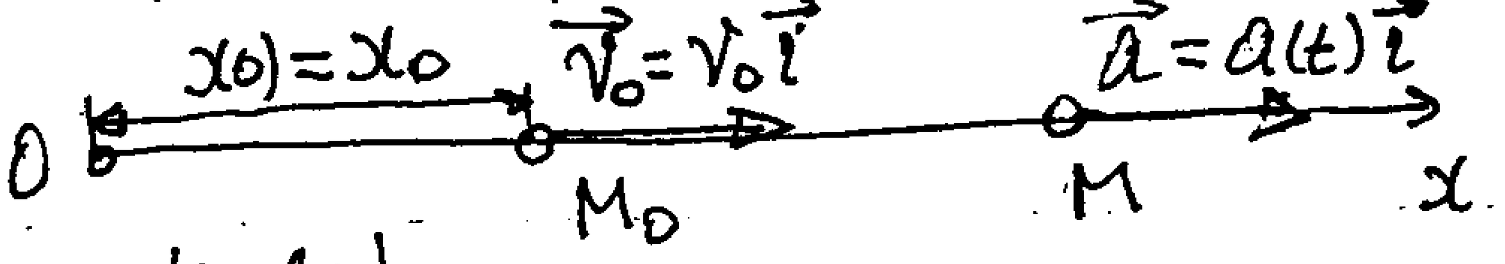
d) Ako je $va > 0$ (v i a istog znaka) kretanje je ubrzano, a ako je $va < 0$ (v i a različitog znaka) – usporeno.

Slijedi, u intervalima vremena (0,1) i (2,3) kretanje je ubrzano (povećava se intenzitet brzine), a usporeno u intervalu (1,2).

Inverzni zadatak

Kada je data konačna jednačina kretanja, kao u prethodnom primjeru, brzina i ubrzanje se određuju njenim diferenciranjem. Takav tip zadataka se zove <u>direktni</u> zadatak. S druge strane, ako je zadato ubrzanje tačke $a(t)$ (ili brzina $v(t)$), onda je za određivanje konačne jednačine kretanja potrebno primijeniti postupak obrnut postupku diferenciranja – integraciju. Ovaj tip zadataka se zove <u>inverzni</u> zadatak.

Neka je poznata promjena ubrzanja tokom vremena, $a=a(t)$; kao i položaj i brzina tačke u početnom trenutku vremena $t_0=0$: $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$ (tzv. početni uslovi).



Pošto je $a=\frac{dv}{dt}$, odnosno $dv=a(t)dt$, biće

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a(t)dt \,,$$

odnosno

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt \qquad (2)$$

što predstavlja zakon promjene brzine.

U sledećem koraku je potrebno izvršiti integraciju izraza za brzinu, jer je $v=\frac{dx}{dt}$, odnosno $dx = v(t)\,dt$;

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v(t)\,dt \,,$$

tj.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt \qquad (3)$$

~~što predstavlja konačnu jednačinu kretanja~~

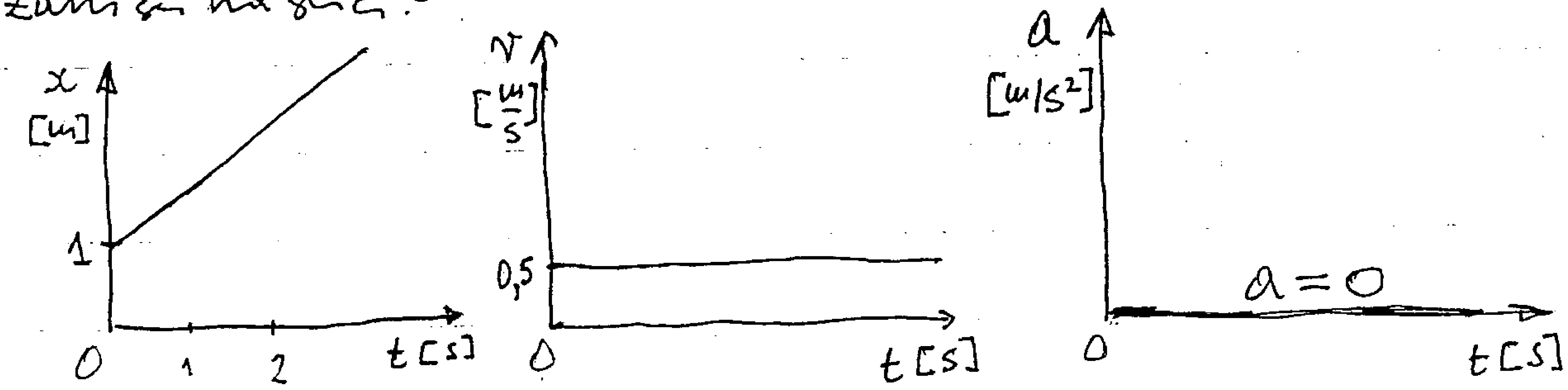
Specijalni slučajevi pravolinijskog kretanja

a) Jednoliko (ravnomjerno) kretanje ($v(t)=const=v_0 \Leftrightarrow a(t)\equiv 0$)

To je kretanje kod koga je brzina nepromjenljiva (konstantna). Na osnovu (3) je

$$x = x_0 + v_0 t \qquad (4)$$

Kinematički dijagrami za ovo kretanje kod je, recimo $x_0=1m$ i $v_0=0,5\,\frac{m}{s}$, prikazani na slici.



Za jednoliko kretanje važi da tačka u jednakim vremenskim intervalima prelazi jednaka rastojanja (provjeriti!)

Jednakopromjenljivo kretanje ($a(t)=a=const$)

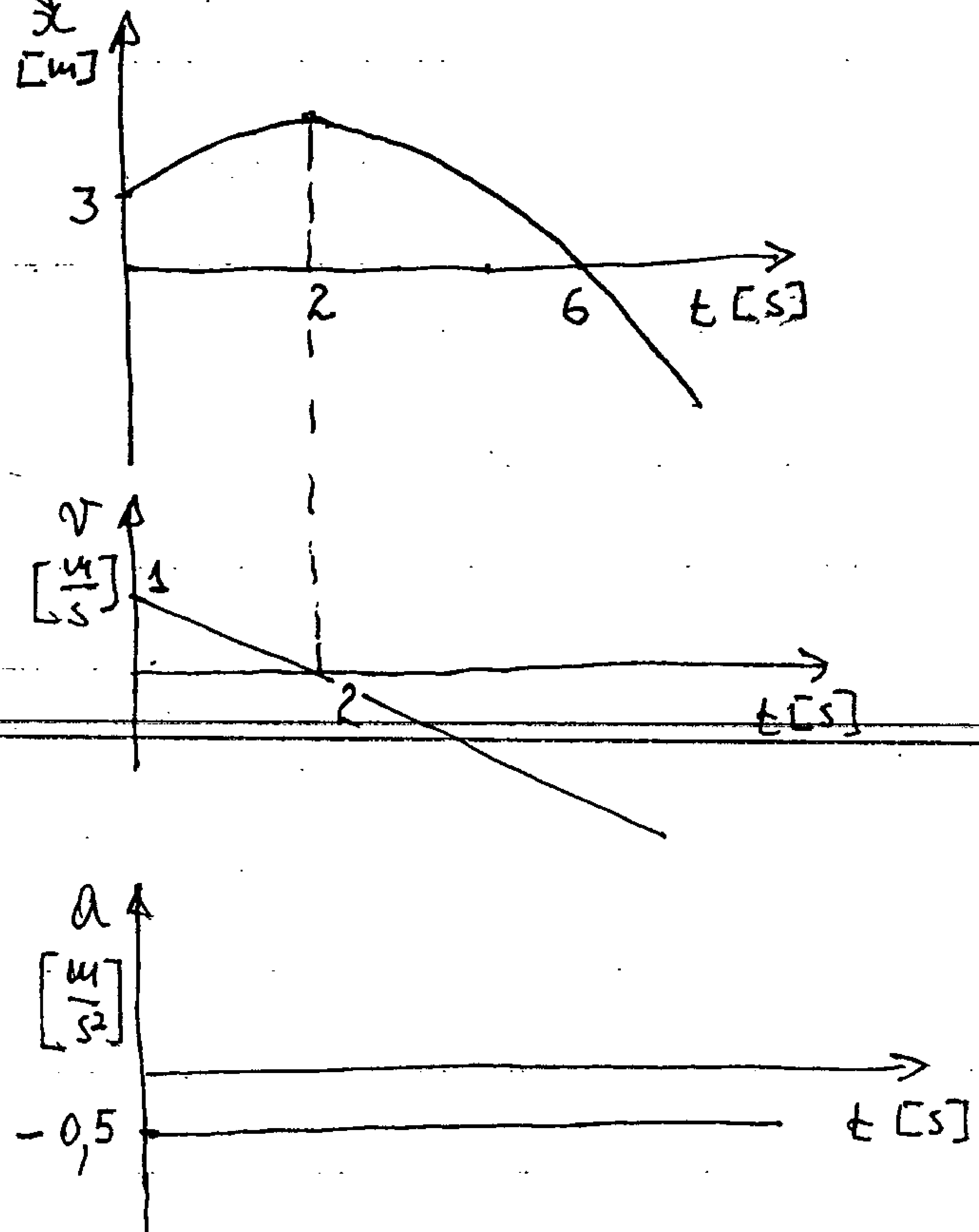
To je kretanje koje se vrši sa konstantnim ubrzanjem. Na osnovu (2) i (3) dobijaja se zakon promjene brzine

$$v=v_0+at, \qquad (.5)$$

i konačna jednačina kretanja

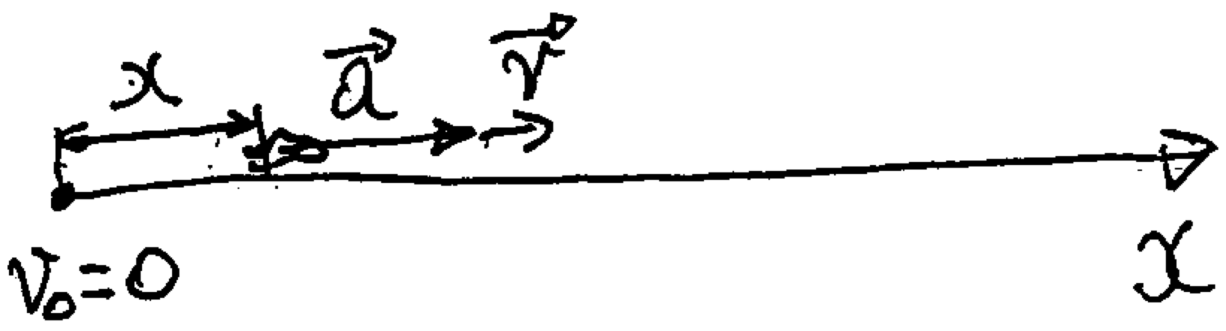
$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2. \qquad (.6)$$

Za ovo kretanje važi da brzina tačke u jednakim vremenskim intervalima ima jednake priraštaje ($\Delta v=v(t_2)-v(t_1)=a\cdot(t_2-t_1)$).
Naglasimo da na intervalima vremena na kojima su v i a istog znaka, kretanje je ubrzano, a u suprotnom – usporeno.
Na slici su dati kinematički dijagrami jednakopromjenljivog kretanja za slučaj kada je $x_0=3\,m$, $v_0=1\,m/s$, $a=-0{,}5\,m/s^2$.



Na intervalu vremena (0,2) kretanje je usporeno, a ubrzano na intervalu $(2,\infty)$.

Primjer 9. Automobil se kreće pravolinijski konstantnim ubrzanjem $a = 2\ m/s^2$. Ako je početna brzina vozila jednaka nuli, koliko vremena je potrebno da automobil pređe prvi metar puta, a koliko za deseti metar puta? Kolika je brzina automobila na kraju desetog metra puta?



U pitanju je jednakopromjenljivo kretanje za koje važi

$$\left.\begin{aligned} v &= \cancel{v_0}^{\,0} + at \\ x &= \cancel{x_0}^{\,0} + \cancel{v_0}^{\,0} t + a\frac{t^2}{2} \end{aligned}\right\} (*)$$

Neka su t_1, t_9, t_{10} - trenuci u kojima se automobil nalazi na kraju prvog, devetog i desetog metra puta. Tada je $t_1 - 0 = t_1$ vrijeme za koje automobil pređe prvi metar puta, a $t_{10} - t_9 = \Delta_{10}$ vrijeme potrebno ~~za~~ za prelazak desetog metra puta.

$$x(t_1) = a\frac{t_1^2}{2}, \quad x(t_9) = a\frac{t_9^2}{2}, \quad x(t_{10}) = a\frac{t_{10}^2}{2}$$

$$x(t_1) = 1m, \quad x(t_9) = 9m, \quad x(t_{10}) = 10m$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2x(t_1)}{a}} = 1s}$$

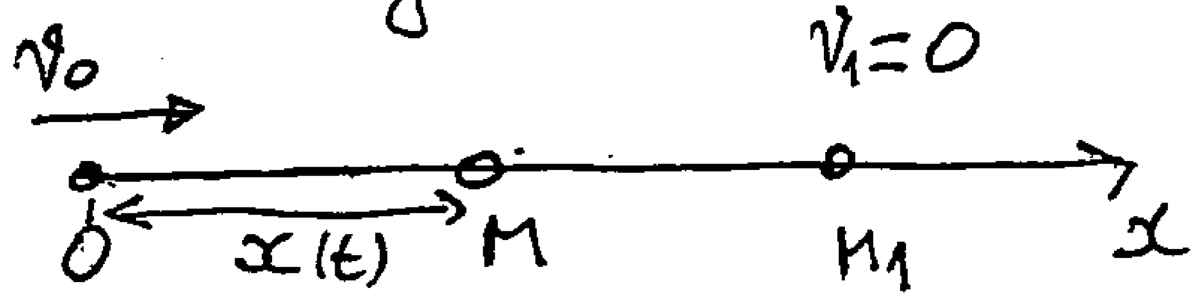
$$t_9 = \sqrt{\frac{2x(t_9)}{a}} = 3s; \quad t_{10} = \sqrt{\frac{2x(t_{10})}{a}} = \sqrt{10} = 3{,}162s$$

$$\boxed{\Delta_{10} = t_{10} - t_9 = 0{,}162\ s}$$

$$\boxed{v_{10} = v(t_{10}) = a \cdot t_{10} = 6{,}324\ \frac{m}{s}} \left(= 22{,}77\ \frac{km}{h}\right)$$

N. Ako iz (*) eliminišemo vrijeme t dobijamo $v = \sqrt{2ax}$ pa je, takođe, $v_{10} = \sqrt{2a\,x(t_{10})} = 6{,}324\ \frac{m}{s}$

Primjer 10. Voz, koji se kretao brzinom od $60\,\frac{km}{h}$, zaustavio se poslije 2 minuta od početka kočenja. Smatrajući da se voz za vrijeme kočenja kretao jednakousporeno, odrediti put kočenja.



Kretanje voza tokom kočenja posmatramo kao jednakopromjenljivo pravolinijsko kretanje tačke za koje važi:

$$v = v_0 + at,$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

gdje je $x_0 = 0$ ako uzmemo da x mjerimo od mjesta odakle počinje kočenje i $v_0 = 60\,\frac{km}{h} = 16{,}67\,\frac{m}{s}$.

Voz se zaustavlja u trenutku $t_1 = 2\,min = 120\,s$ (vrijeme mjerimo od početka kočenja) pa je $v(t_1) = 0$, tj

$$v_0 + a t_1 = 0,$$

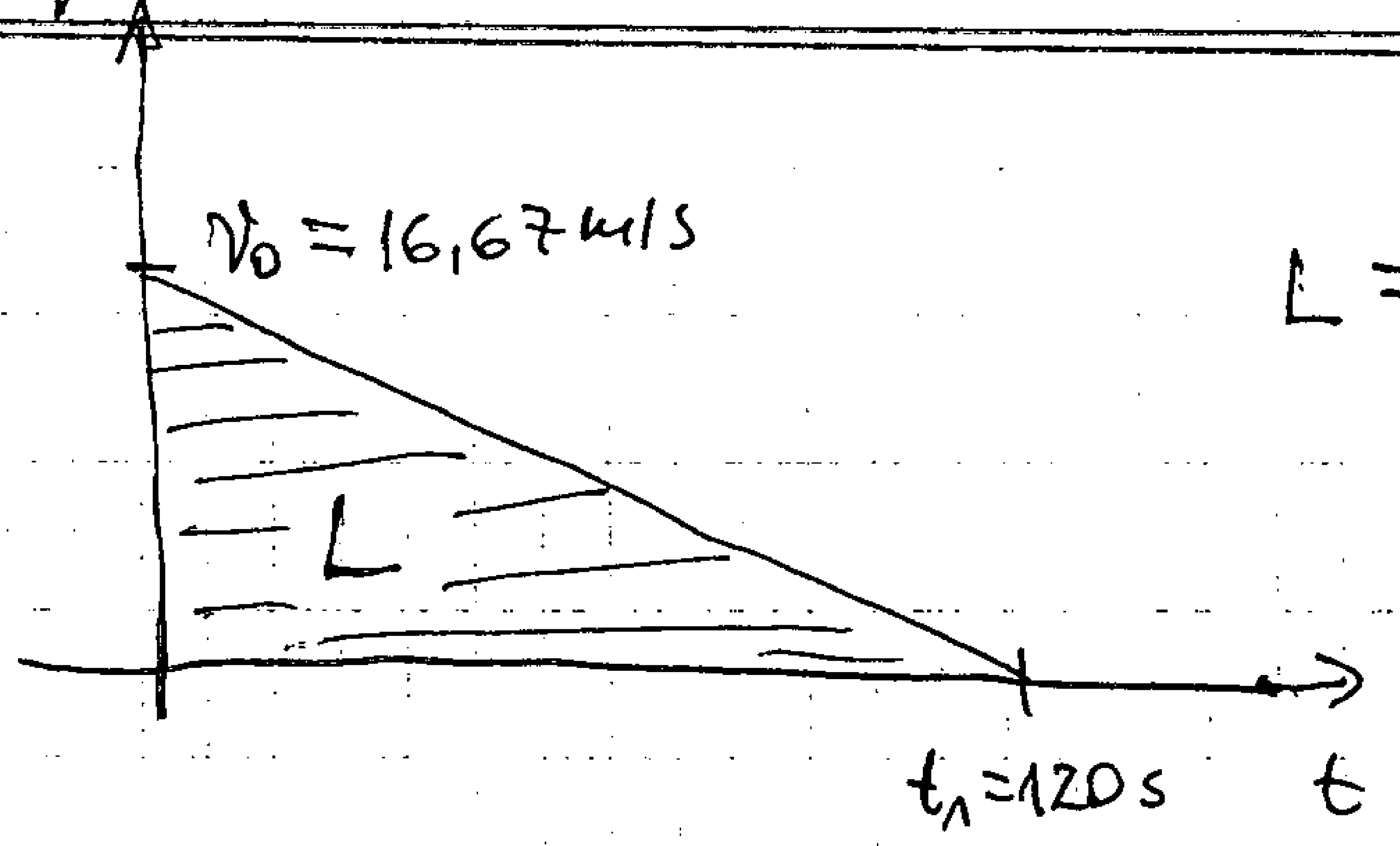
odakle nalazimo ubrzanje

$$a = -\frac{v_0}{t_1} = -0{,}139\,\frac{m}{s^2}$$

Pošto je $x_0 = 0$ i tokom kočenja ne dolazi do promjene smjera kretanja, put kočenja je

$$L = x(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = 16{,}67 \cdot 120 - \frac{1}{2} 0{,}139 \cdot 120^2 = 999{,}6\,m \approx 1000\,m$$

Ili, znajući da se kod jednakopromjenljivog kretanja brzina linearno mijenja sa vremenom, na osnovu grafika promjene brzine određujemo pređeni put kao površinu šrafiranog trougla.



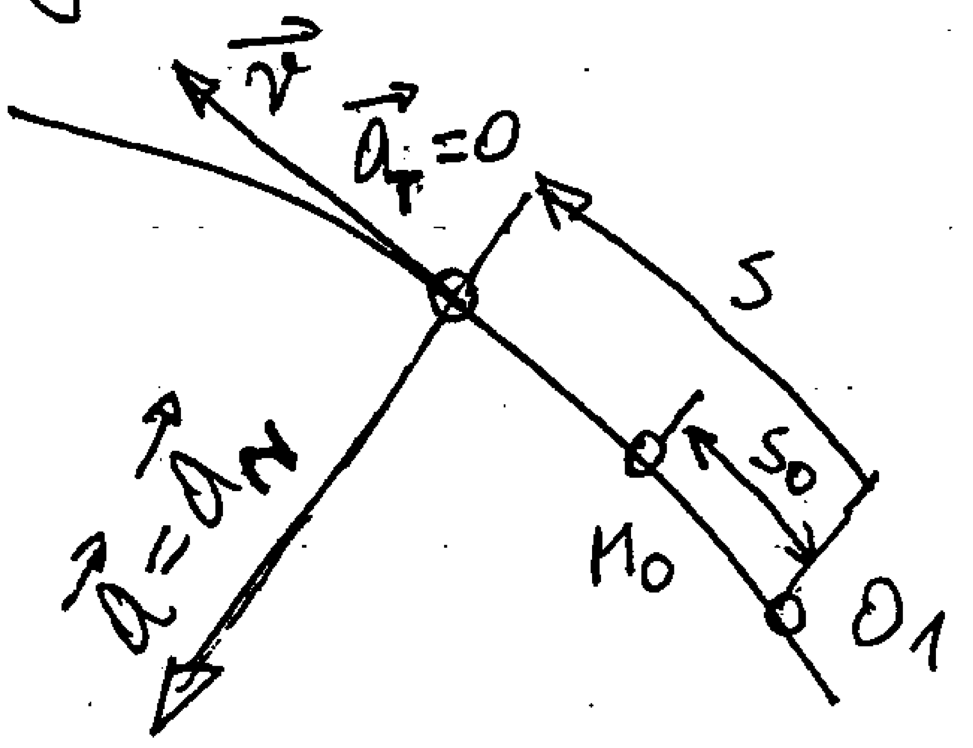
$$L = \frac{v_0 \cdot t_1}{2} \approx 1000\,m$$

4.2 Jednoliko i jednakopromjenljivo krivolinijsko kretanje

a) Jednoliko krivolinijsko kretanje ($v = const = v_0 \Leftrightarrow a_T = 0$)

Iz $s(t) = s_0 + \int^t v(t)\,dt$ (V.2.3) slijedi zakon puta:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t} \qquad (7)$$



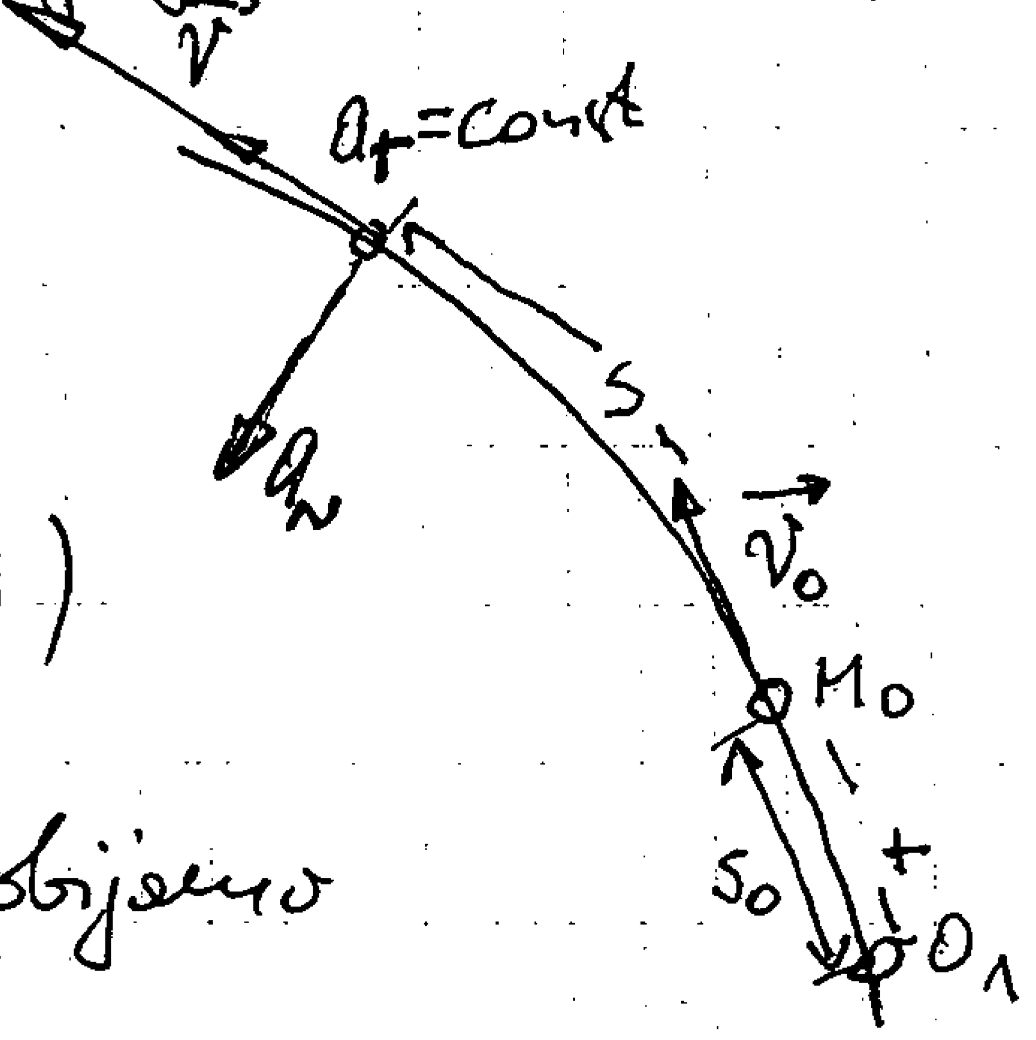
b) Jednakopromjenljivo krivolinijsko kretanje ($a_T = const$)

To je kretanje kod koga je tangencijalno ubrzanje a_T konstantno. Pošto je $v = \frac{ds}{dt}$ i $a_T = \frac{dv}{dt}$, postupajući analogno kao kod jednakopromjenljivog pravolinijskog kretanja, za koje je $a_T = a$ i $s = x$, nalazimo zakon promjene brzine

$$\boxed{v = v_0 + a_T t} \qquad (8)$$

i zakon puta

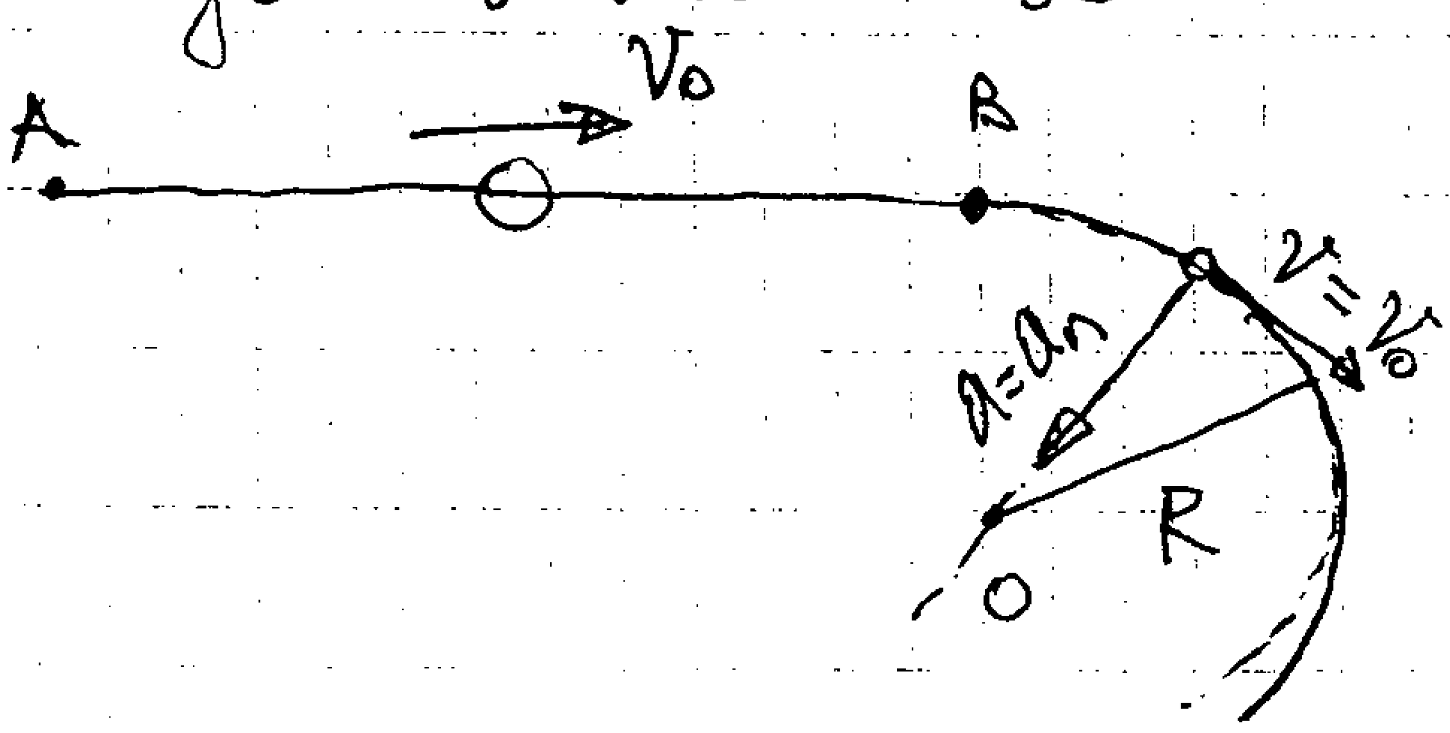
$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2} \qquad (9)$$



Eliminacijom vremena t iz (8) i (9) dobijemo

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a\,(s - s_0)} \qquad (10)$$

Primjer 11. Automobil se kreće duž pravolinijskog dijela puta AB jednoliko brzinom $v_0 = 70$ km/h. U položaju B prelazi na krivolinijski dio puta oblika kružnog luka poluprečnika $R = 1250$ m. Koliko je ubrzanje vozila na krivolinijskom dijelu trajektorije ako se zna da je nastavilo da se kreće bez promjene intenziteta brzine v_0?



$$1\,\frac{km}{h} = \frac{1000\ m}{60 \cdot 60\ s} = 0{,}278\,\frac{m}{s}$$

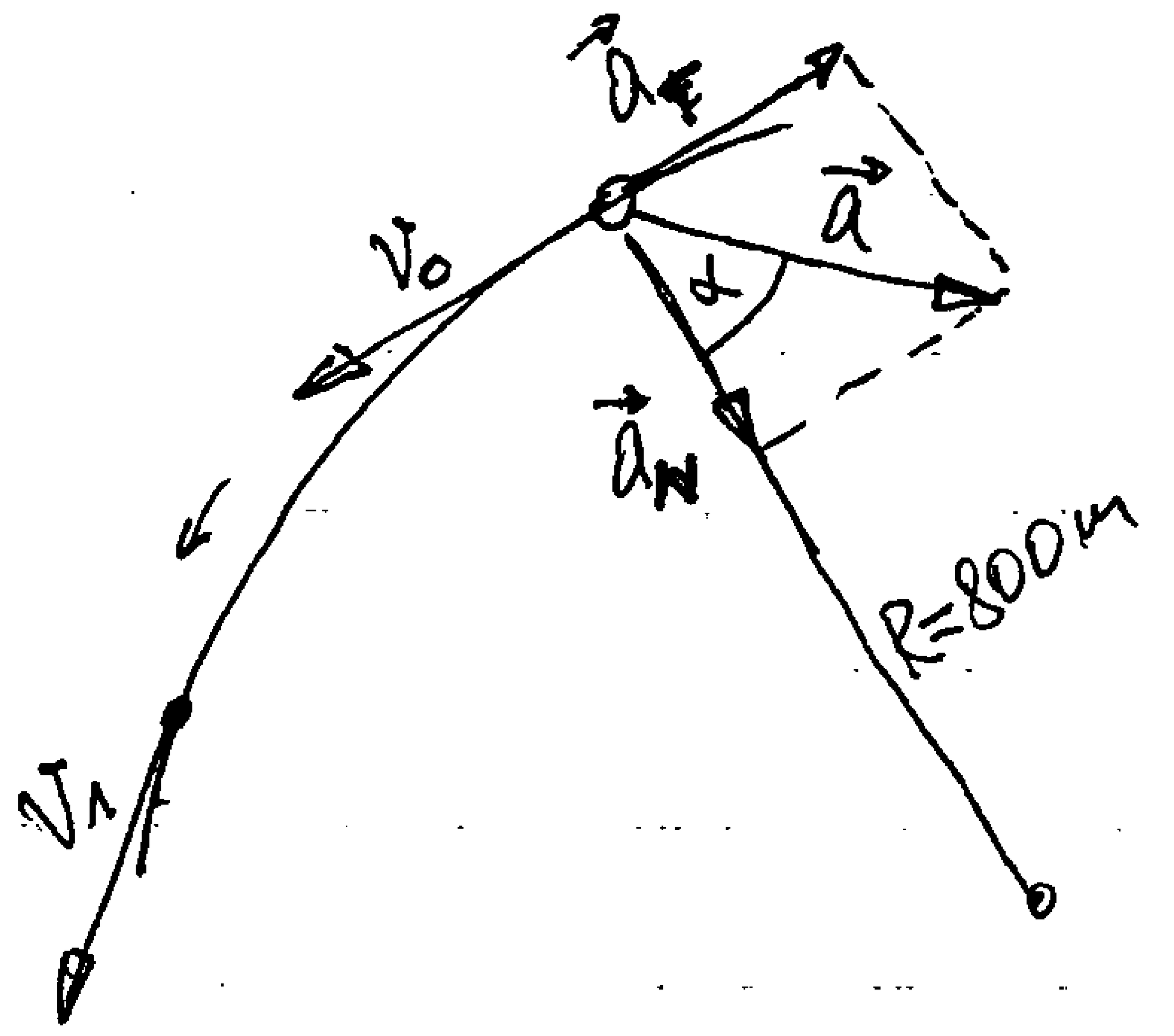
$$v_0 = 19{,}46\,\frac{m}{s}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{jer je } v = const = v_0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{19{,}46^2}{1250} = 0{,}3\,\frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{a = a_N = 0{,}3\,\frac{m}{s^2}}$$

Primjer 12. Automobil se kretao brzinom od $100 \frac{km}{h}$ po kružnom dijelu autoputa radijusa 800 m. Vozač je naglo pritisnuo kočnicu i nakon 8 sekundi brzina se smanjila na $75 \frac{km}{h}$. Odrediti ubrzanje automobila odmah nakon pritiskanja kočnice smatrajući da je za vrijeme kočenja kretanje jednakousporeno.



Uzmimo da je $t_0 = 0$ na početku kočenja.

$$v_0 = 100 \frac{km}{h} = 27{,}78 \frac{m}{s}$$

$$v_1 = v(t_1) = 75 \frac{km}{h} = 20{,}83 \frac{m}{s}; \quad t_1 = 8\,s$$

Iz zakona promjene brzine kod jednakopromjenljivog kretanja

$$v = v_0 + a_t t,$$

dobijamo

$$v_1 = v_0 + a_t t_1,$$

odnosno, nalazimo tangencijalno ubrzanje

$$a_t = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = -0{,}87 \frac{m}{s^2} \quad \text{(usporenje!)}$$

Normalno ubrzanje na početku kočenja je

$$a_N = \frac{v_0^2}{R} = 0{,}96 \frac{m}{s^2}$$

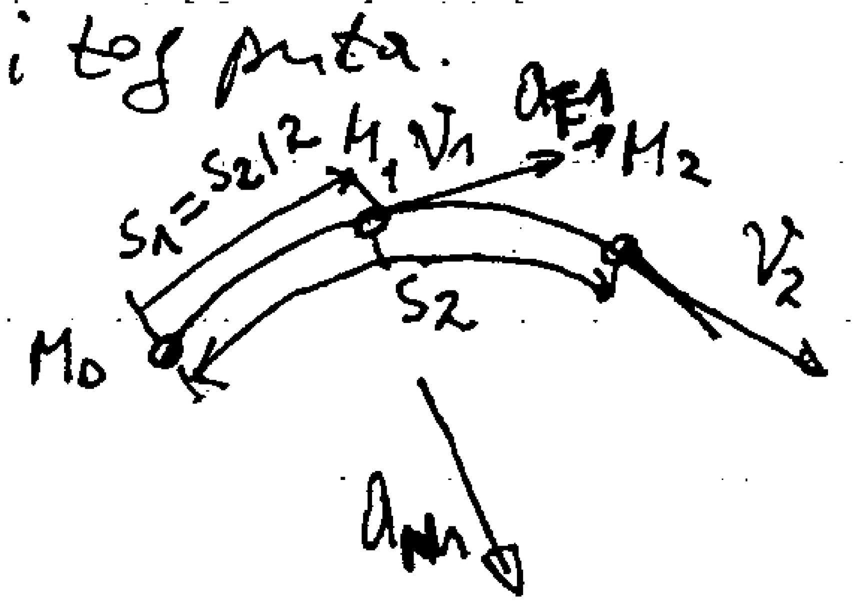
Intezitet ubrzanja je

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_t^2 + a_N^2} = 1{,}3 \frac{m}{s^2},$$

a pravac mu je određen uglom

$$\alpha = \arctan \frac{|a_t|}{a_N} = 42{,}2^\circ$$

Primjer 13. Kamion počinje da se kreće jednakoubrzano po kružnoj krivini poluprečnika $R = 800\,m$ i kada pređe put dužine 60 m dostigne brzinu od 36 km/h. Odrediti intezitete brzine i ubrzanja kamiona na sredini tog puta.



$v_0 = 0$, za $s = s_2 = 60\,m$ je $v = v_2 = 36 \frac{km}{h} = 10 \frac{m}{s}$

za $s = s_1$, $v = v_1$? $a = a_1 = ?$

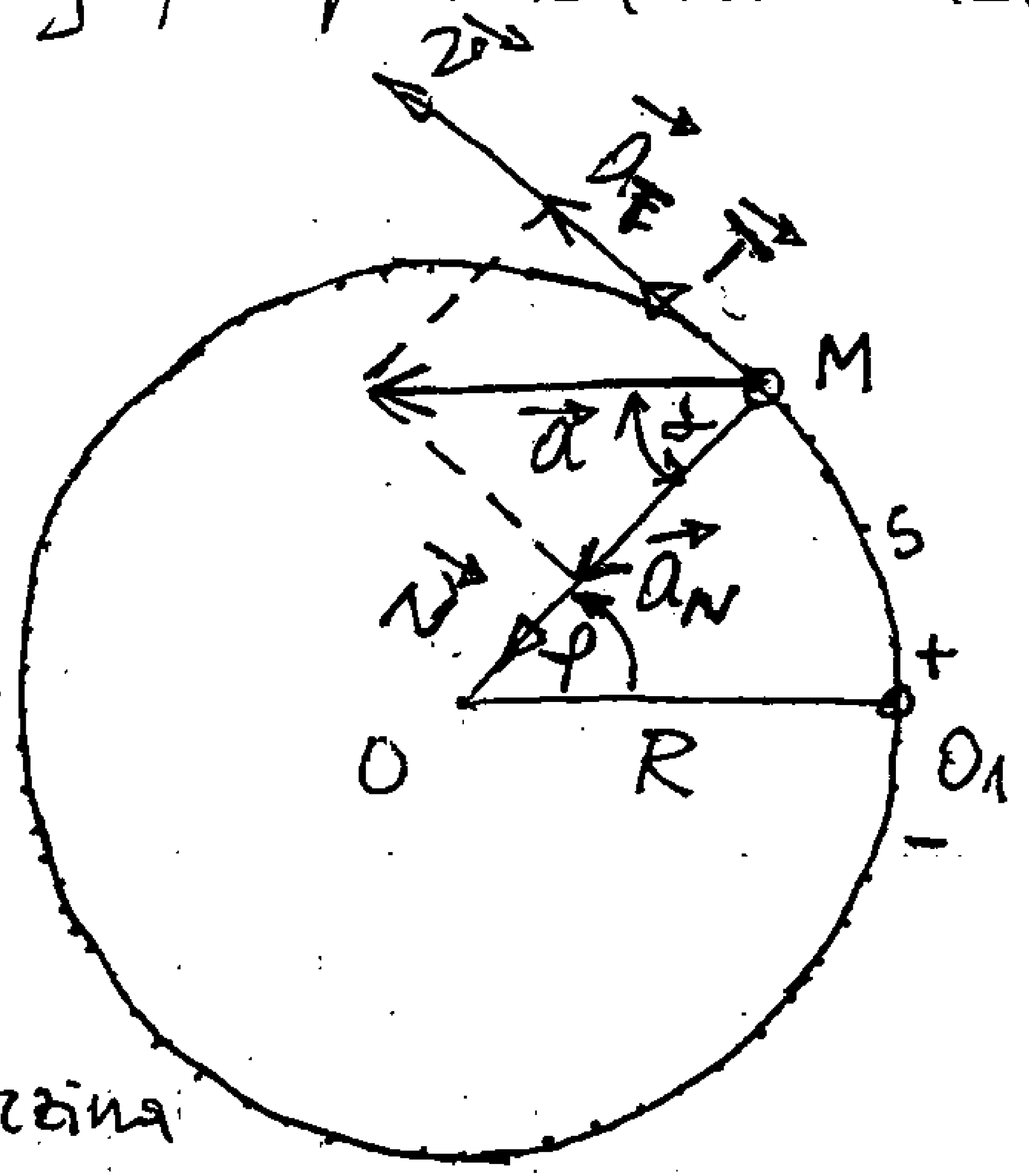
$$\text{Iz } (10) \xrightarrow{v_0 = 0,\ s_0 = 0} v^2 = 2 a_t s \rightarrow a_t = \frac{v_2^2}{2 s_2} = 0{,}83 \frac{m}{s^2}$$

$$v_1 = \sqrt{2 a_t s_1} \overset{s_1 = s_2/2}{=\!=} \boxed{7{,}06 \frac{m}{s}}$$

$$a_{N1} = \frac{v_1^2}{R} = 0{,}06 \frac{m}{s^2}; \quad a_{t1} = a_t = \text{const}, \quad a_1 = \sqrt{a_{N1}^2 + a_{t1}^2} \approx \boxed{0{,}832 \frac{m}{s^2}}$$

4.3 Kružno kretanje tačke

Neka se tačka M kreće po kružnoj putanji poluprečnika R. Proučimo to kretanje koristeći prirodni postupak.



Položaj tačke na putanji određen je lučnom koordinatom s koja se može izraziti pomoću centralnog ugla φ:

$$s = R\varphi$$

Ako je poznat zakon promjene ugla φ:

$$\varphi = \varphi(t)$$

znamo i zakon puta $s = s(t)$ pa je

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi} \text{ – algebarska brzina}$$

$$a_T = \dot{v} = \ddot{s} = R\ddot{\varphi} \text{ – tangencijalno ubrzanje;}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R_k} = R\dot{\varphi}^2 \text{ – normalno ubrzanje}$$

[N. Za kružnicu je $R_k = const = R$]

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = R\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}, \quad \tan\alpha = \frac{a_T}{a_N} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2}$$

Veličina $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ karakteriše promjenu ugla koji prava OM zaklapa sa nepokretnim pravcem OO_1 i zove se ugaona brzina, a veličina $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – ugaono ubrzanje.

Jednoliko (ravnomjerno) kružno kretanje biće u slučaju kad je $v = const$, što znači da mora biti $\dot{\varphi} = \omega = const$. Tada je $a_T = 0$, a $a_N = R\omega^2$ pa vektor ubrzanja $\vec{a}$ ima pravac radijusa OM a smjer prema centru kružnice O ($\vec{a} = -\omega^2\vec{OM} = \omega^2\vec{MO}$). Pri ovom kretanju ugao φ se mijenja po zakonu

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \varphi_0 = \varphi(0)$$

Vrijeme obilaska punog kruga T dobija se iz uslova $\varphi(T) = 2\pi + \varphi_0$, što daje $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ova veličina zove se period obrtanja, a ω – kružna frekvencija, dok je $f = \frac{1}{T}$ – frekvencija (broj obrtaja u jednoj sekundi).