II Kinematika krutog tijela

Tijelo je kruto ako je rastojanje između ma koje dvije njegove tačke nepromjenljivo (konstantno) tokom kretanja.

Pod položajem krutog tijela u prostoru podrazumijeva se položaj svih tačaka tijela u odnosu na utvrđeni sistem referencije. Da bi se odredio položaj svih tačaka tijela, zbog nepromjenljivosti njihovih međusobnih rastojanja, tj. nepromjenljivosti geometrijskog oblika tijela, dovoljno je pomoću izvjesnih geometrijskih parametara (koordinata) odrediti položaj tijela kao cjeline.

Broj nezavisnih parametara koji jednoznačno određuju položaj tijela u prostoru zove se broj stepena slobode datog tijela, a ti parametri se zovu generalisane koordinate tijela.

Napomenimo, da se na isti način definiše i broj stepena slobode tačke. Tako, npr., slobodna tačka u prostoru (tačka koja može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru) ima tri stepena slobode jer je njen položaj određen sa tri nezavisna parametra – tri Dekartove koordinate.

U kinematici krutog tijela rješavaju se dva osnovna zadatka:

1) Definisanje položaja krutog tijela u odnosu na izabrani sistem referencije;

2) Određivanje kinematičkih karakteristika krutog tijela kao cjeline i svake tačke tijela posebno.

Dalje ćemo razmatrati sledeće vrste kretanja krutog tijela:

a) Translatorno kretanje;

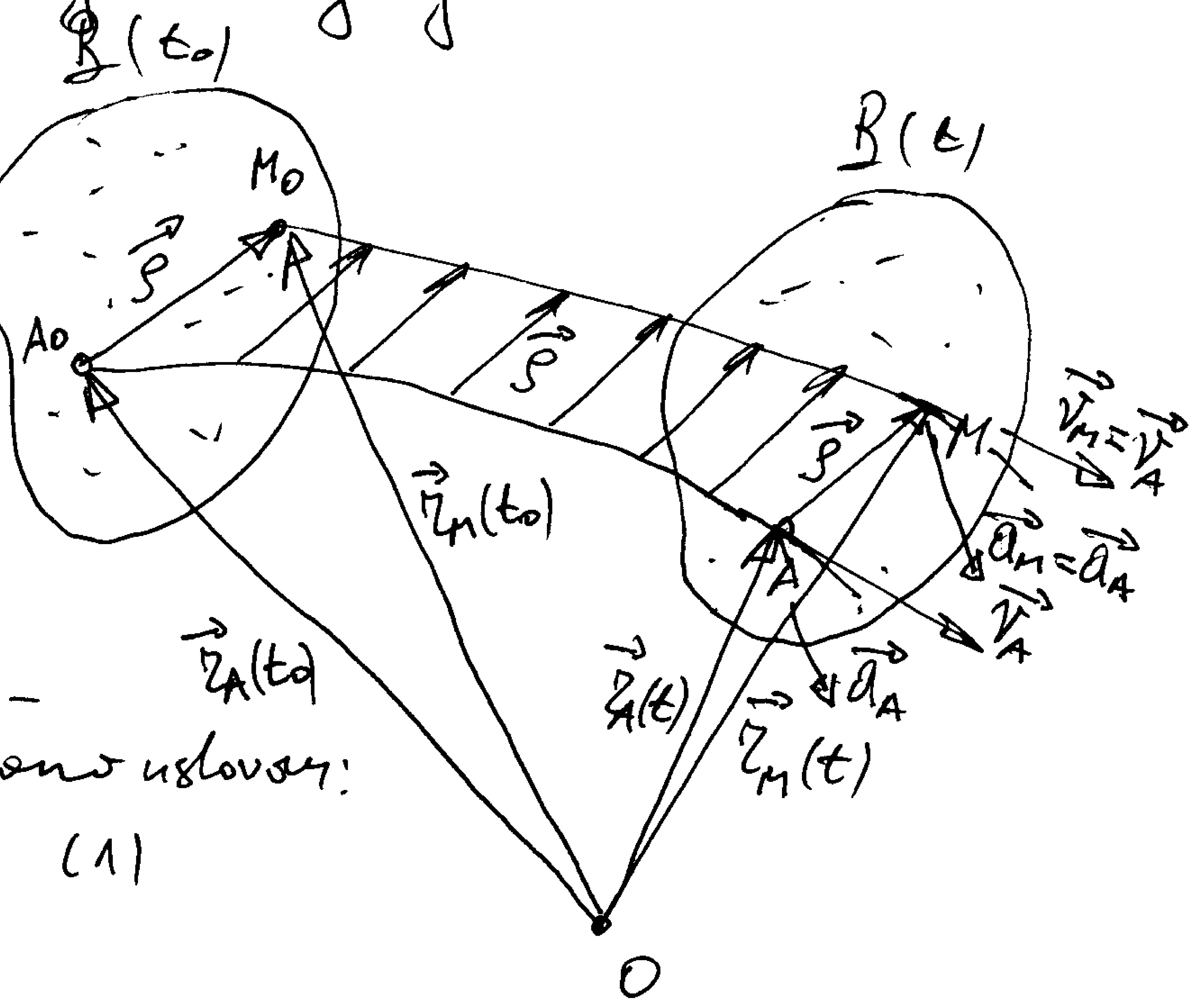
b) Obrtanje oko nepokretne ose;

c) Ravansko kretanje krutog tijela;

d) sferno kretanje;

e) opšte kretanje.

1. Translatorno kretanje krutog tijela



Translatorno kretanje krutog tijela je takvo kretanje pri kome bilo koja duž uočena u tijelu ostaje paralelna sama sebi tokom čitavog kretanja.

Posmatrajmo pokretno tijelo $\mathcal{B}$ u početnom $t_0 = 0$ i proizvoljnom trenutku t i uočimo u tijelu dvije proizvoljne tačke A i M. Translatorno kretanje je okarakterisano uslovom:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0} = \vec{\rho} = \overrightarrow{const} \qquad (1)$$

Pošto je

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}, \quad \vec{\rho} = const \qquad (2)$$

to se putanja tačke M dobija tako što se svaka tačka putanje tačke A pomjeri za konstantni vektor $\vec{\rho} = \overrightarrow{A_0M_0}$. Znači, putanje svih tačaka tijela su podudarne (kongruentne) linije, a prema obliku tih putanja razlikujemo pravolinijsku i krivolinijsku translaciju.

Diferencirajući lijevu i desnu stranu relacije (2) po vremenu, dobijamo

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt},$$

odnosno

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_A} \qquad (3)$$

jer je $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$ ($\vec{\rho} = \overrightarrow{const}$).

Takođe, iz (3) slijedi $\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}$, odnosno

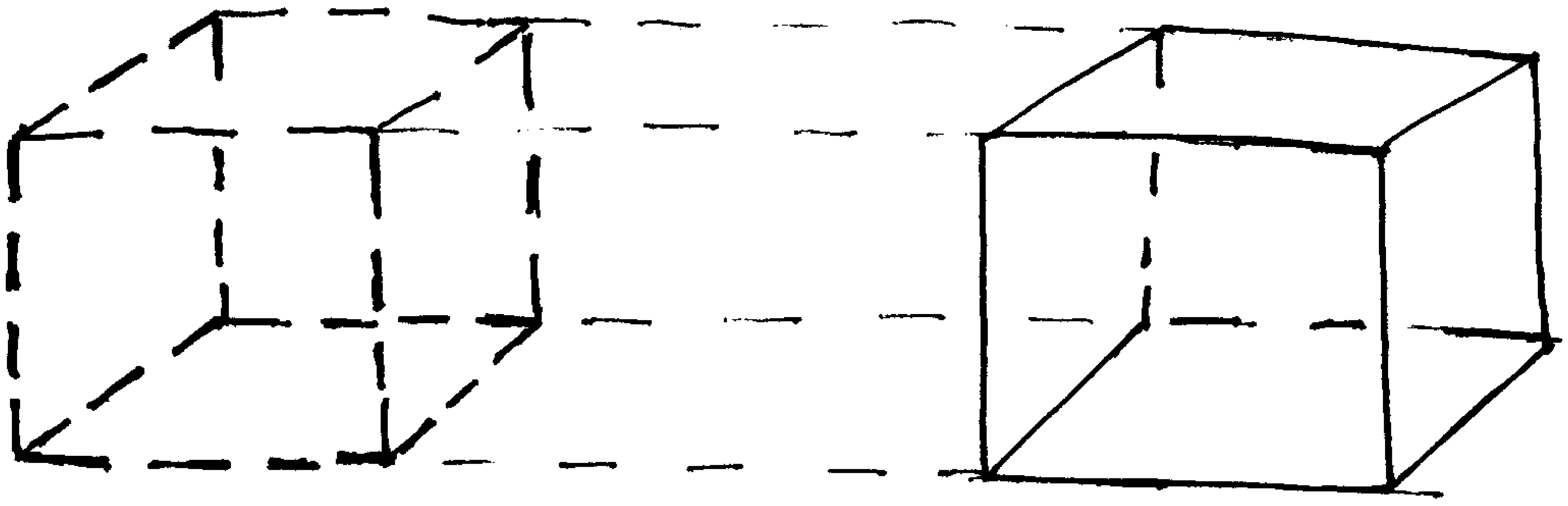
$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A} \qquad (4)$$

Prema tome, pri translatornom kretanju krutog tijela sve tačke tijela se kreću na istovjetan način, tj. imaju podudarne putanje i jednake vektore brzine i ubrzanja. To znači da je translatorno kretanje krutog tijela potpuno određeno kretanjem samo jedne njegove tačke, recimo tačke A, pa konačne jednačine kretanja te tačke

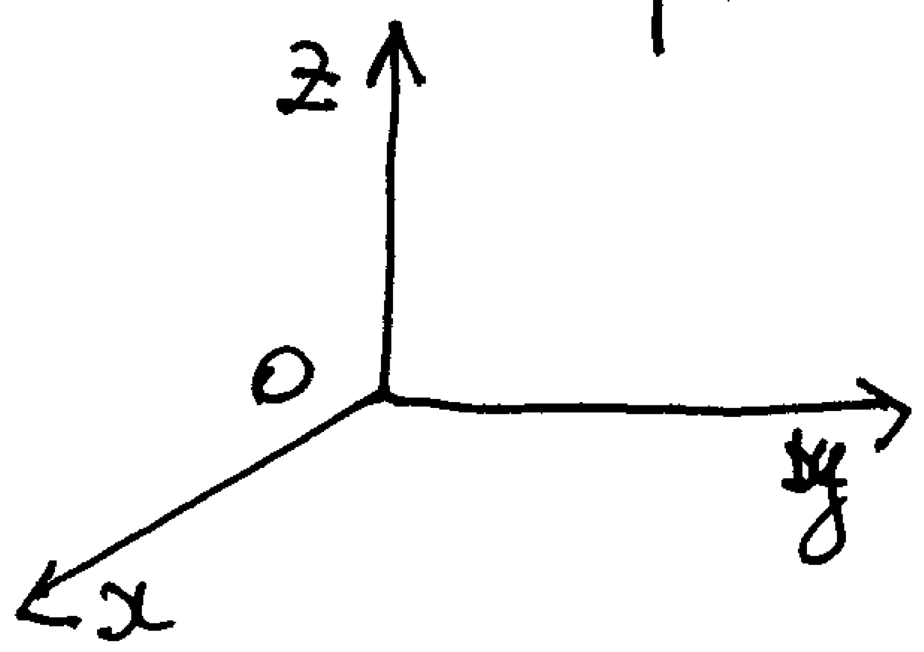
$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad z_A = z_A(t) \qquad (5)$$

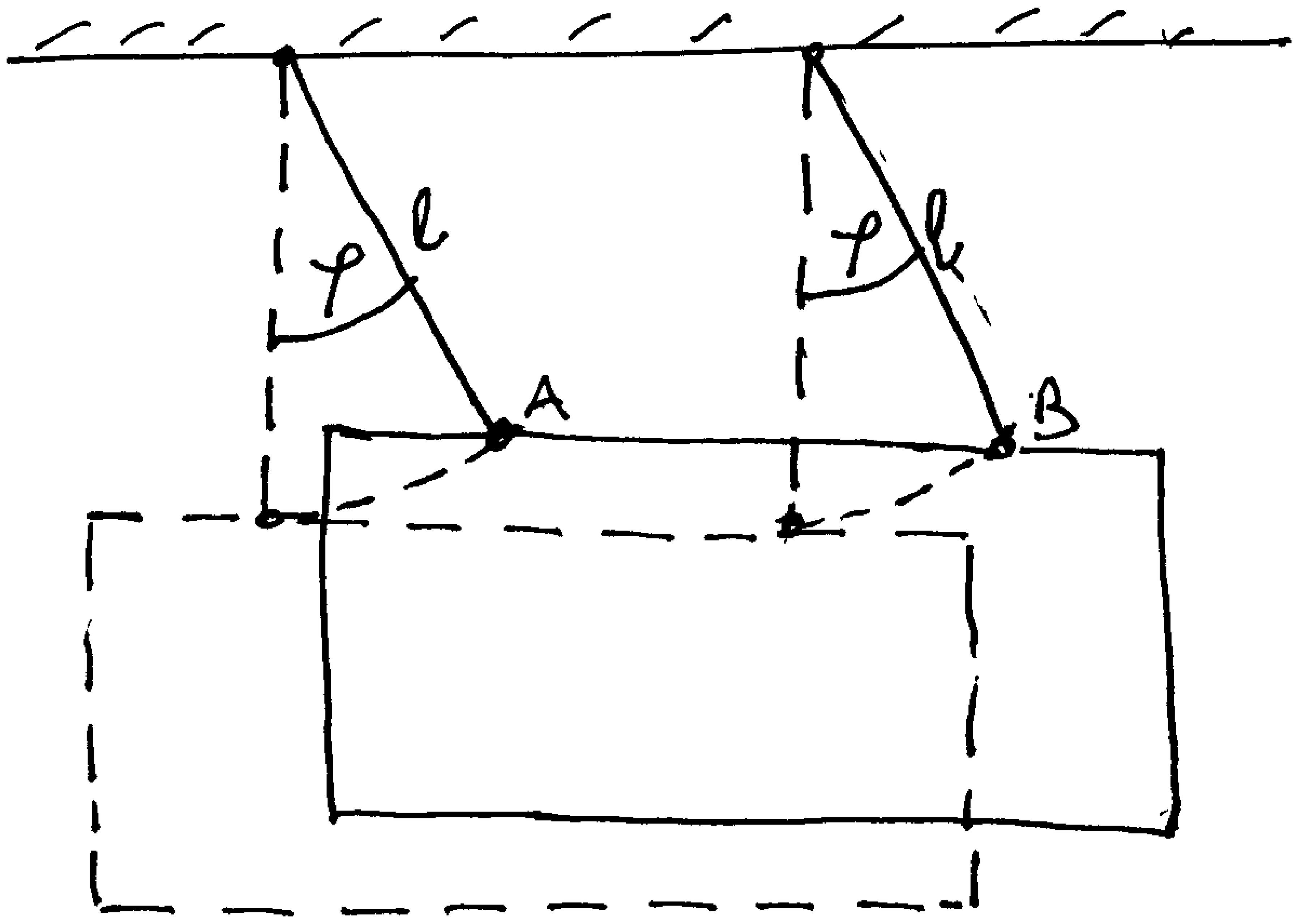
su istovremeno i konačne jednačine (zakon kretanja) kretanja datog tijela. Tijelo koje ~~samo~~ može da se kreće translatorno slobodno u prostoru ima tri stepena slobode.

Pošto kod translatornog kretanja sve tačke tijela imaju jednake brzine i jednaka ubrzanja, može se govoriti o brzini i ubrzanju tijela.



pravolinijska translacija

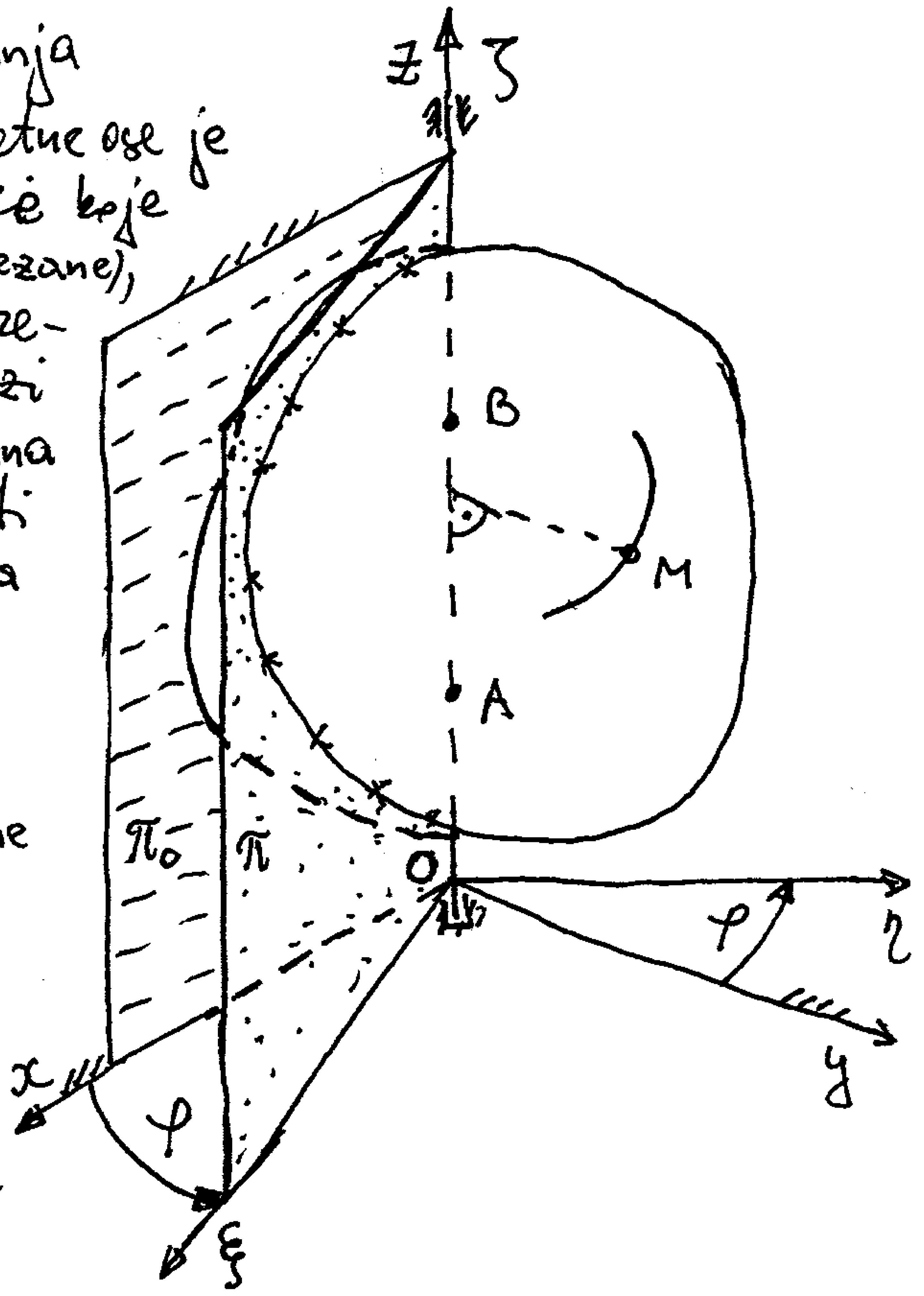




krivolinijska translacija

2. Obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose

2.1 Konačna jednačina obrtanja



Obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose je takvo kretanje pri kome dvije tačke koje pripadaju tijelu (ili su sa njim čvrsto vezane), recimo A i B, ostaju za vrijeme kretanja nepokretne. Prava koja prolazi kroz nepokretne tačke A i B zove se obrtna osa (osa rotacije). Zbog nepromjenljivosti rastojanja između tačaka krutog tijela očigledno je da će pri ovom kretanju:

- sve tačke koje pripadaju obrtnoj osi biti nepokretne;
- sve ostale tačke tijela imaće kružne putanje u ravnima upravnim na osu obrtanja i čiji centri leže na toj osi.

Pri ovom kretanju položaj tijela u svakom trenutku je određen ako se zna ugao φ između dvije ravni, koje prolaze kroz obrtnu osu, od kojih je jedna π čvrsto vezana za tijelo a druga π_0 nepokretna u prostoru. Da bismo utvrdili orjentaciju ugla φ usvajamo nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ (Oz – osa rotacije, koordinatna ravan Oxz se poklapa sa ravni π_0) i pokretni $O\xi\eta\zeta$ čvrsto vezan za tijelo ($O\zeta \equiv Oz$, koordinatna ravan $O\xi\zeta$ se poklapa sa ravni π). Ugao φ smatramo pozitivnim ako on raste u smjeru suprotnom od smjera obrtanja kazaljke na satu, gledano sa vrha ose Oz, odnosno $O\zeta$.

Prema tome, položaj krutog tijela pri obrtanju oko nepokretne ose određen je jednim nezavisnim parametrom (koji predstavlja takozvanu generalisanu koordinatu tijela) – uglom obrtanja φ. Kaže se da u ovom slučaju tijelo ima jedan stepen slobode, tj. može da vrši samo jedno nezavisno kretanje.

Zadata zavisnost ugla obrtanja φ u funkciji vremena,

$$\varphi = \varphi(t) \tag{1}$$

predstavlja zakon obrtanja, odnosno konačnu jednačinu obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose.

Sve kinematičke karakteristike obrtanja tijela oko ose se izračunavaju pomoću zakona obrtanja, a one se dijele na:

- globalne, koje su iste za sve tačke tijela;
- lokalne, koje zavise od položaja tačke u tijelu.

2.2 Globalne karakteristike obrtanja tijela (ugaona brzina i ugaono ubrzanje)

Neka je $\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$ priraštaj ugla obrtanja tijela za konačan vremenski interval Δt. Srednja ugaona brzina tijela se definiše kao

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (1)$$

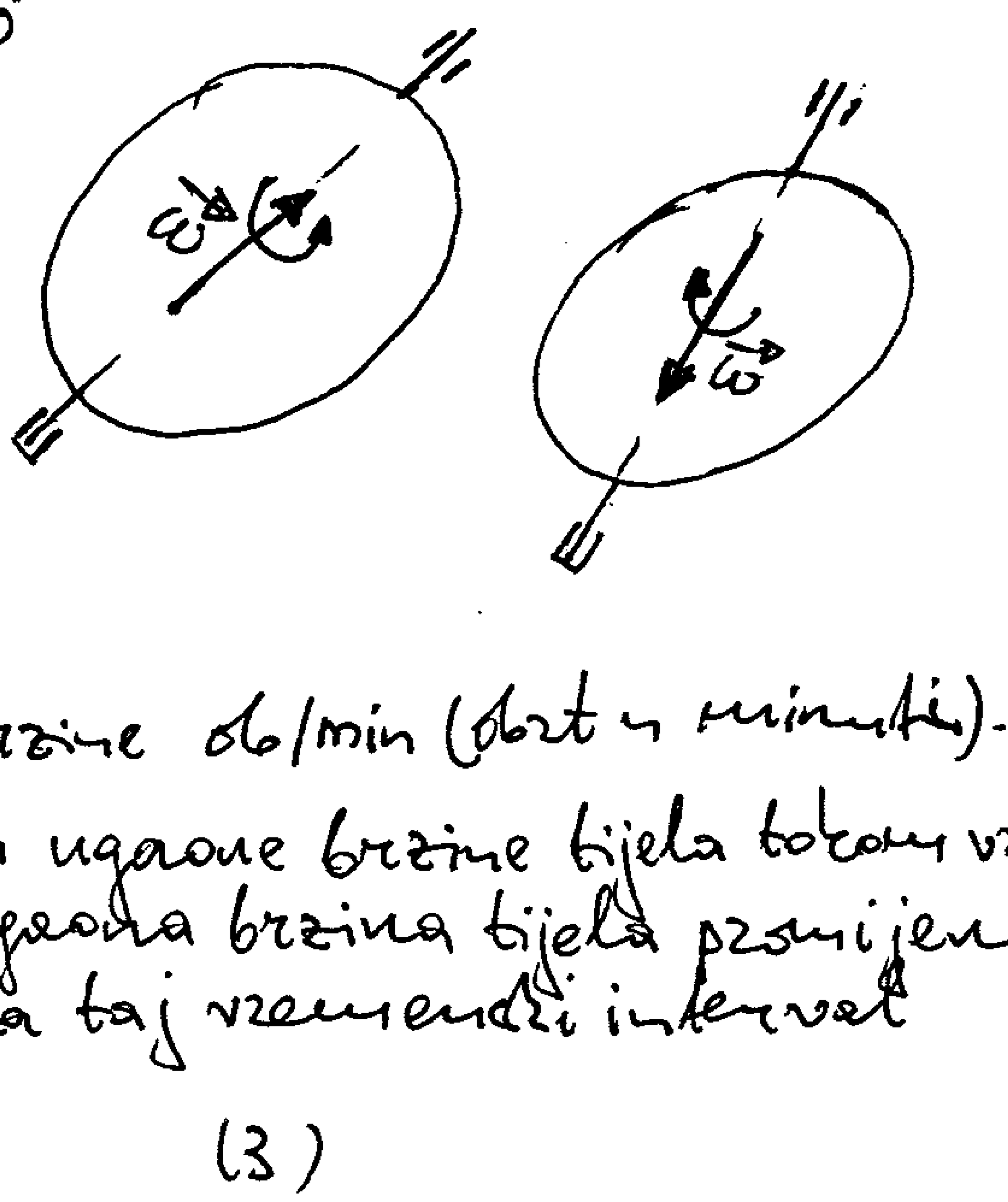
i ima dimenziju $[\omega] = [rad/s] = [s^{-1}]$, jer je radijan bezdimenziona mjera ugla.

Trenutna ugaona brzina tijela ω (ili samo ugaona brzina) je granična vrijednost srednje ugaone brzine kada priraštaj vremena teži ka nuli, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad (2)$$

ili, drugim riječima, ugaona brzina ω krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose brojčano je jednaka prvom izvodu ugla obrtanja po vremenu. Iz (2) se vidi da je veličina ω takođe jednaka odnosu elementarnog ugla obrtanja $d\varphi$ i infinitezimalnog vremenskog intervala dt. Znakom veličine ω određen je smjer obrtanja tijela. Ako je $\omega > 0$, priraštaj ugla obrtanja, gledano sa vrha ose Oz, je pozitivan (pozitivno obrtanje), a ako je $\omega < 0$ priraštaj ugla obrtanja je negativan (negativno obrtanje).

Najpogodnije je, kao cjelokupnu karakteristiku obrtanja tijela, uvesti vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$: to je vektor čiji je intenzitet jednak intenzitetu ugaone brzine ($|\omega| = |\dot{\varphi}|$), pravac mu se poklapa sa pravcem obrtne ose, a smjer mu je takav da obrtanje gledano sa njegovog vrha ima smjer suprotan smjeru obrtanja kazaljke na satu. Znači, vektorom ugaone brzine $\vec{\omega}$ određeni su u isto vrijeme intenzitet ugaone brzine, obrtna osa i smjer obrtanja.



N. U tehnici se često koristi tehnička ugaona brzina n (tzv. broj obrta u minuti) koja je sa ugaonom brzinom ω vezana relacijom: $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$,

pri čemu je jedinica tehničke ugaone brzine ob/min (obrt u minuti).

Ugaono ubrzanje karakteriše promjenu ugaone brzine tijela tokom vremena. Ako se za vremenski interval Δt ugaona brzina tijela promijeni za $\Delta\omega$, onda se srednje ugaono ubrzanje za taj vremenski interval definiše kao

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (3)$$

i ima dimenziju $[\varepsilon] = [rad/s^2] = [s^{-2}]$.

Trenutno ugaono ubrzanje (ili samo ugaono ubrzanje) tijela je granična vrijednost srednjeg ugaonog ubrzanja kada priraštaj vremena Δt teži nuli, tj.

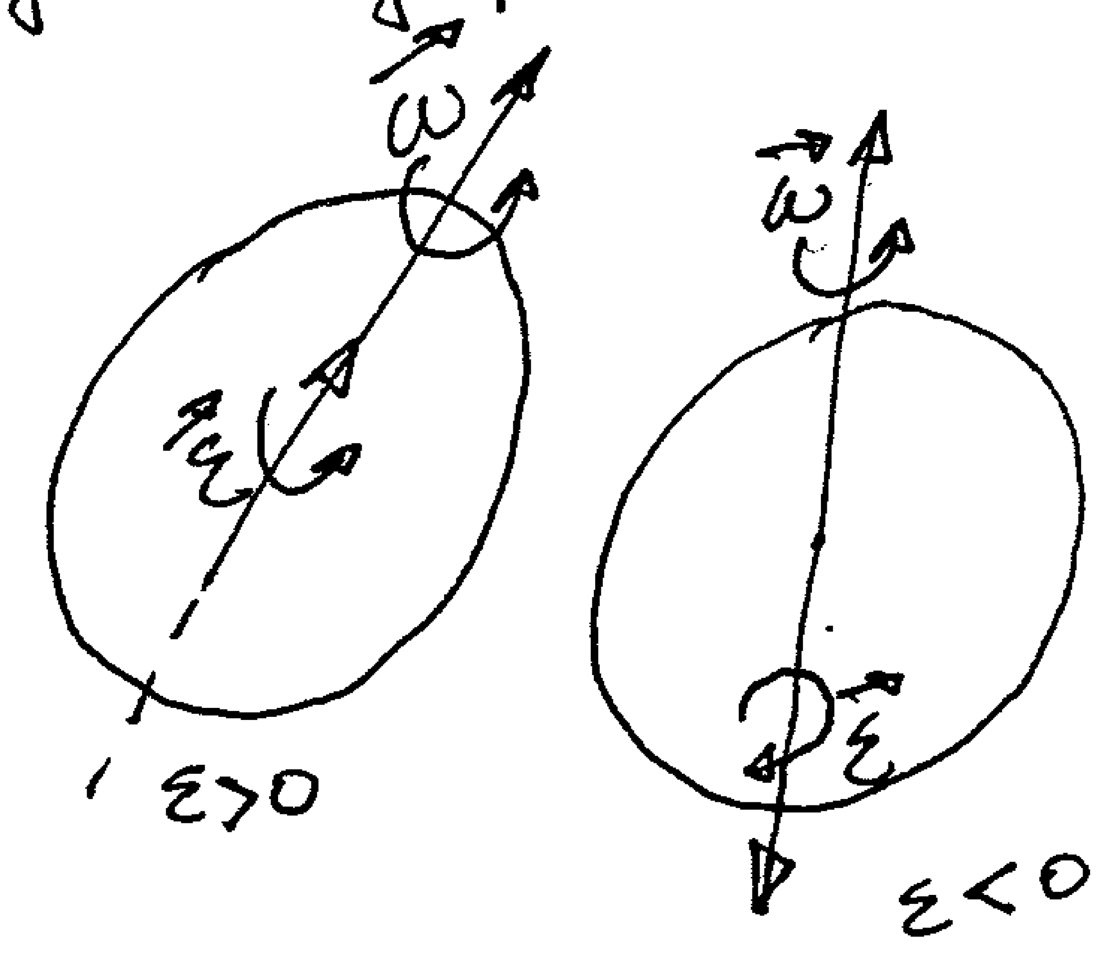
$$\varepsilon = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

ili, uzimajući u obzir (2)

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \qquad (4)$$

Znači, ugaono ubrzanje tijela u datom trenutku brojčano je jednako prvom izvodu ugaone brzine ili drugom izvodu ugla obrtanja po vremenu.

Ako se intezitet ugaone brzine tokom vremena povećava, obrtanje tijela naziva se ubrzanim a ako se smanjuje – usporenim. Obrtanje će biti ubrzano kada su veličine ε i ω istog znaka ($\varepsilon \cdot \omega > 0$) a usporeno kada su ove veličine različitog znaka ($\varepsilon \cdot \omega < 0$).



Ugaono ubrzanje, analogno ugaonoj brzini, možemo prikazati preko vektora ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ koji leži na nepokretnoj osi obrtanja a smjer mu je isti kao i ugaone brzine u slučaju ubrzanog obrtanja, odnosno suprotan u slučaju usporenog kretanja. Ova veza vektora ugaonog ubrzanja i ugaone brzine kratko se iskazuje na sledeći način:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \qquad (5)$$

~~Ravnomjerno~~ Specijalni slučajevi obrtanja tijela oko nepokretne ose

a) Ravnomjerno (jednoliko) obrtanje: $\boxed{\omega = const}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow d\varphi = \omega\, dt \rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt \; ; \quad \varphi_0 = \varphi(0)$$ – početna veličina ugla obrtanja (često je $\varphi_0 = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \omega t + \varphi_0}$$ – zakon jednolikog obrtanja (6)

b) Ravnomjerno (~~jednoliko~~ promjenljivo, jednako promjenljivo) obrtanje: $\boxed{\varepsilon = const}$

Neka je u početnom trenutku $t_0 = 0$: $\varphi(0) = \varphi_0$, $\omega(0) = \omega_0$

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \Rightarrow d\omega = \varepsilon\, dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t}$$ – zakon promjene ugaone brzine (7)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)\,dt \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2}$$ – konačna jednačina (zakon) ravnomjerno promjenljivog obrtanja (8)

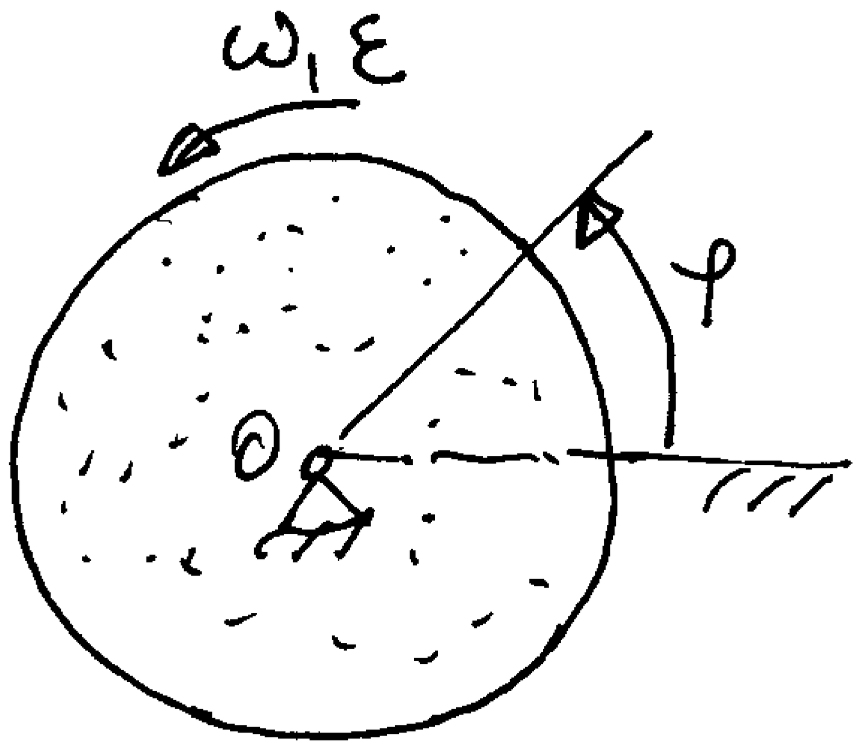
Ako su ω i ε istog znaka obrtanje je ravnomjerno (jednako) ubrzano, a ako su suprotnog znaka – ravnomjerno usporeno.

Takođe, eliminacijom vremena iz (7) i (8) dobijamo

$$\boxed{\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0)}. \qquad (8)$$

Primjer 1. Disk se obrće oko nepokretne ose po zakonu

$$\varphi = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3, \quad \varphi\,[\mathrm{rad}],\ t\,[\mathrm{s}].$$



a) Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska u trenutku $t_1 = 3\,\mathrm{s}$, kao i broj obrtaja diska za to vrijeme.

b) Koliko proteklne vremena do zaustavljanja diska?

a) $(\circlearrowleft +)\quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 4t - t^2$

$(\circlearrowleft +)\quad \varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 4 - 2t$

Za $t = t_1 = 3\,\mathrm{s}$: $\quad \omega = 3\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $\quad \varepsilon = -2\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$, tj. $\varepsilon = 2\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$

$\varphi(t_1) = 9\,\mathrm{rad}$; $\quad N = \dfrac{\varphi(t_1)}{2\pi} = 1{,}43$ obrta

b) $\omega(t^*) = 0 \rightarrow 4t^* - t^{*2} = 0 \rightarrow \boxed{t^* = 4\,\mathrm{s}}$

Primjer 2. Polazeći iz mira disk se obrće jednakopromjenljivo i za 5 s dostiže ugaonu brzinu od $10\,\mathrm{s}^{-1}$. Koliko je ugaono ubrzanje diska i koliko disk napravi obrtaja za 10 s od početka kretanja.

Za jednakopromjenljivo kretanje je

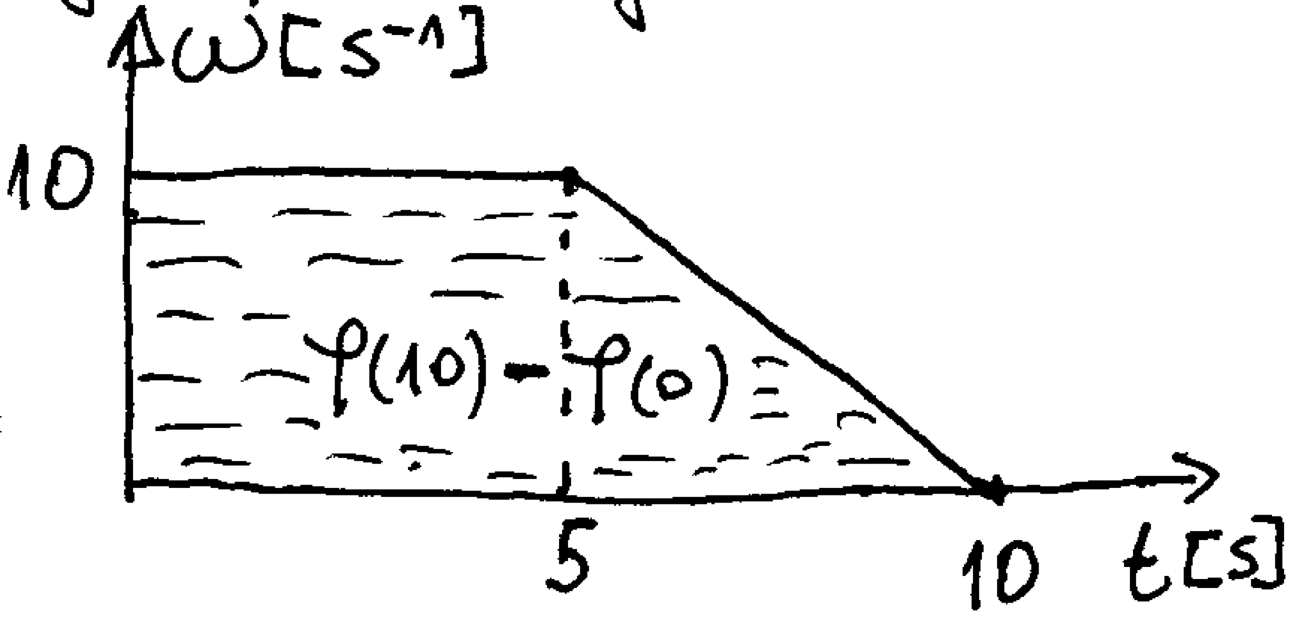
$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t \quad \text{i} \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon\frac{t^2}{2}, \quad \varepsilon = \mathrm{const.}$$

U našem slučaju je $\omega_0 = 0$ (kretanje počelo iz mira) i možemo uzeti da je $\varphi_0 = 0$.

Kako je prema uslovu zadatka $\omega(5) = 10$, dobijamo $\boxed{\varepsilon = 2\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}}$.

Sada je $\varphi(t) = \varepsilon\dfrac{t^2}{2} = t^2$ i $\varphi(10) = 100\,\mathrm{rad}$, odnosno $N = \dfrac{\varphi(10)}{2\pi} = 15{,}9$ obrta.

Primjer 3. Zakon promjene ugaone brzine tijela prikazan je na slici. Kolika je srednja ugaona brzina tijela?



$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \rightarrow d\varphi = \omega\,dt \rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega(t)\,dt$$

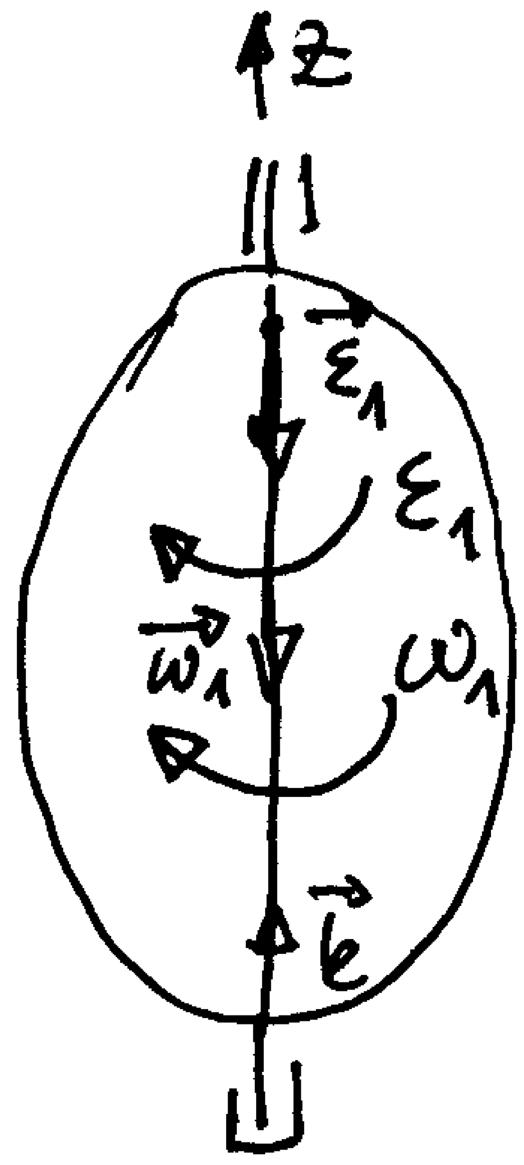
$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_0^t \omega(t)\,dt, \quad \varphi_0 = \varphi(0)$$

šrafirana površina na sl.

$$\varphi(10) - \varphi_0 = \int_0^{10} \omega(t)\,dt = 5\cdot 10 + 5\cdot 10/2 = 75\,\mathrm{rad}$$

$$\omega_{sr} = \frac{\varphi(10) - \varphi(0)}{10} = 7{,}5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 4. Tijelo se obrće po zakonu $\varphi = t^3 - 3t^2$ ($t[s]$, $\varphi[rad]$). Odrediti da li se tijelo obrće ubrzano ili usporeno u trenutku $t_1 = 0{,}5\,s$.



$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 - 6t,$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 6t - 6$$

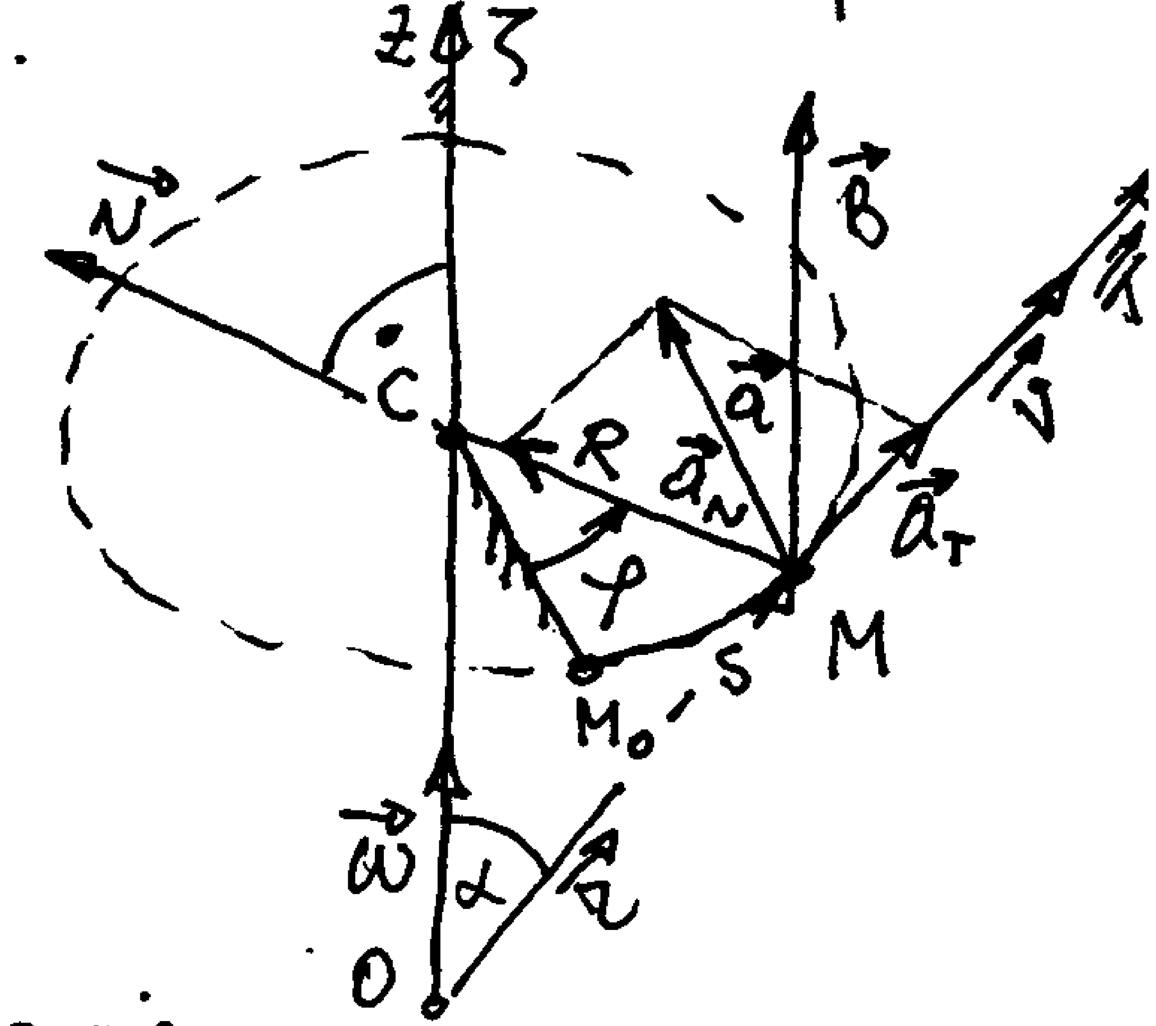
$$\omega_1 = \omega(t_1) = -2{,}25\ s^{-1}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1) = -3\ s^{-2}$$

$$\omega_1 \cdot \varepsilon_1 = 6{,}75 > 0 \Rightarrow \text{ubrzano obrtanje}$$

2.3 Lokalne karakteristike obrtanja tijela (brzine i ubrzanja tačaka tijela)

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje su karakteristike obrtanja tijela kao cjeline, tj. one su iste za sve tačke tijela. Pređimo sada na određivanje kinematičkih karakteristika koje zavise od izbora tačke u krutom tijelu. To su brzina i ubrzanje tačke tijela pri obrtanju.



Uočimo neku tačku M tijela koja se nalazi na rastojanju R od obrtne ose. Pri obrtanju tijela oko ose z ova tačka opisuje krug poluprečnika R čiji se centar nalazi u tački C prodora ose z kroz ravan kruga. Kada se tijelo obrne za ugao φ, tačka M opiše luk koji je, mjeren od početnog položaja tačke M_0, jednak

$$s = R\varphi$$

U odnosu na prirodni trijedar vezan za tačku M za njenu kružnu trajektoriju (v. I-2.3) biće: $\vec{v} = v\vec{T} = v_\tau \vec{T}$, $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\varphi) = R\dot{\varphi}$, odnosno

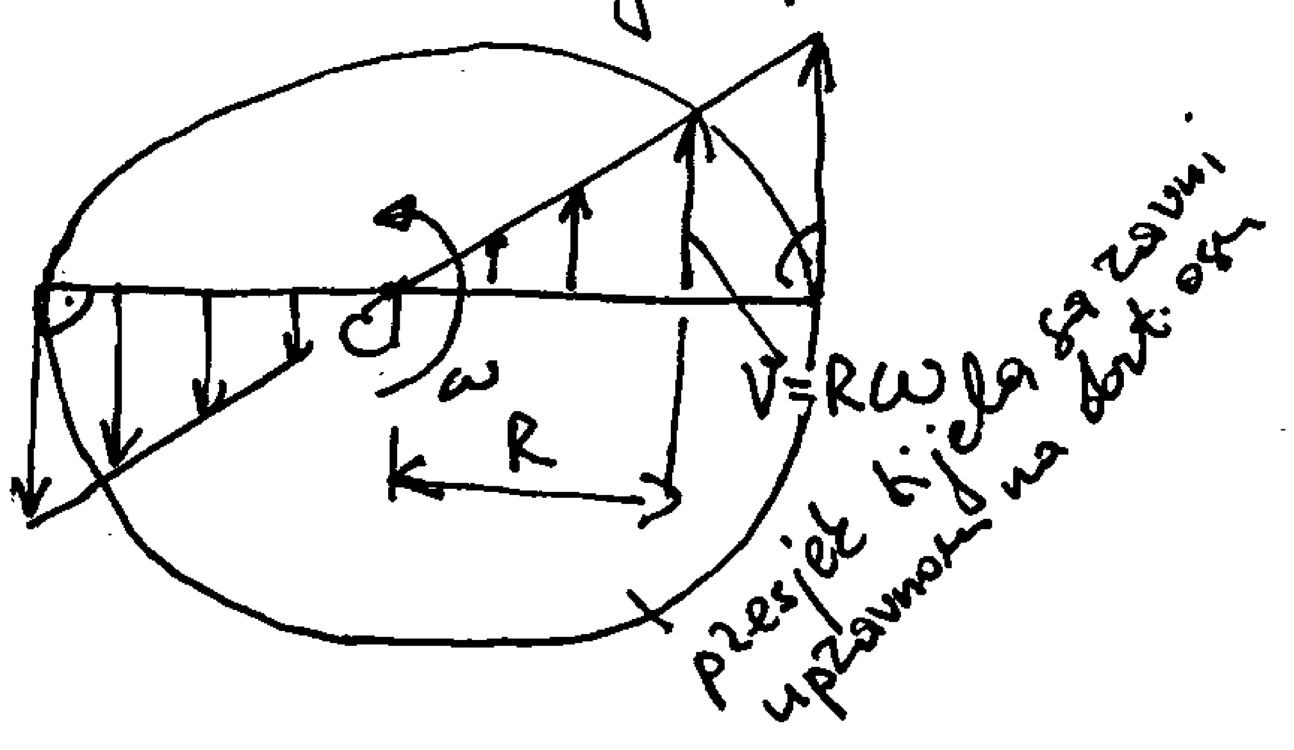
$$v = R\omega \qquad (1)$$

gdje je $\omega = \dot{\varphi}$ ugaona brzina tijela.

Brzina v, za razliku od ugaone brzine tijela, često se zove linearna ili obimna brzina tačke M.

Prema tome, obimna brzina neke tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose brojčano je jednaka proizvodu iz ugaone brzine tijela i rastojanja posmatrane tačke od obrtne ose. Obimna brzina je usmjerena duž tangente na kružnu putanju u stranu obrtanja tijela.

Pošto ω u datom trenutku ima istu vrijednost za sve tačke tijela, to iz (1) slijedi da su obimne brzine pojedinih tačaka tijela proporcionalne rastojanjima tačaka od obrtne ose (brzine tačaka na obrtnoj osi su jednake nuli)



Vektor brzine $\vec{v}$ neke tačke tijela može se odrediti Ojlerovom formulom:

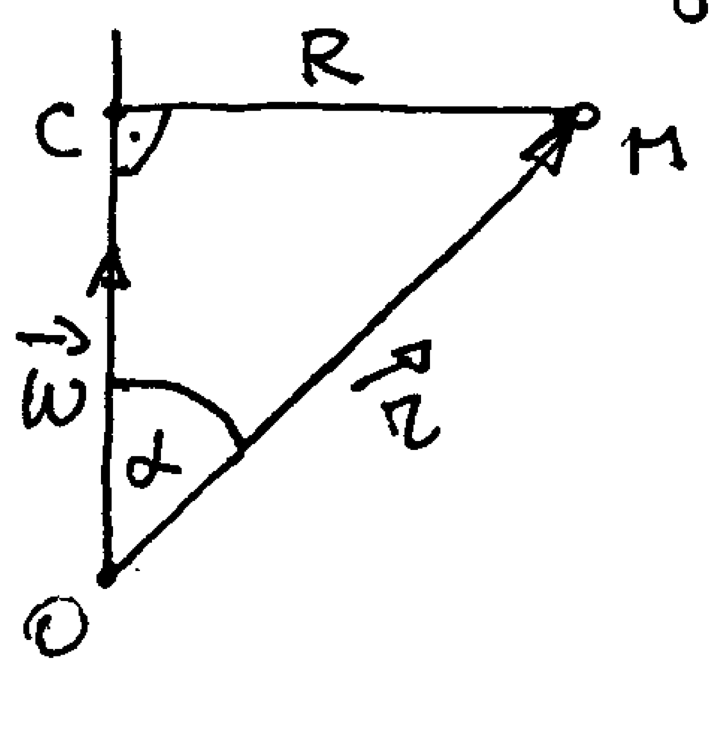
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2)$$

koja govori da je brzina proizvoljne tačke krutog tijela, koje se obrće oko nepokretne ose, jednaka vektorskom proizvodu vektora ugaone brzine tijela i vektora položaja te tačke.

Zaista, intenzitet ovog vektorskog proizvoda je

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\omega|\, r \sin\alpha, \quad \alpha = \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{r})$$
$$= |\omega| R$$

tj, na osnovu (1), jednak je intenzitetu brzine $\vec{v}$.



vektor $\vec\omega\times\vec r$ je normalan na ravan vektora $\vec\omega$ i $\vec r$, tj. pada u pravcu tangente na kružnu putanju tačke M, a ima smjer iz koga se obrtanje vektora $\vec\omega$, najkraćim putem, do poklapanja sa vektorom $\vec r$ vidi kao pozitivno obrtanje (tj. usmjeren je u stranu obrtanja tijela).

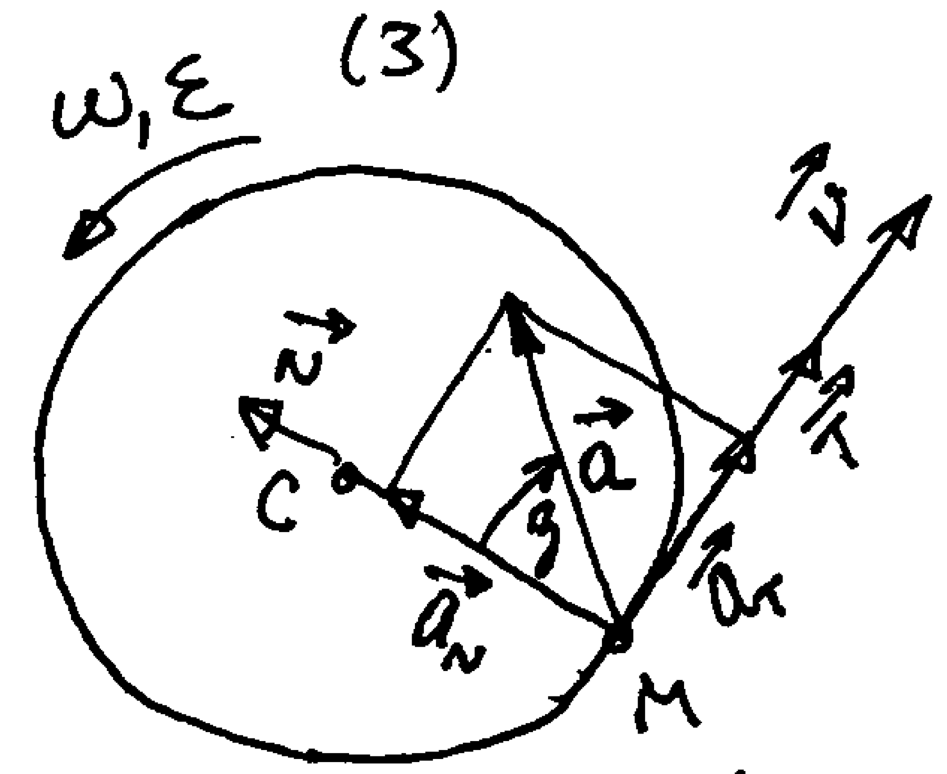
Ubrzanje tačke M tijela razlaže se na tangencijalnu i normalnu komponentu (v. I-3.3):

$$\vec a = \vec a_T + \vec a_N = a_T\vec T + a_N\vec N$$

gdje su: $a_T = \frac{dv}{dt}$, $a_N = \frac{v^2}{R_k}$

Odavde, pošto je u našem slučaju $R_k = R$ i $v = R\omega$, dobijamo

$$a_T = R\varepsilon, \quad a_N = R\omega^2 \qquad (3)$$



gdje je $\varepsilon=\dot\omega=\ddot\varphi$ ugaono ubrzanje tijela.

Tangencijalno ubrzanje $\vec a_T = R\varepsilon\vec T$ usmjereno je po tangenti na kružnu putanju (u smjeru kretanja ako se tijelo obrće ubrzano ($\varepsilon>0$), ili u suprotnom smjeru ako je obrtanje usporeno ($\varepsilon<0$)); normalno ubrzanje $\vec a_N = R\omega^2\vec N$ je uvijek usmjereno ka osi obrtanja.

Intezitet ubrzanja tačke M iznosi $a=\sqrt{a_T^2+a_N^2} = R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$ (4), a ugao γ između vektora $\vec a$ i pravca MC određen je sa

$$tg\gamma = \frac{a_T}{a_N} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (5)$$

Iz (4) i (5) slijedi da je intezitet ubrzanja tačke tijela proporcionalan udaljenju tačke od ose obrtanja i da ubrzanja svih tačaka zaklapaju isti ugao sa pravcem normale iz date tačke na osu obrtanja.

Do ubrzanja tačke M može se doći i diferenciranjem po vremenu vektora brzine tačke određenim formulom (2):

$$\vec a = \dot{\vec v} = \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times\dot{\vec r},$$

odakle odmah dobijamo

$$\vec a = \vec\varepsilon\times\vec r + \vec\omega\times\vec v \qquad (6)$$

jer je $\dot{\vec\omega}=\vec\varepsilon$ i $\dot{\vec r}=\vec v$.

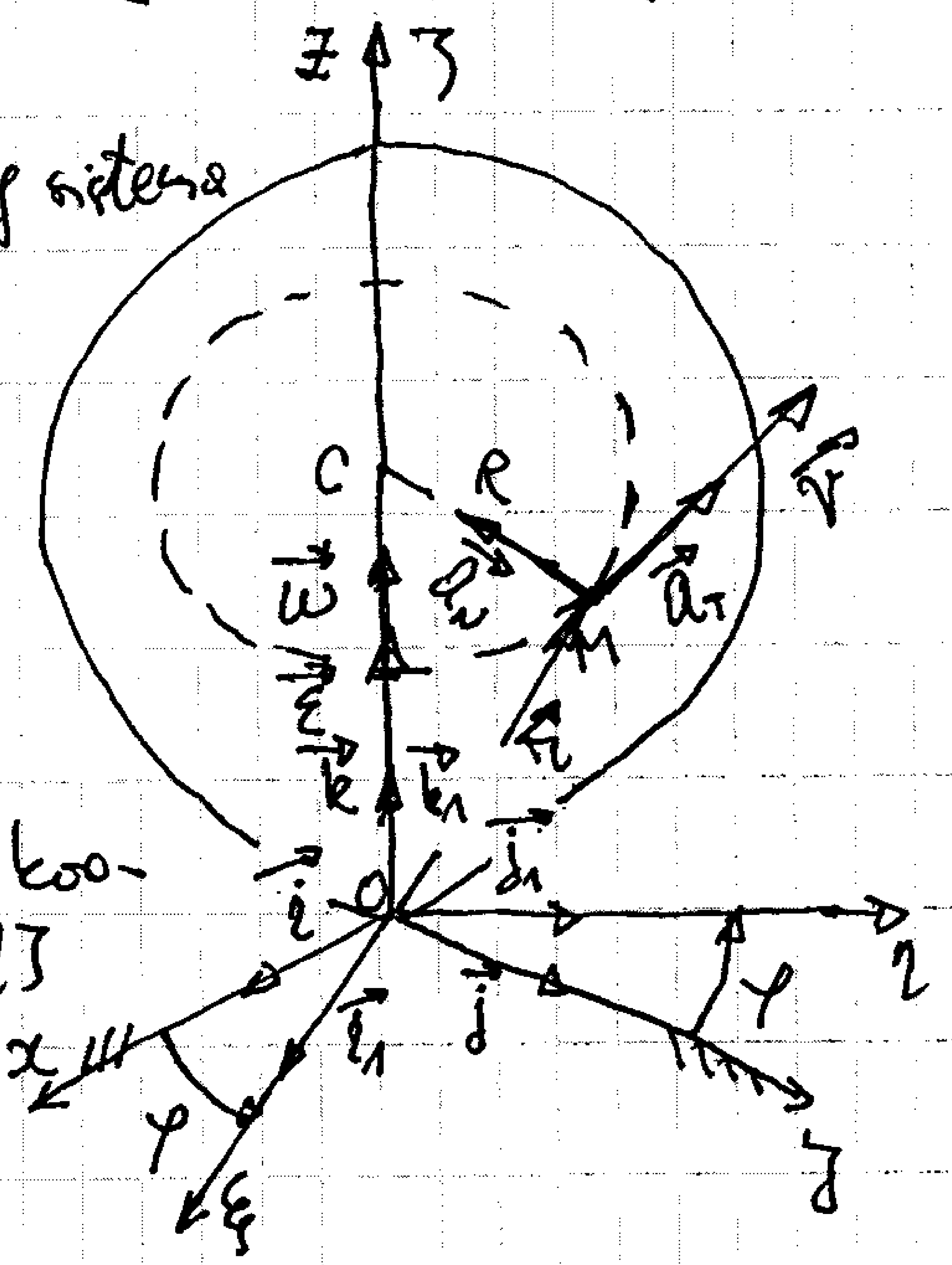
Koristeći svojstva vektorskog proizvoda lako se zaključuje da su tangencijalna i normalna komponenta ubrzanja date sa

$$\vec a_T = \vec\varepsilon\times\vec r, \quad \vec a_N = \vec\omega\times\vec v = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r), \qquad (7)$$

tj. $\vec a = \vec a_T + \vec a_N$

Prema tome, ubrzanje proizvoljne tačke M tijela koje se obrće oko nepokretne ose određeno je vektorskim zbirom tangencijalnog i normalnog ubrzanja tačke koji su definisani formulama (7).

2.3.1 Projekcije brzine i ubrzanja na ose pokretnog koordinatnog sistema



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – jedinični vektori nepokretnog koordinatnog sistema

$\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – -"- pokretnog -"-

$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \omega \vec{k}_1 \quad (\omega = \omega_z = \omega_\zeta) \qquad \vec{k}_1 = \vec{k}$

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{k} = \varepsilon \vec{k}_1 \quad (\varepsilon = \varepsilon_z = \varepsilon_\zeta)$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{r} = \xi \vec{i}_1 + \eta \vec{j}_1 + \zeta \vec{k}_1$, ξ, η, ζ – koordinate uočene tačke M u pokretnom koordinatnom sistemu $O\xi\eta\zeta$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = -\eta\omega \vec{i}_1 + \xi\omega \vec{j}_1$$

$$\vec{v} = v_\xi \vec{i}_1 + v_\eta \vec{j}_1 + v_\zeta \vec{k}_1 \Rightarrow \boxed{v_\xi = -\eta\omega, \ v_\eta = \xi\omega, \ v_\zeta = 0}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N, \quad \vec{a}_T = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a}_T = a_{T\xi} \vec{i}_1 + a_{T\eta} \vec{j}_1 + a_{T\zeta} \vec{k}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = -\eta\varepsilon \vec{i}_1 + \xi\varepsilon \vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{T\xi} = -\eta\varepsilon, \ a_{T\eta} = \xi\varepsilon, \ a_{T\zeta} = 0}$$

$$\vec{a}_N = a_{N\xi} \vec{i}_1 + a_{N\eta} \vec{j}_1 + a_{N\zeta} \vec{k}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\eta\omega & \xi\omega & 0 \end{vmatrix} = -\xi\omega^2 \vec{i}_1 - \eta\omega^2 \vec{j}_1$$

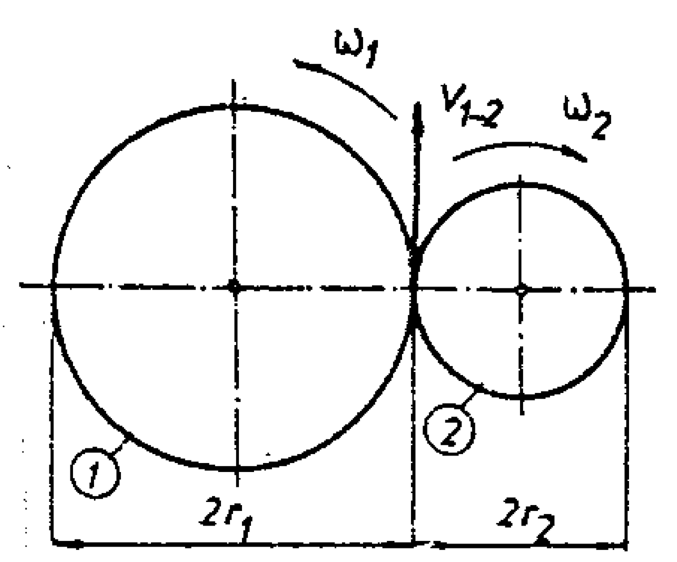
$$\Rightarrow \boxed{a_{N\xi} = -\xi\omega^2, \ a_{N\eta} = -\eta\omega^2, \ a_{N\zeta} = 0}$$

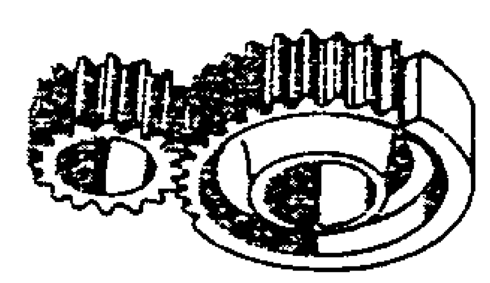
N. Analogno se određuju projekcije brzine, tangencijalnog i normalnog ubrzanja tačke na ose nepokretnog koordinatnog sistema.

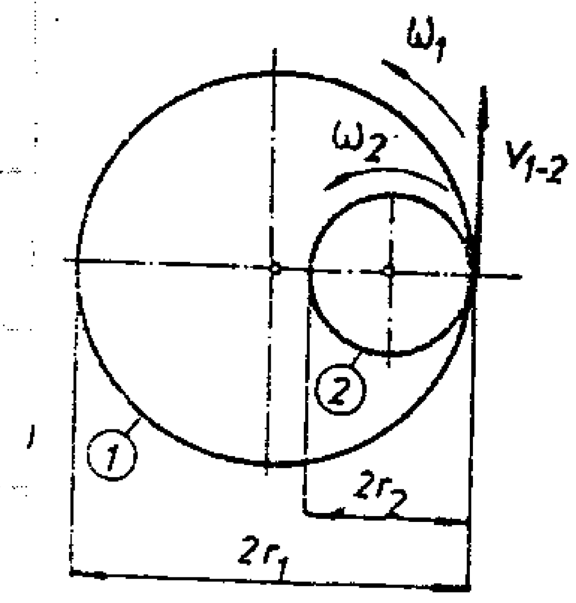
2.4 Transformacije obrtnog kretanja

S praktičnog stanovišta posebno je značajna mogućnost transformacije obrtnog kretanja prenosom sa jednog na drugo tijelo (prvo tijelo se zove vodeće ili pogonsko a drugo – vođeno). Mehanički sistem preko kojeg se ostvaruje prenos kretanja zove se prenosni mehanizam (prenosnik).

Obrtanje se sa jednog vratila može prenijeti na drugo vratilo, čije su ose paralelne ili se sijeku, dodirom tačaka tijela kruto vezanih za vratila. Pri tome se prenos ostvaruje trenjem (frikcioni prenosnici) ili ozubljenjem (zupčasti prenosnici), a dodir može biti spolja ili ~~spolja~~ iznutra.

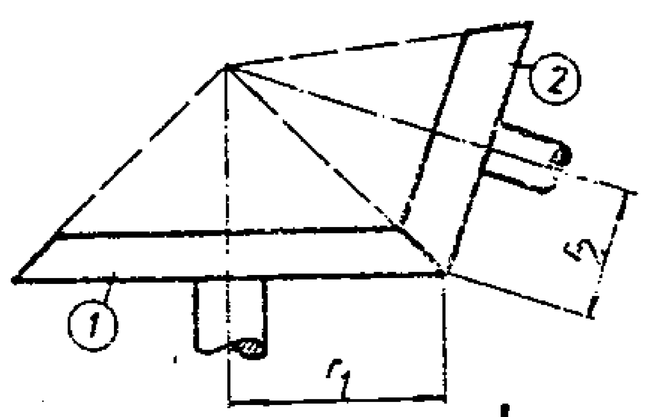


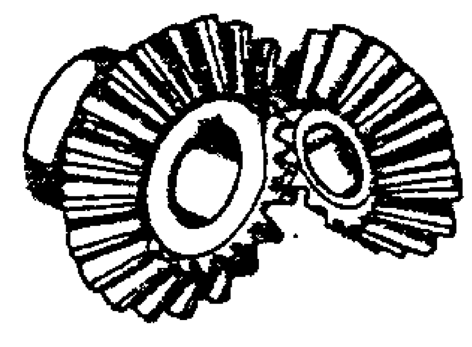




spoljašnja sprega zupčanika

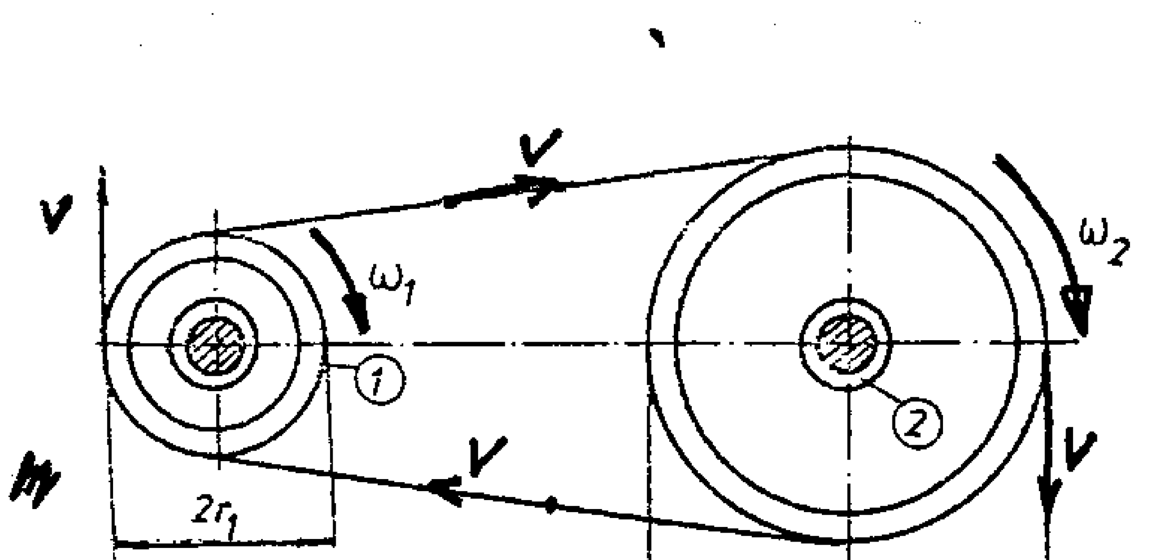
unutrašnja sprega zup.

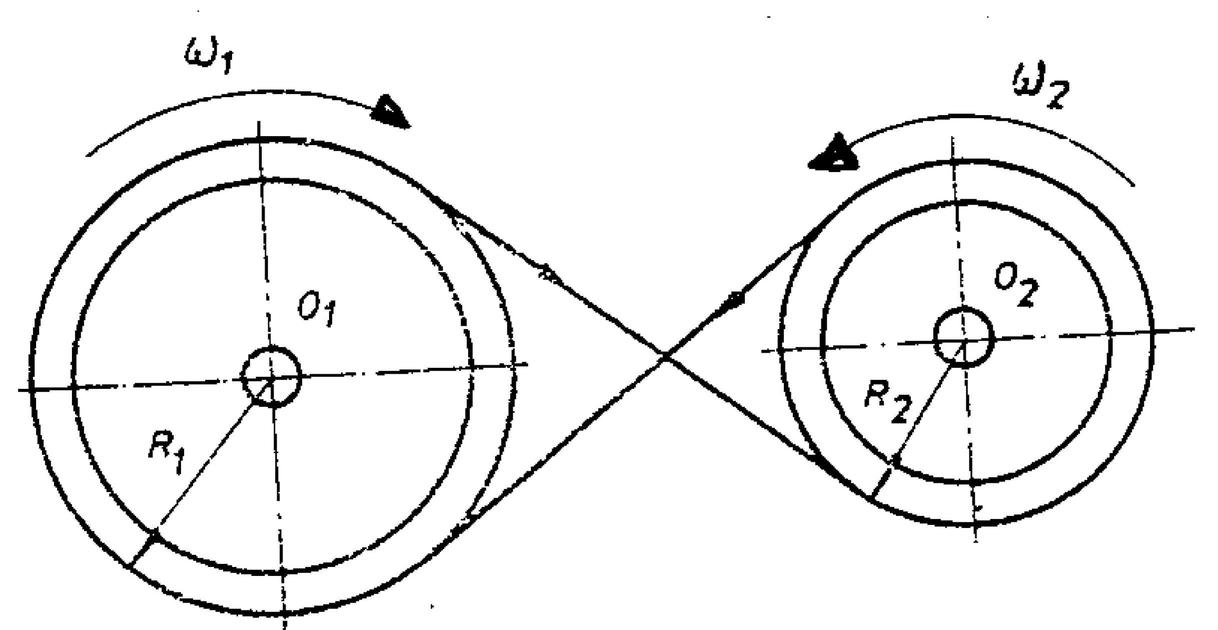




konični zupčasti prenosnik

Drugi način prenosa obrtanja ostvaruje se preko kaišnog prenosnika koji se sastoji iz dva kaišnika (točkovi 1 i 2) i kaiša prebačenog preko kaišnika, a za koji se pretpostavlja da je neistegljiv i da ne kliže preko kaišnika.

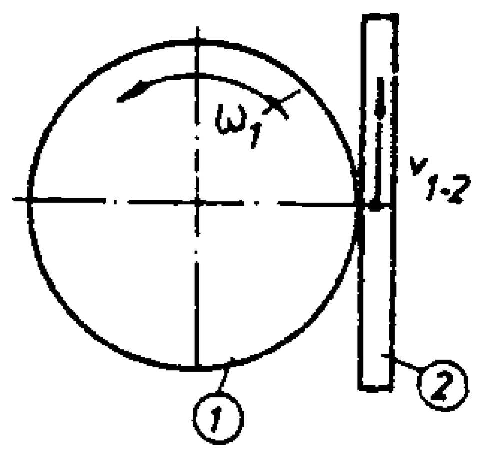




prenosnik sa otvorenim kaišem

prenosnik sa ukrštenim kaišem

Takođe, moguće je obrtno kretanje transformisati u translatorno i obrnuto, translatorno u obrtno dodirom preko trenja ili ozubljenjem točka i poluge.



U svim ovim slučajevima je brzina dodirnih tačaka preko kojih se prenosi kretanje ista za oba točka, odnosno točka i poluge, a u slučaju kaišnog prenosa sve tačke kaiša imaju brzine jednake brzinama na obodu kaišnika, tj.

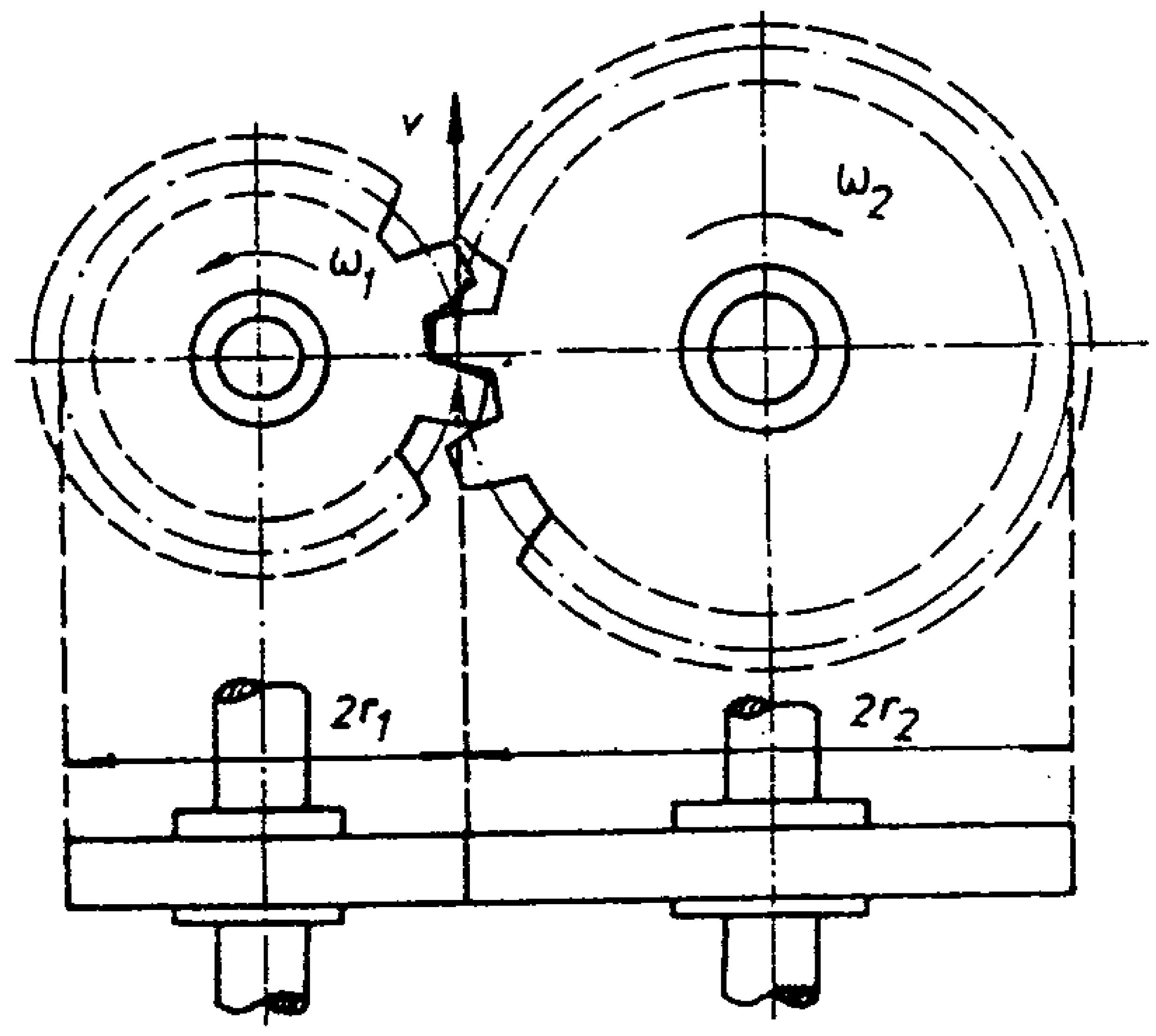
$$v = v_{1-2} = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

$$v_{1-2} = r_1\omega_1 = v$$ — slučaj transformisanja obrtanja u translaciju; brzina poluge 2

Odnos ugaonih brzina vodećeg i vođenog vratila zove se prenosni odnos prenosnika, tj.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{r_2}{r_1}$$



Poluprečnici r_1 i r_2 kod ozubljenja su kinematički poluprečnici zupčanika (poluprečnici podeonih krugova).

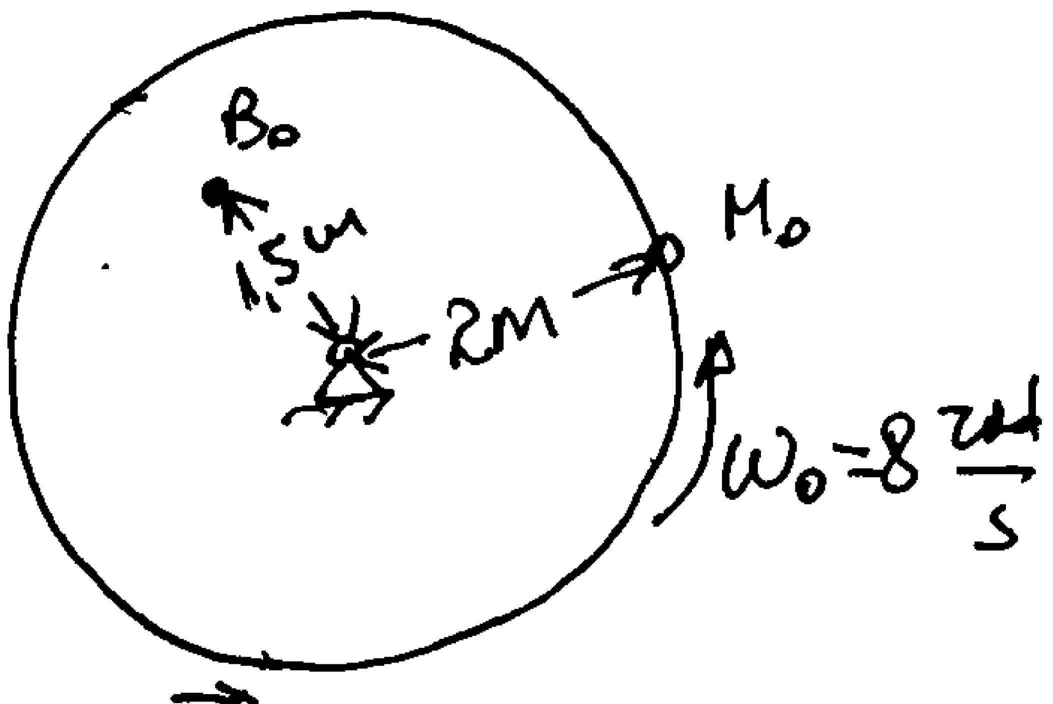
Ako se ima u vidu da je broj zubaca z zupčanika proporcionalan obimu podeonih krugova, odnosno poluprečnicima, to se prenosni odnos zupčastog para može predstaviti odnosom broja zubaca:

$$i = \frac{z_2}{z_1}$$

Primjer 1. Disk poluprečnika 2 m obrće se konstantnim ugaonim ubrzanjem $\varepsilon = 6\ \mathrm{rad/s^2}$. Ako je početna ugaona brzina diska $\omega_0 = 8\ \mathrm{rad/s}$, odrediti brzinu, tangencijalno, normalno i ukupno ubrzanje trenutku $t_1 = 0,5\ s$:

a) tačke M na obodu diska;

b) tačke B na rastojanju 1,5 m od obrtne ose diska.



a) Obrtanje je jednakopromjenljivo $(\varepsilon = const)$ pa važi

$$(V+)\quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t = 8 + 6t.$$

$$v_M = R\omega,\ a_{Mt} = R\varepsilon,\ a_{Mn} = R\omega^2,\ a_M = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

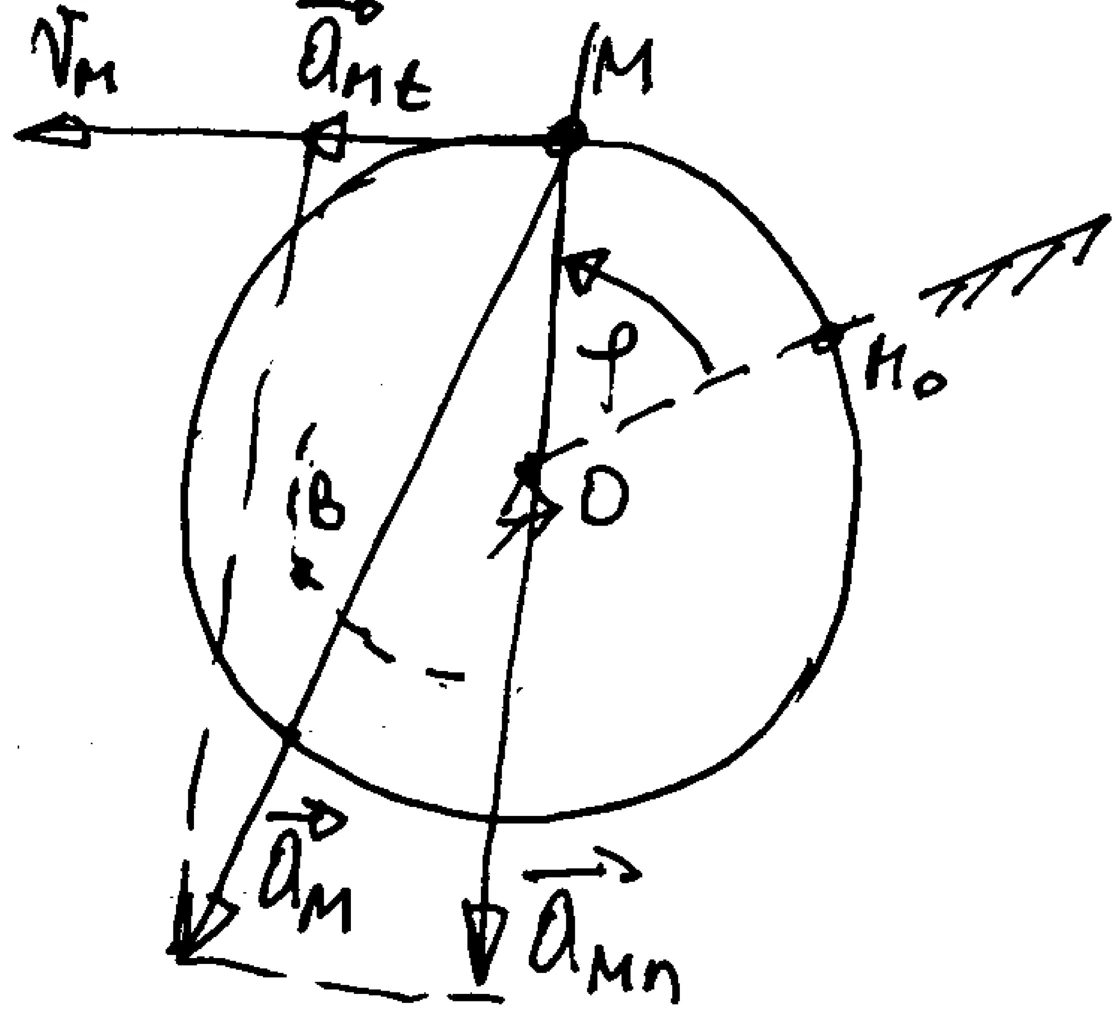
gdje je $R = 2\ m$ i $\varepsilon = 6\ \mathrm{rad/s^2}$.

Za $t = t_1 = 0,5\ s$:

$$\omega = 11\ \frac{rad}{s};\ v_M = 22\ \frac{m}{s},\ a_{Mt} = 12\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{Mn} = 242\ \frac{m}{s^2};\ a_M = \sqrt{a_{Mt}^2 + a_{Mn}^2} = 242,3\ \frac{m}{s^2}$$

b) $R = 1,5\ m$; ...



Primjer 2. U primjeru 1, odrediti ubrzanje tačke M nakon što disk izvrši dva obrtaja.

Zakon obrtanja je

$$\varphi(t) = \cancel{\varphi_0}^{\,0} + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} = 8t + 3t^2$$

Pošto je 2 obrta $= 2 \cdot 2\pi = 12,56$ rad., to iz jednačine $8t + 3t^2 = 12,56$, nalazimo vrijeme za koje disk izvrši dva obrta: $t_2 = 1,11\ s$.

Za $t = t_2 = 1,11\ s$:

$$\omega = 8 + 6t_2 = 14,65\ \frac{rad}{s};\ v_M = R\omega = 29,32\ \frac{m}{s};\ a_{Mt} = R\varepsilon = 12\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{Mn} = R\omega^2 = 430\ \frac{m}{s^2};\ a_M = 430,17\ \frac{m}{s^2}$$

N. Ugaonu brzinu diska nakon dva obrtaja možemo jednostavnije odrediti primjenom jednačine koja važi za jednakopromjenljivo obrtanje:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0),$$

odakle je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon\varphi} = \sqrt{64 + 2 \cdot 6 \cdot 12,56} = 14,65\ s^{-1}$

Primjer 3. Zamajac koji se obrtao ugaonom brzinom $\omega_0 = 8{,}5\,\frac{rad}{s}$ počinje ravnomjerno da koči ($\varepsilon = const$). Nakon 25 obrtaja od početka kočenja ugaona brzina se prepolovi. Koliki je tada intezitet ubrzanja tačke zamajca koja se nalazi na rastojanju $R = 20\,cm$ od obrtne ose? Odrediti trajanje kočenja do zaustavljanja zamajca.

U pitanju je jednakopromjenljivo obrtanje pa važi

$$(\circlearrowleft +)\quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi_0 = 0, \quad \omega_0 = 8{,}5\,rad/s$$

Za $\varphi = \varphi_1 = 25 \cdot 2\pi = 157\,rad$ je $\omega = \omega_1 = \frac{\omega_0}{2}$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{3\omega_0^2}{8\varphi_1} = -0{,}173\,\frac{rad}{s^2}; \quad \omega_1 = 4{,}25\,\frac{rad}{s}$$

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_1^4} = 20\sqrt{0{,}173^2 + 4{,}25^4} = 361{,}3\,\frac{cm}{s^2} = \boxed{3{,}61\,\frac{m}{s^2}}$$

Zakon promjene ugaone brzine je

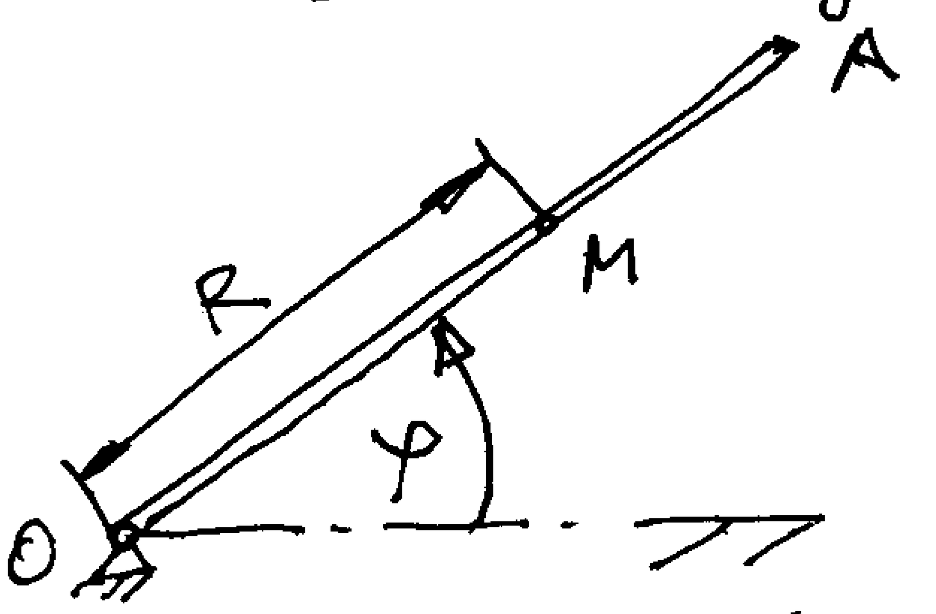
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\omega = 8{,}5 - 0{,}173\,t$$

Ako je t_z – vrijeme zaustavljanja zamajca (trajanje kočenja), tada je $\omega(t_z) = 0 \Rightarrow 8{,}5 - 0{,}173\,t_z = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{t_z = 49{,}13\,s}$$

Primjer 4. Štap OA obrće se u horizontalnoj ravni oko tačke O (vertikalne ose kroz tačku O) po zakonu: $\varphi = \frac{9}{32}t^3$, $\varphi\,[rad]$, $t\,[s]$. U trenutku $t_1 = 4/3\,s$, odrediti brzinu i ubrzanje tačke M koja se nalazi na rastojanju $R = 0{,}8\,m$ od tačke O.

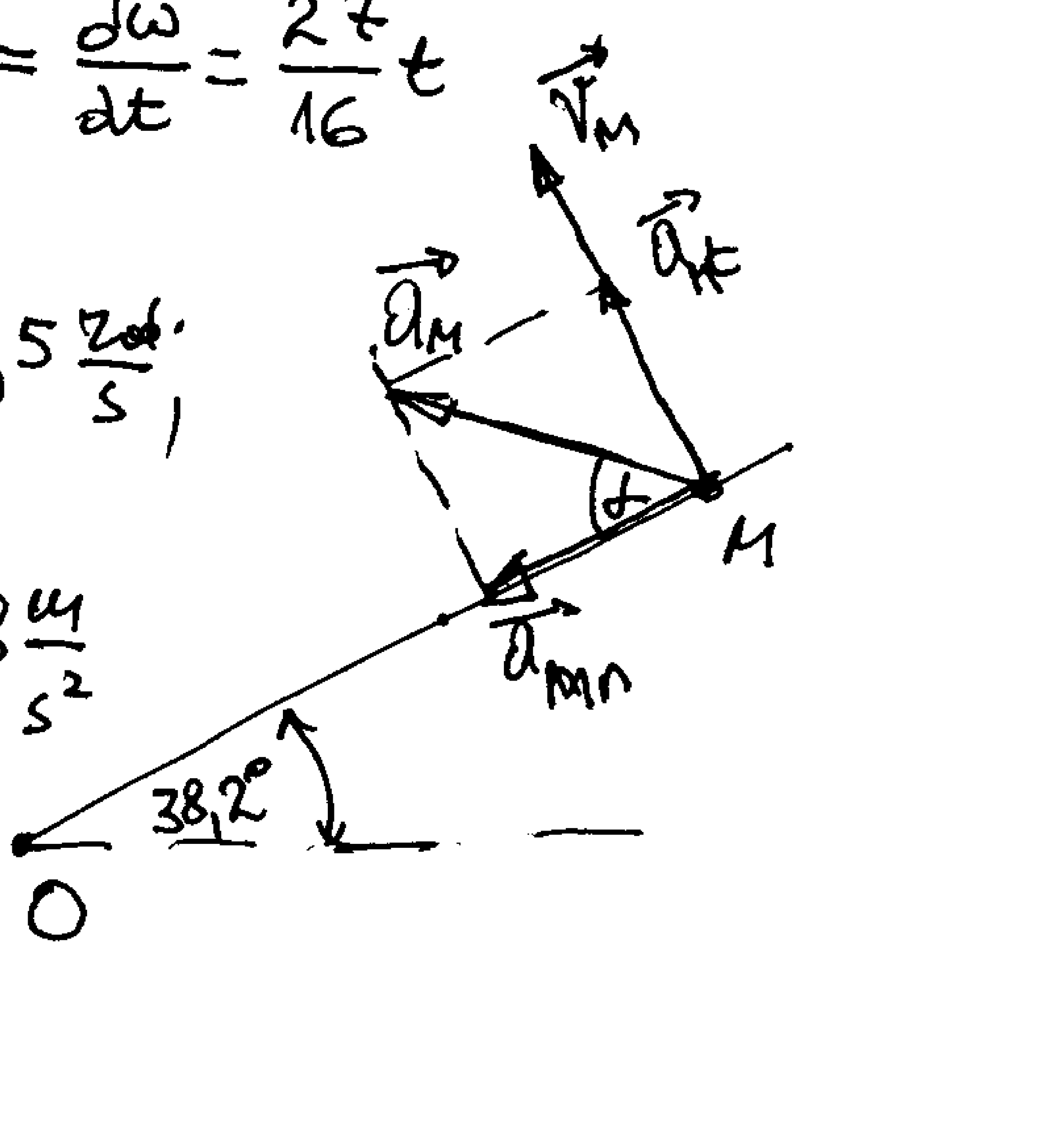


$$(\circlearrowleft +)\quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{27}{32}t^2, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{27}{16}t$$

Za $t = t_1 = \frac{4}{3}\,s$:

$\varphi = 0{,}67\,rad \simeq 38{,}2°$; $\omega = 1{,}5\,\frac{rad}{s}$,

$\varepsilon = 2{,}25\,\frac{rad}{s^2}$.



$$v_M = R\omega = 1{,}2\,\frac{m}{s}; \quad a_{Mt} = R\varepsilon = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}, \quad a_{Mn} = R\omega^2 = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mt}^2 + a_{Mn}^2} = 2{,}55\,\frac{m}{s^2},$$

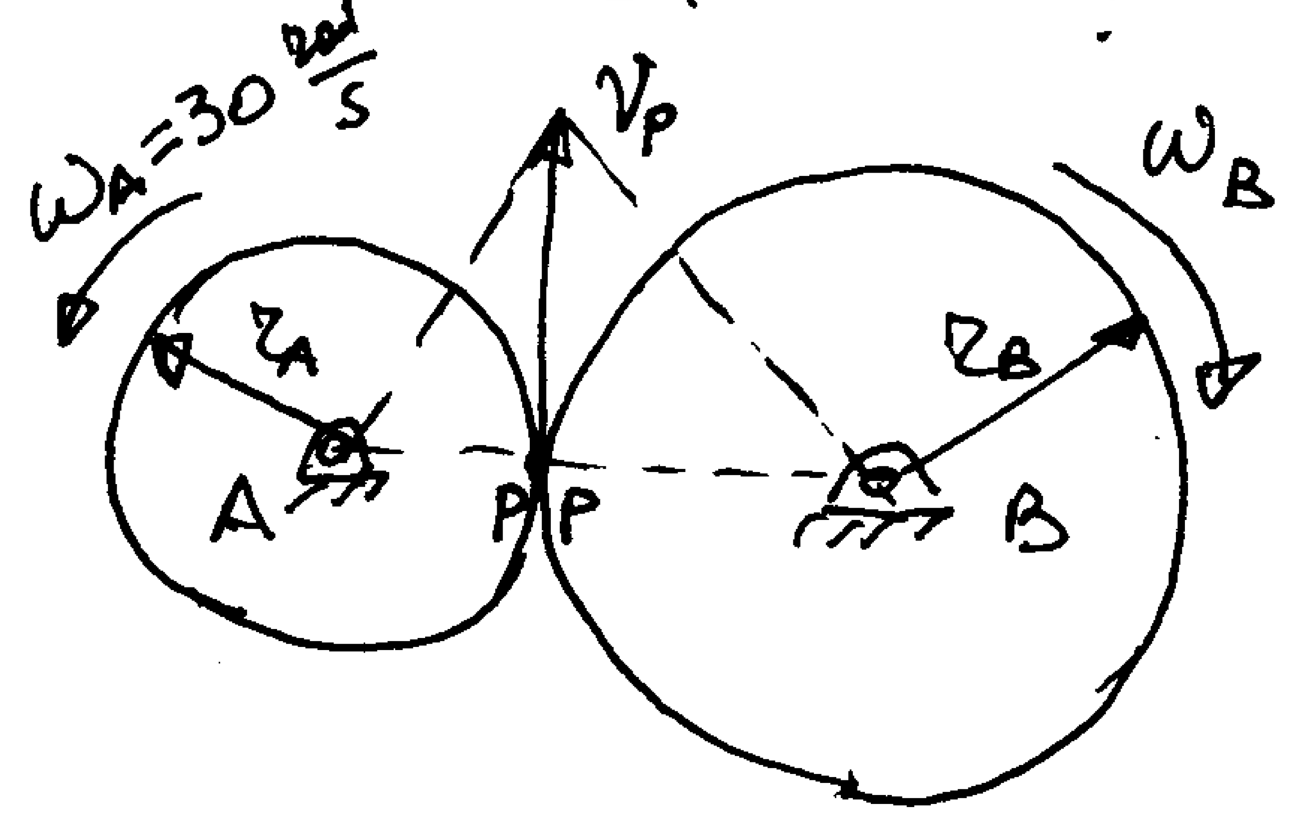
$$\tan\alpha = \frac{a_t}{a_N} = 1 \rightarrow \alpha = 45°$$

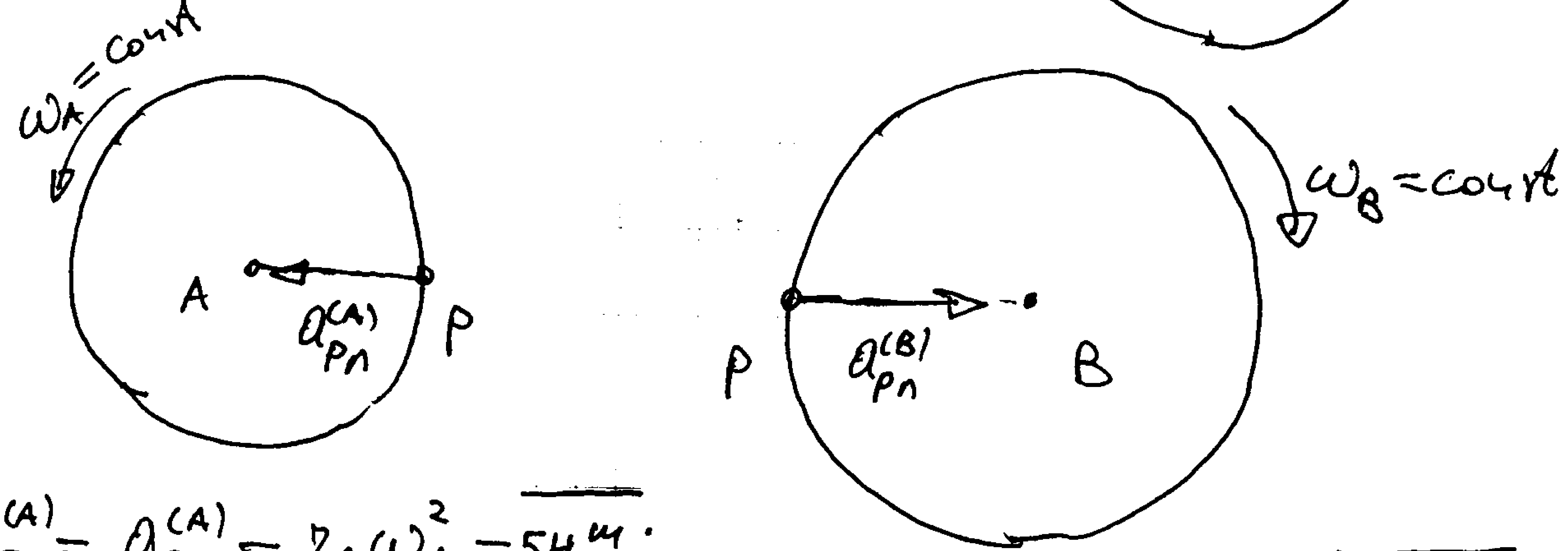
Primjer 7. U frikcionom prenosniku točak A, poluprečnika $r_A = 6\ cm$, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega_A = 30\ \frac{rad}{s}$. Koliko je ugaona brzina točka B ako je njegov poluprečnik $r_B = 15\ cm$? Koliko su ubrzanja tačaka dodira točkova?

$\omega_A = 30\ \frac{rad}{s}$; $r_A = 6\ cm$; $r_B = 15\ cm$

$$v_P = r_A \omega_A = r_B \omega_B$$

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B}\omega_A = 12\ \frac{rad}{s}$$

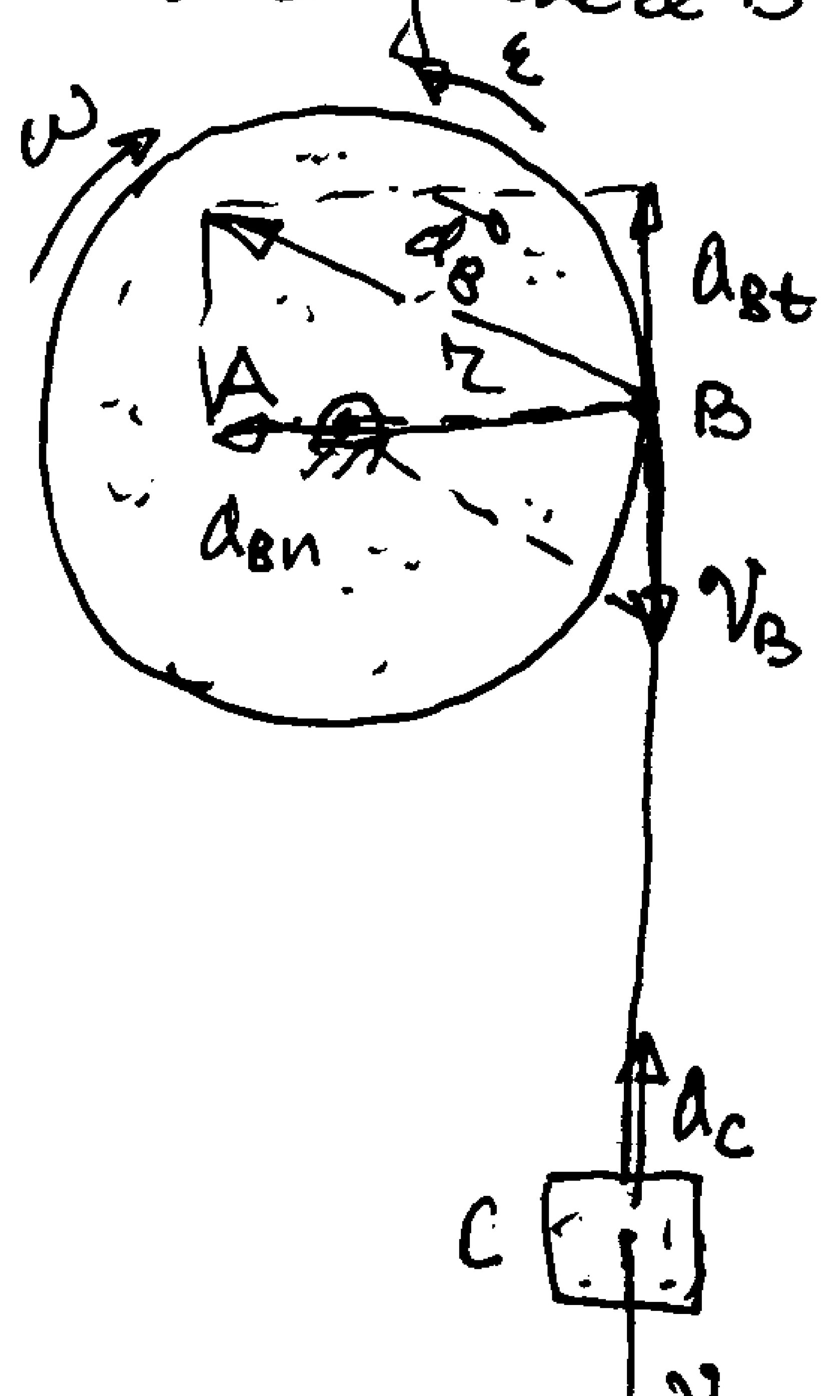




$$a_P^{(A)} = a_{Pn}^{(A)} = r_A \omega_A^2 = 54\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_P^{(B)} = a_{Pn}^{(B)} = r_B \omega_B^2 = 21{,}6\ \frac{m}{s^2}$$

Primjer 8. Teg C zakačen za kraj neistegljivog užeta namotanog na kotur A, poluprečnika $r = 0{,}2\ m$, kreće se vertikalno naniže sa konstantnim usporenjem koje iznosi $0{,}4\ m/s^2$. Ako je početna brzina tereta $v_{C0} = 1{,}2\ m/s$, odrediti u trenutku $t_1 = 2\ s$ ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje kotura. Koliko je tada ubrzanje tačke B kotura?



$+\downarrow\ v_C = v_{C0} + a_C t$, $v_{C0} = 1{,}2$, $a_C = -0{,}4$

$$v_C = 1{,}2 - 0{,}4t$$

$v_B = v_C$ – jer je uže neistegljivo

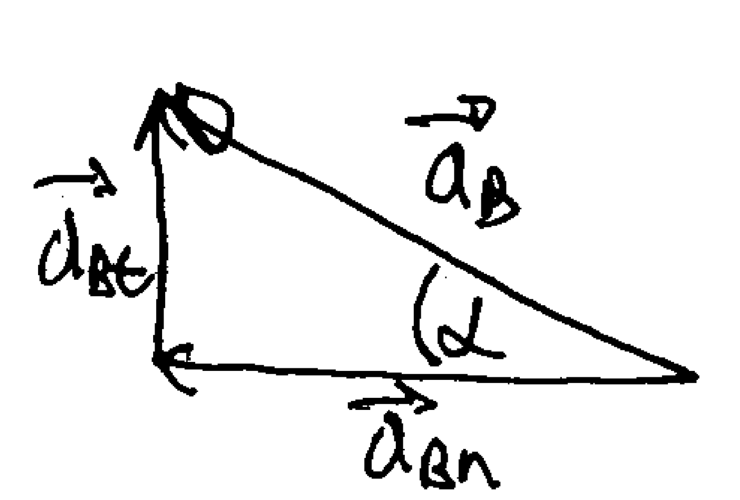
$v_B = r\omega \rightarrow \omega = \frac{v_B}{r} = 6 - 2t$; $\varepsilon = \dot{\omega} = -2$

$t = t_1 = 2\ s$: $\omega = 2\ \frac{rad}{s}$; $\varepsilon = 2\ \frac{rad}{s^2}$

$a_{Bt} = r\varepsilon = 0{,}4\ \frac{m}{s^2} \uparrow$ $(= a_C)$

$a_{Bn} = r\omega^2 = 0{,}8\ \frac{m}{s^2} \leftarrow$

$$a_B = \sqrt{a_{Bt}^2 + a_{Bn}^2} = 0{,}89\ \frac{m}{s^2}$$



$$\alpha = \arctan\frac{a_{Bt}}{a_{Bn}} = 26{,}6^\circ$$