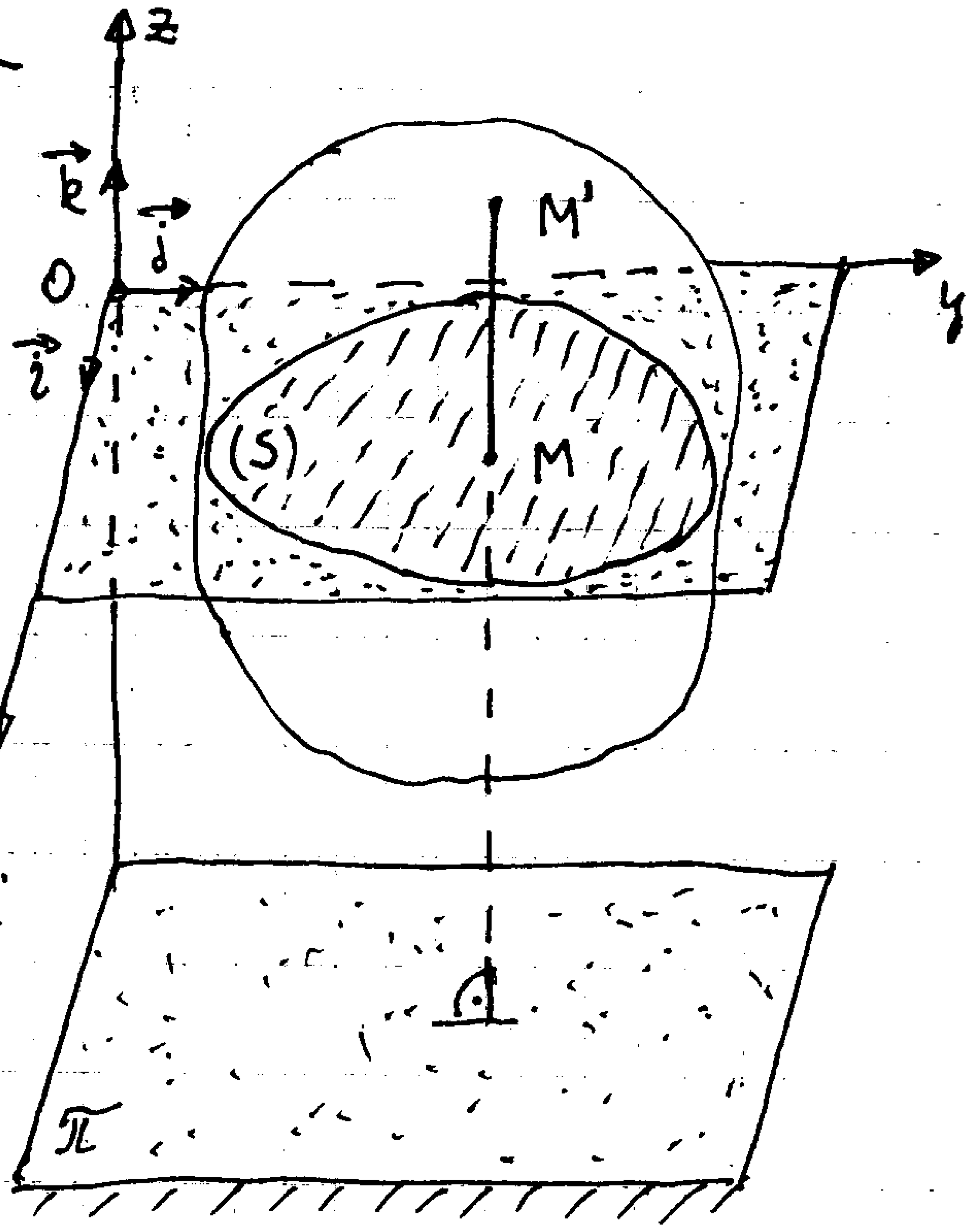
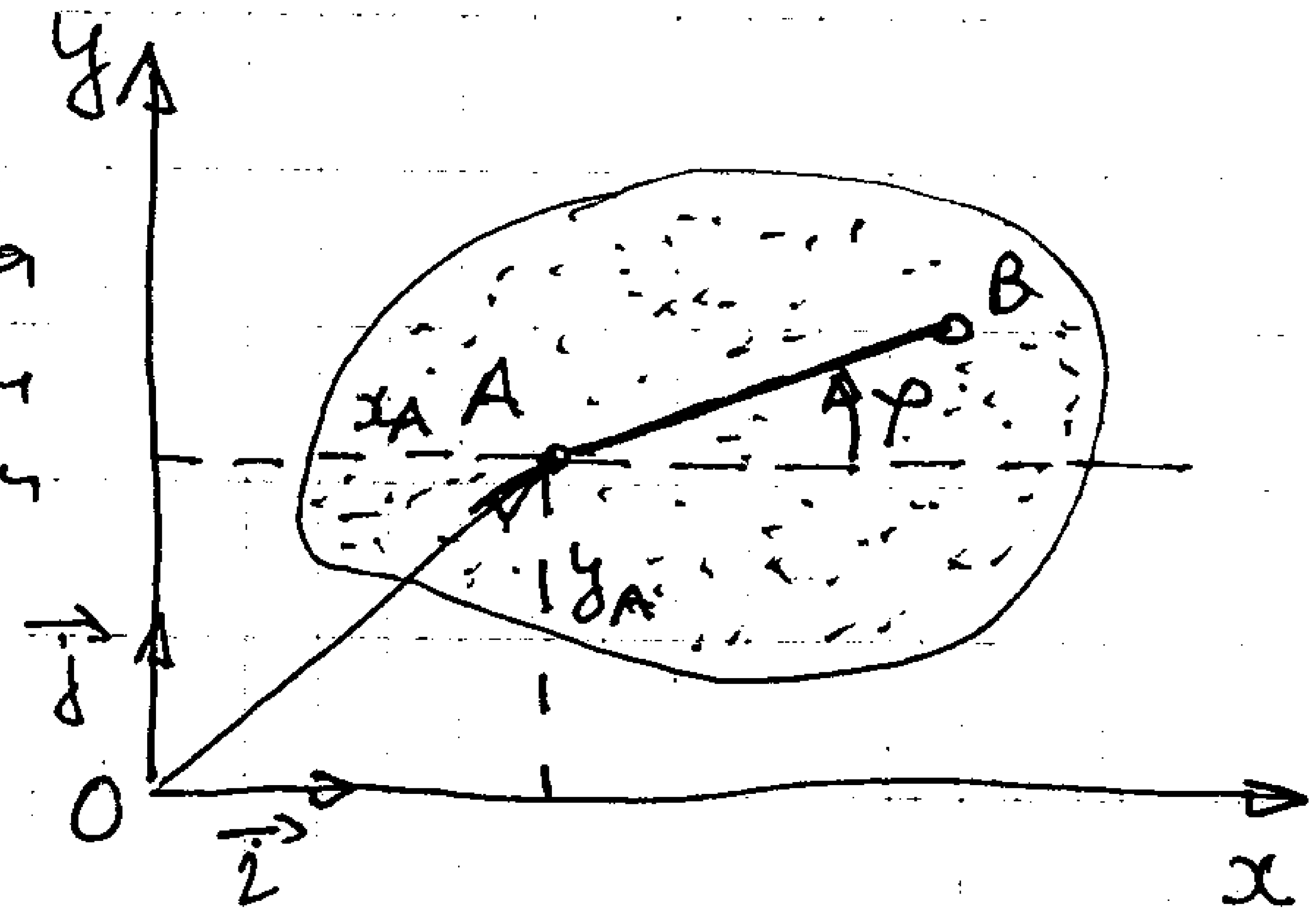
3. Ravansko kretanje krutog tijela

Kretanje krutog tijela naziva se ravanskim ako se sve tačke tijela kreću u ravnima koje su paralelne nekoj nepokretnoj ravni π. U tom slučaju, duž MM' uočena u tijelu a koja je normalna na ravni π ostaje paralelna svom početnom položaju (tj. kreće se translatorno), pa se trajektorije, brzine i ubrzanja tačaka M i M' poklapaju. Prema tome, ravansko kretanje krutog tijela je određeno kretanjem jedne ravne figure S – presjeka tijela sa ravni koja je paralelna referentnoj ravni π.



Položaj presjeka S (ravne figure) u ravni Oxy potpuno je određen ako znamo položaj neke duži AB koja pripada tom presjeku. Položaj duži AB određen je položajem tačke A (njenim koordinatama x_A i y_A) i uglom φ koji duž AB zaklapa sa nepokretnom x-osom. Prema tome, položaj tijela koje vrši ravno kretanje određen je sa tri nezavisna parametra: x_A, y_A, φ, tj. ono ima tri stepena slobode. Da bismo bili u stanju da odredimo položaj tijela u bilo kom trenutku vremena, potrebno je da znamo zavisnosti



$$x_A = x_A(t),\; y_A = y_A(t),\; \varphi = \varphi(t), \quad (1)$$

koje predstavljaju konačne jednačine ravanskog kretanja krutog tijela.

Specijalni slučajevi ovog kretanja su:

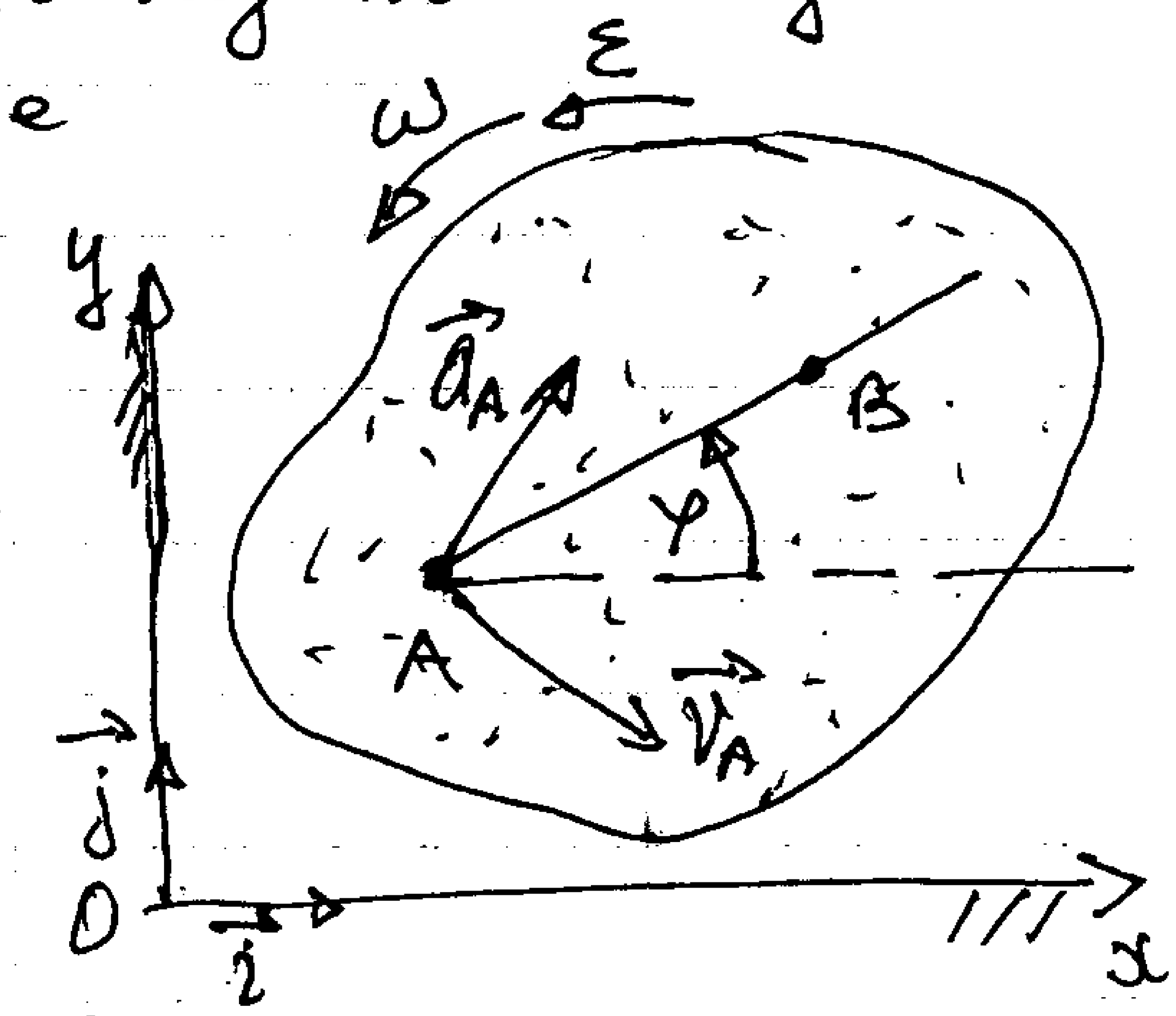
a) $\varphi = const$ – translatorno ravno kretanje

b) $x_A = const$, $y_A = const$ – obrtanje ravne figure S oko tačke A, tj. obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose koja je upravna na ravan π i koja prolazi kroz tačku A.

Odabrana tačka A zove se pol ravanskog kretanja.

U opštem slučaju, ravansko kretanje se može interpretirati kao kretanje sastavljeno iz dva jednostavnija kretanja: translatornog kretanja određenog kretanjem izabranog pola A i obrtanja presjeka S oko pola A. U duhu ove činjenice, translatorni dio ravnog kretanja određen je prvim dvjema jednačinama (1), dok je obrtanje oko pola određeno trećom jednačinom. Naglasimo da je obrtanje oko pola isto što i obrtanje tijela oko ose koja je normalna na ravan kretanja i prolazi kroz pol A.

Kinematičke karakteristike ravanskog kretanja tijela kao cjeline su: brzina $\vec{v}_A$ i ubrzanje $\vec{a}_A$ pola A; ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε tijela. Iz prvih dviju jednačina (1) određuju se brzina i ubrzanje pola A:



$$\vec{v}_A = \dot{x}_A\vec{i} + \dot{y}_A\vec{j}, \quad \vec{a}_A = \ddot{x}_A\vec{i} + \ddot{y}_A\vec{j},$$

dok se iz treće jednačine određuju ugaona brzina i ugaono ubrzanje tijela:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

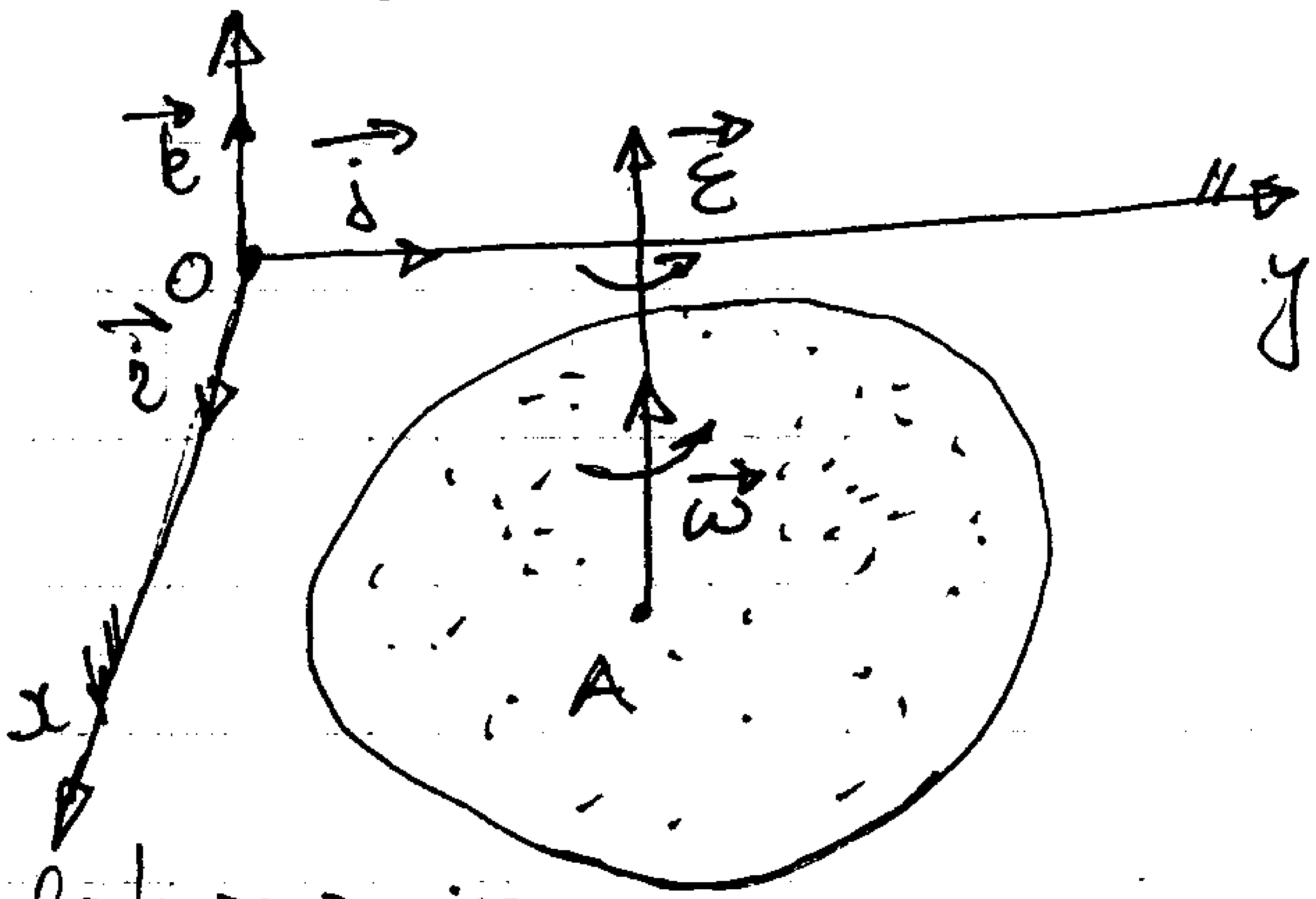
Analogno obrtanju tijela oko nepokretne ose uvodi se vektor ugaone brzine

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

i vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, tj.

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k},$$

čiji su pravci normalni na ravan figure.

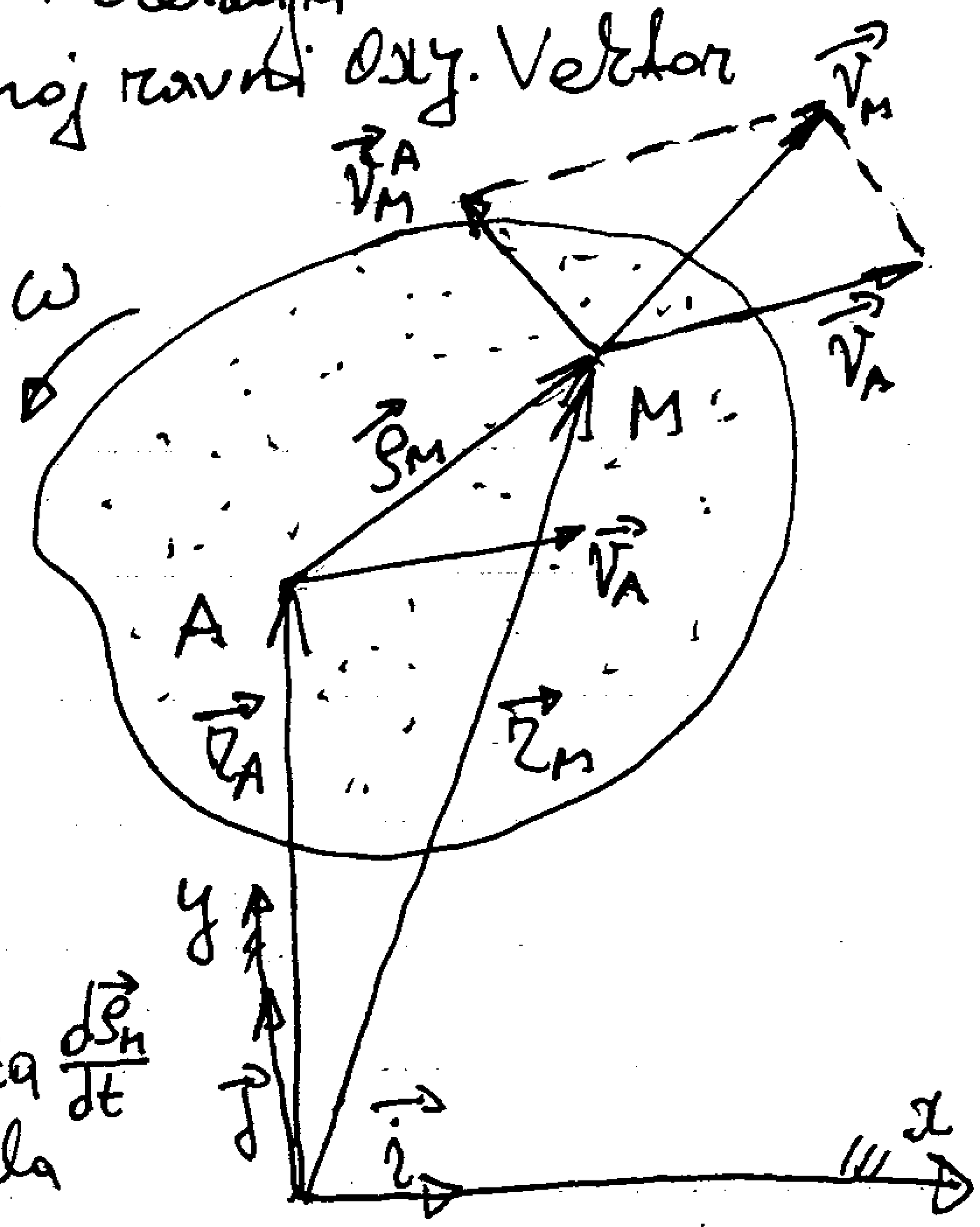


Važno je istaći da:

- kinematičke karakteristike translatorne komponente kretanja ($\vec{v}_A, \vec{a}_A$), očigledno, zavise od izbora pola A;
- kinematičke karakteristike obrtnog tijela kretanja (ω i ε) ne zavise od izbora pola A.

3.1 Brzine tačaka tijela pri ravanskom kretanju

Posmatrajmo kretanje ravne figure S u nepokretnoj ravni Oxy. Vektor položaja proizvoljne tačke M figure S je



$$\vec r_M = \vec r_A + \vec\rho_M, \quad (1)$$

gdje je $\vec r_A$ vektor položaja pola A, a $\vec\rho_M = \overrightarrow{AM}$ vektor položaja tačke M u odnosu na tačku A. Pošto vektor $\vec\rho_M$ spaja dvije tačke krutog tijela on je konstantnog inteziteta ($|\vec\rho_M| = \overline{AM} = const$), ali se mijenja po pravcu. Na osnovu definicije brzine tačke, biće

$$\vec v_M = \frac{d\vec r_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec r_A+\vec\rho_M) = \frac{d\vec r_A}{dt}+\frac{d\vec\rho_M}{dt}, \quad (2)$$

gdje je $\frac{d\vec r_A}{dt}=\vec v_A$ brzina tačke A. Druga komponenta $\frac{d\vec\rho_M}{dt}$ u izrazu (2) odgovara brzini tačke M pri kretanju tijela kojem je $\vec r_A = \overrightarrow{const}$, a takvo kretanje je obrtanje oko pola A (tj. oko ose koja prolazi kroz tačku A i upravna je na ravan kretanja) jer je $|\vec\rho_M| = const$. Ova komponenta brzine tačke M označava se sa $\vec v_M^A$ i naziva se brzina tačke M u odnosu na tačku A. Ona je određena Ojlerovim obrascem za brzinu tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose:

$$\vec v_M^A = \frac{d\vec\rho_M}{dt} = \vec\omega\times\vec\rho_M, \quad (3)$$

gdje je $\vec\omega$ vektor ugaone brzine ravnog kretanja tijela.

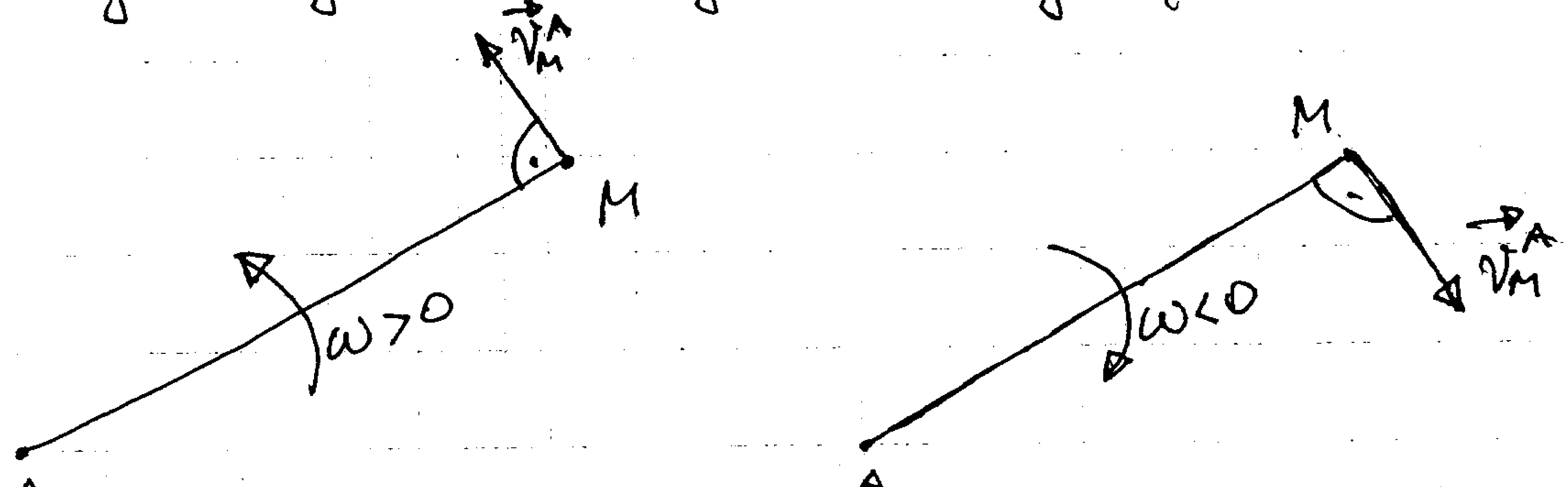
Vektor
$$\vec v_M^A = \vec\omega\times\vec\rho_M = \vec\omega\times\overrightarrow{AM}$$
je određen sledećim elementima:

— $v_M^A = |\vec\omega|\cdot\overline{AM}\cdot\underbrace{\sin\angle(\vec\omega,\overrightarrow{AM})}_{=1} = |\omega|\cdot\overline{AM}$,

tj. po intezitetu je jednak proizvodu inteziteta ugaone brzine i rastojanja tačke M od tačke A;

— leži u ravni kretanja i normalan je na pravac AM;

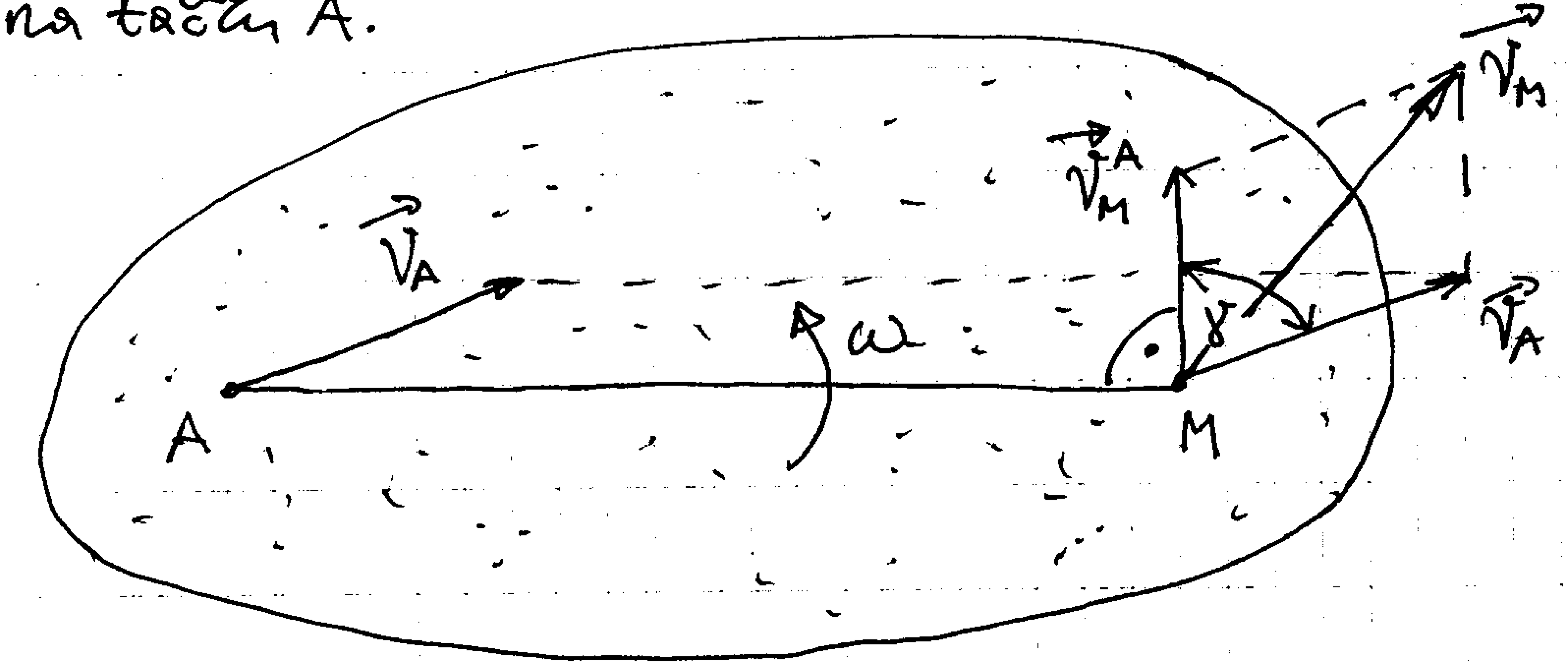
— smjer mu je određen smjerom obrtanja figure oko tačke A.



Prema tome, na osnovu (2) i (3) je

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_M^A, \quad \vec{v}_M^A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}} \qquad (4)$$

Ova relacija je poznata pod imenom "teorema o brzinama tačaka ravne figure" i glasi: brzina proizvoljne tačke M ravne figure S jednaka je vektorskom zbiru brzine pola A i brzine tačke M u odnosu na tačku A.

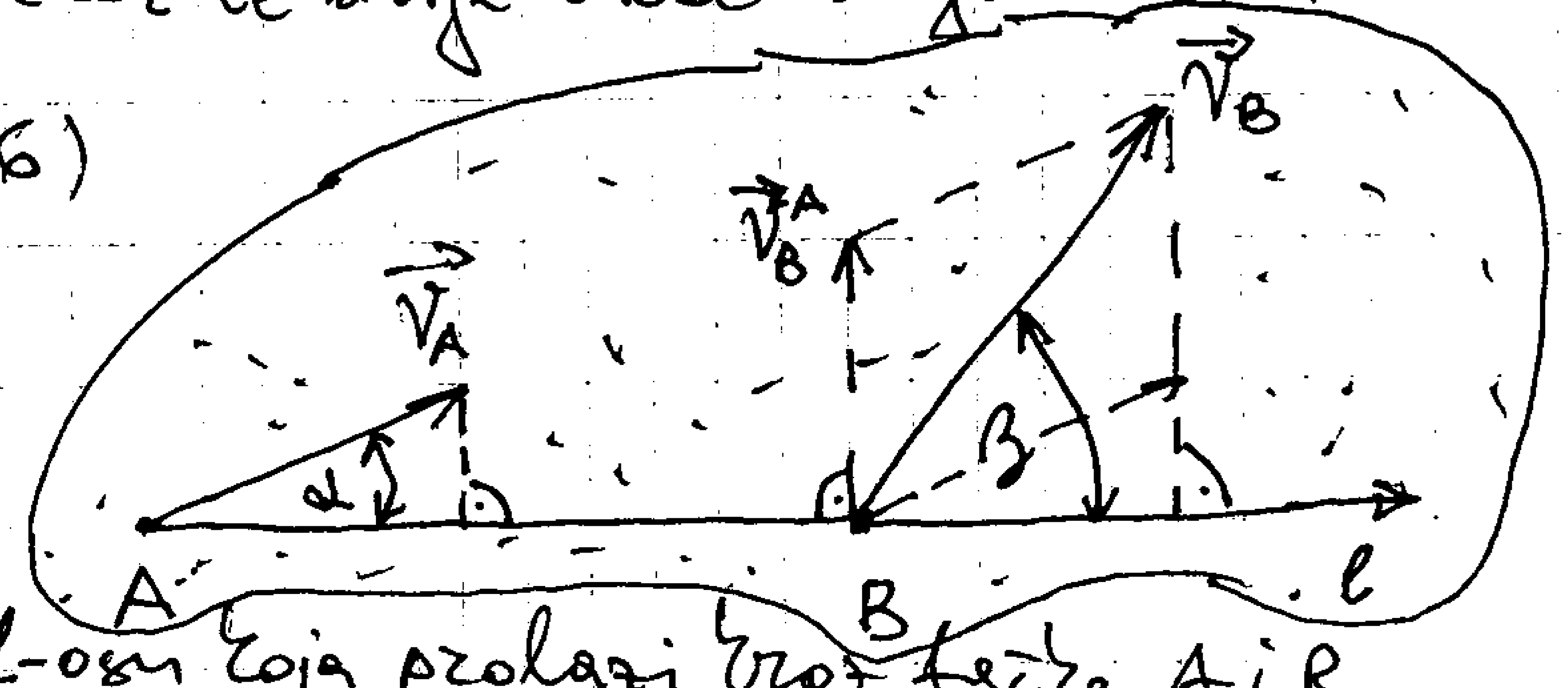


Intenzitet brzine tačke M određujemo pomoću kosinusne teoreme:

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + (v_M^A)^2 + 2 v_A v_M^A \cos\gamma} \qquad (5)$$

<u>Posledica teoreme o brzinama:</u> Projekcije brzina dvaju tačaka krutog tijela na osu koja prolazi kroz te dvije tačke su jednake:

$$\boxed{v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha} \qquad (6)$$



Zaista, brzina tačke B je određena relacijom $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$

pa projecirajući ovu jednakost na l-osu koja prolazi kroz tačke A i B, slijedi (6), jer je $v_{Bl}^A = 0$ $(\vec{v}_B^A \perp l)$.

<u>Trenutni pol (centar) brzina</u>

Trenutnim polom brzina naziva se tačka P ravne figure čija je brzina u datom trenutku jednaka nuli. Takva tačka u svakom trenutku postoji (i to samo jedna), pod uslovom da ravansko kretanje nije translatorno.

Ako trenutni pol brzina P usvojimo za pol ravne figure, onda je u datom trenutku brzina bilo koje tačke M:

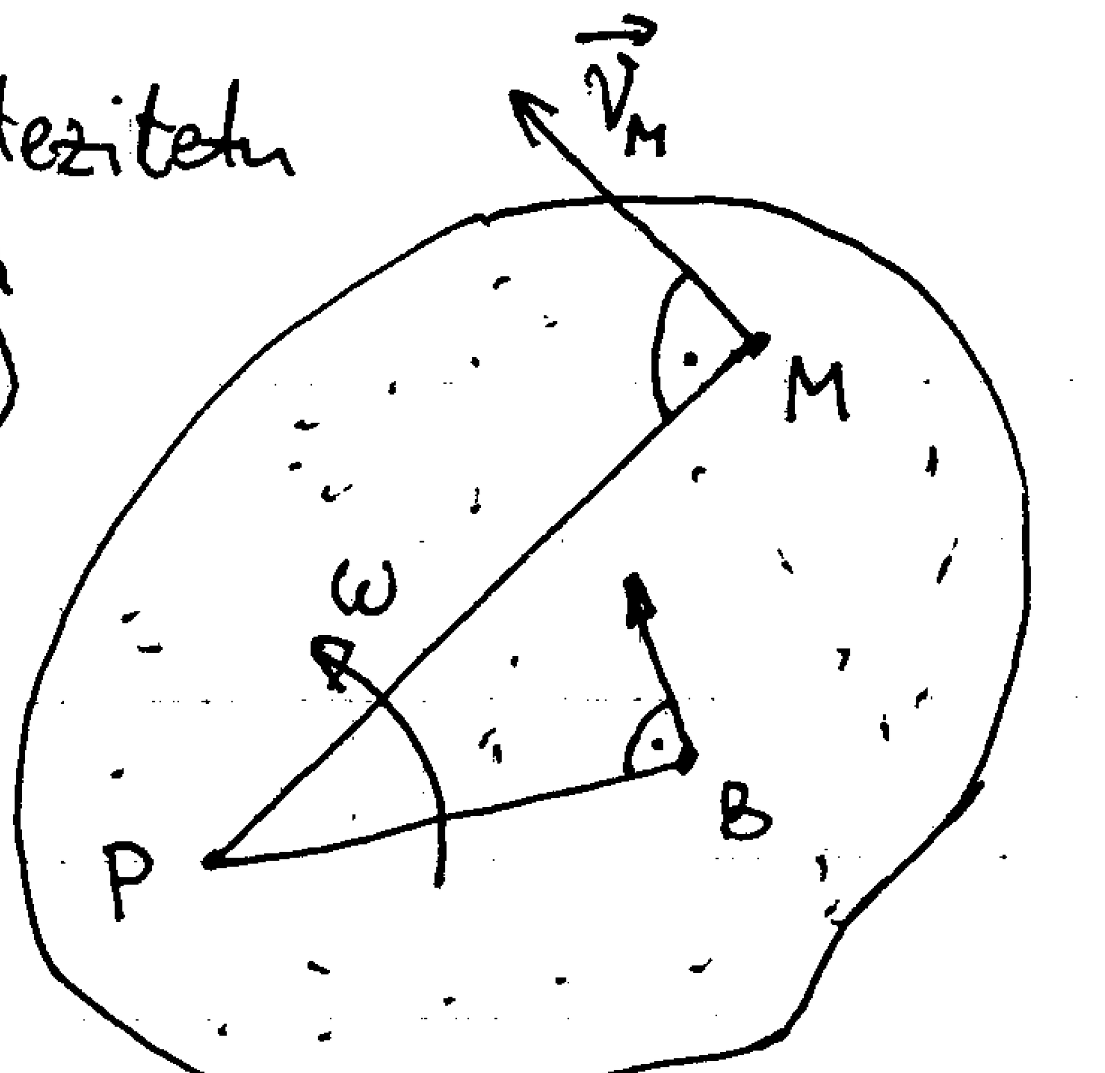
$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_M^P = \vec{v}_M^P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM}, \qquad (7)$$

jer je $\vec{v}_P = 0$.

Odavde slijedi da je brzina tačke M po intezitetu jednaka proizvodu rastojanja tačke do pola brzina P (trenutnog poluprečnika obrtanja $\overline{PM}$) i inteziteta ugaone brzine

$$v_M = \overline{PM}\cdot|\omega|, \qquad (8)$$

pravac joj je upravan na trenutni poluprečnik PM, a usmjerena je u stranu obrtanja ravne figure.



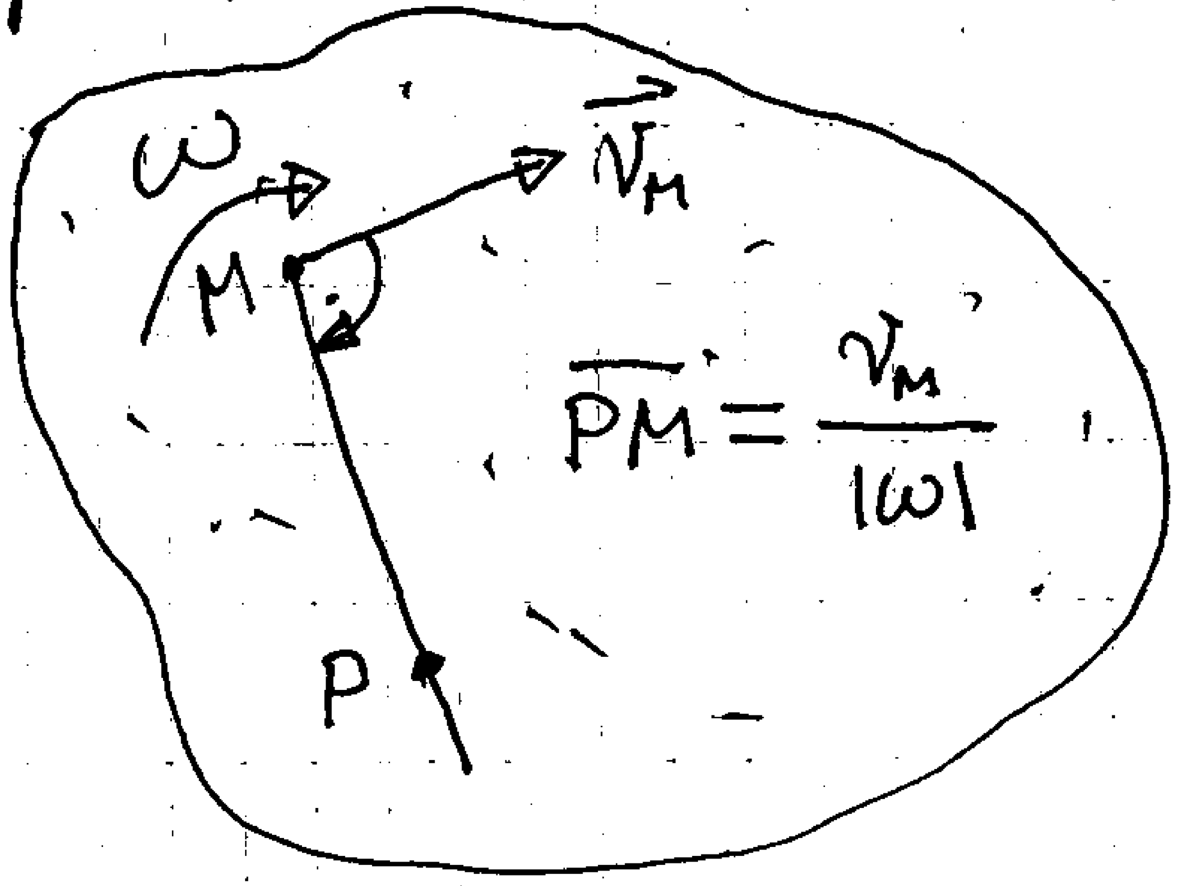
Prema tome, u datom trenutku vremena, brzine svih tačaka tijela pri ravanskom kretanju su raspoređene tako kao da se tijelo obrće oko pola brzina (tj. oko ose koja prolazi kroz pol brzina a upravna je na ravan figure. $v_M = \overline{PM}\cdot|\omega|$, $v_B = \overline{PB}\cdot|\omega|$

Važno je napomenuti da u opštem slučaju kretanja ravne figure mijenja se položaj pola brzina kako u odnosu na figuru, tako i u odnosu na nepokretnu ravan.

Određivanje pola brzina.

a) Poznato: $\vec{v}_M$, ω

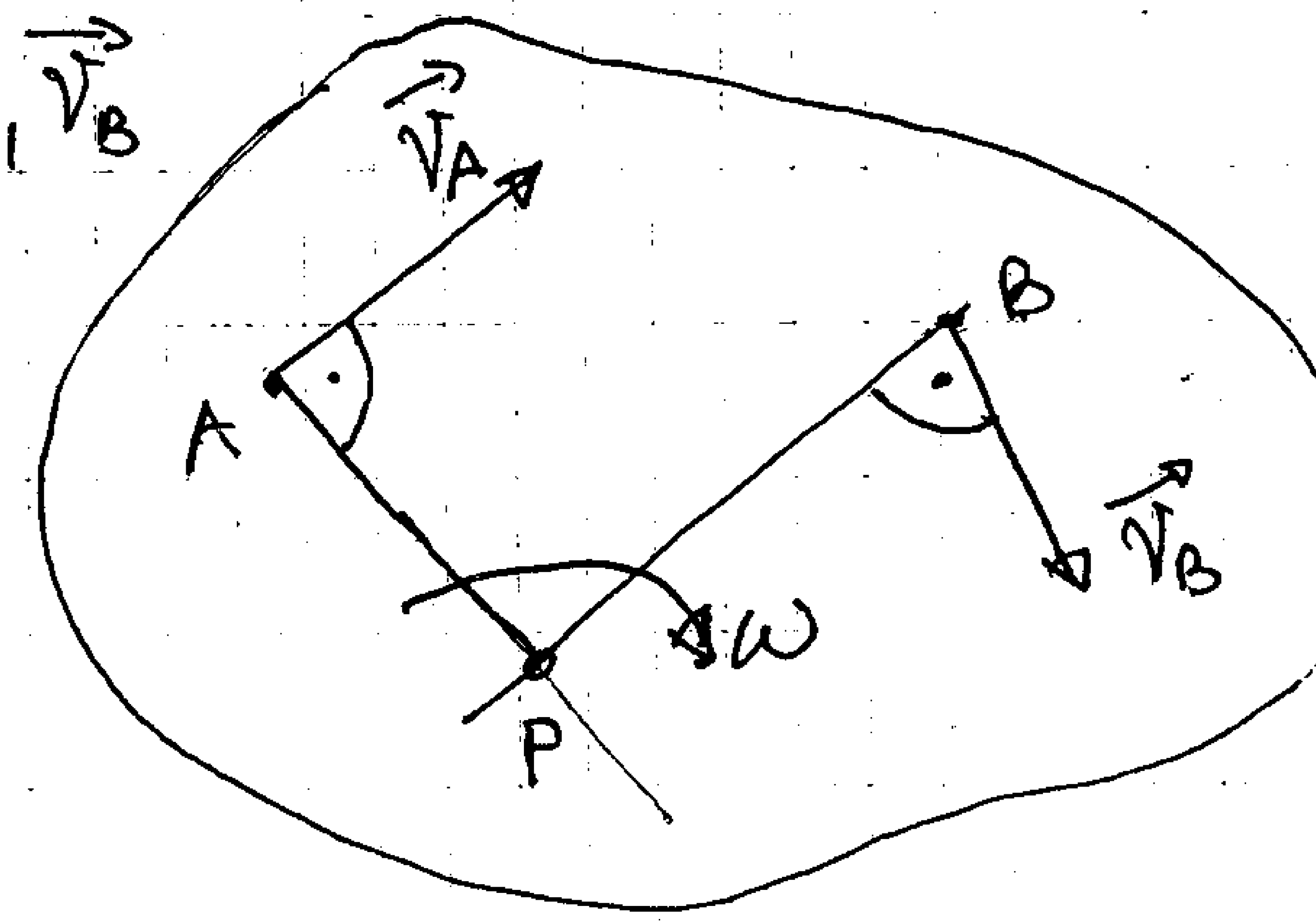
Pol brzina P se nalazi na normali na vektor brzine $\vec{v}_M$, povučenoj kroz tačku M, na rastojanju $\overline{MP} = v_M/|\omega|$ usmjerenom u smjeru dobijenim obrtanjem vektora $\vec{v}_M$ u smjeru ugaone brzine ω.



б) Poznate brzine dvaju tačaka: $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$

б1) $\vec{v}_A \nparallel \vec{v}_B$

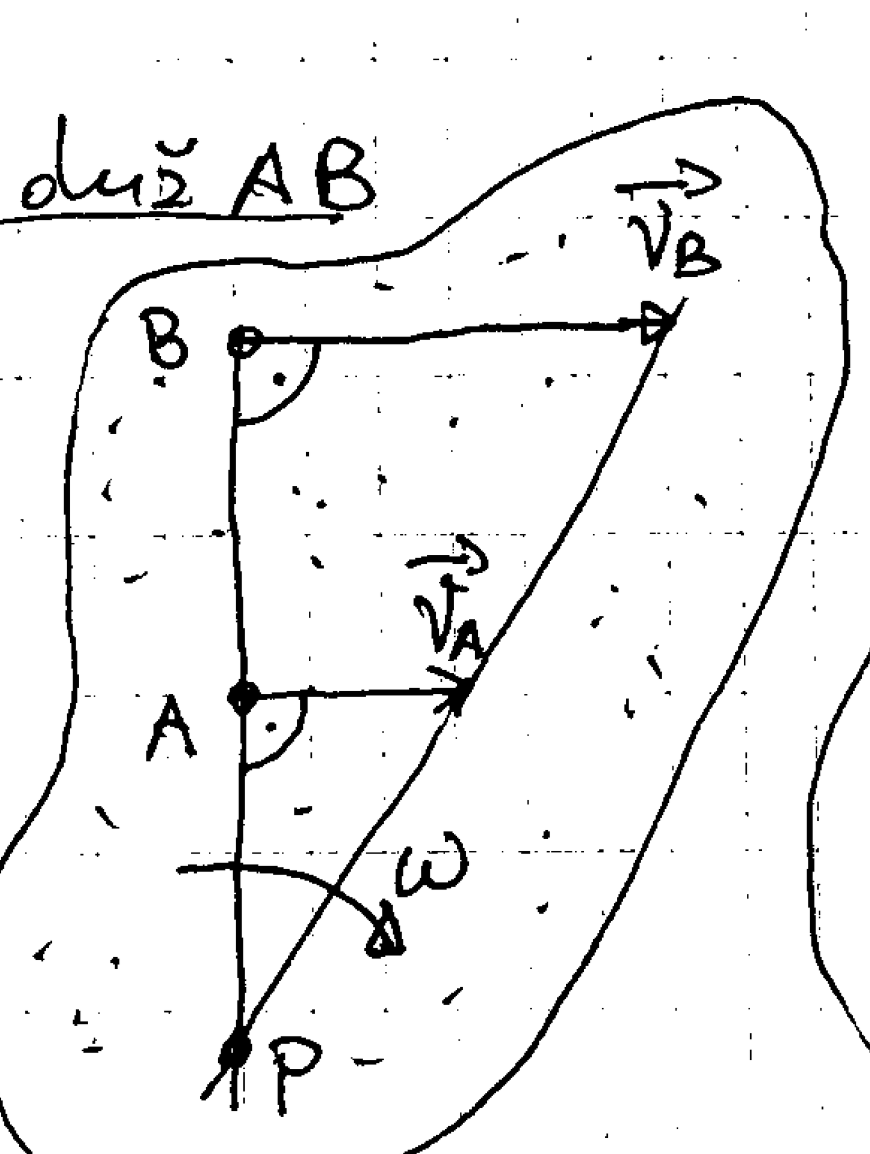
Pol brzina P nalazi se u presjeku normala na vektore brzina koje su povučene kroz tačke A i B.

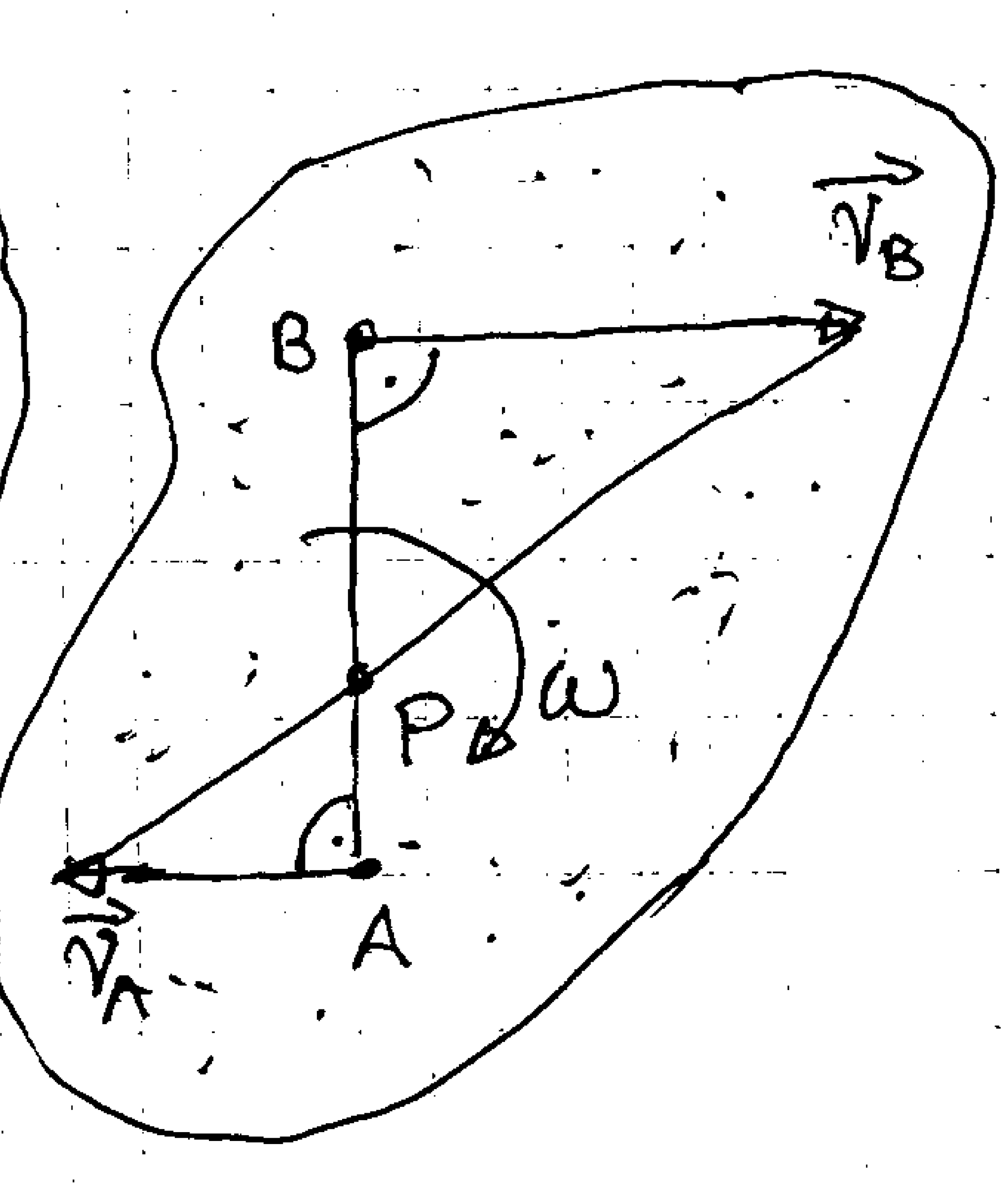


б2) $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$

б2-1) brzine su normalne na duž AB

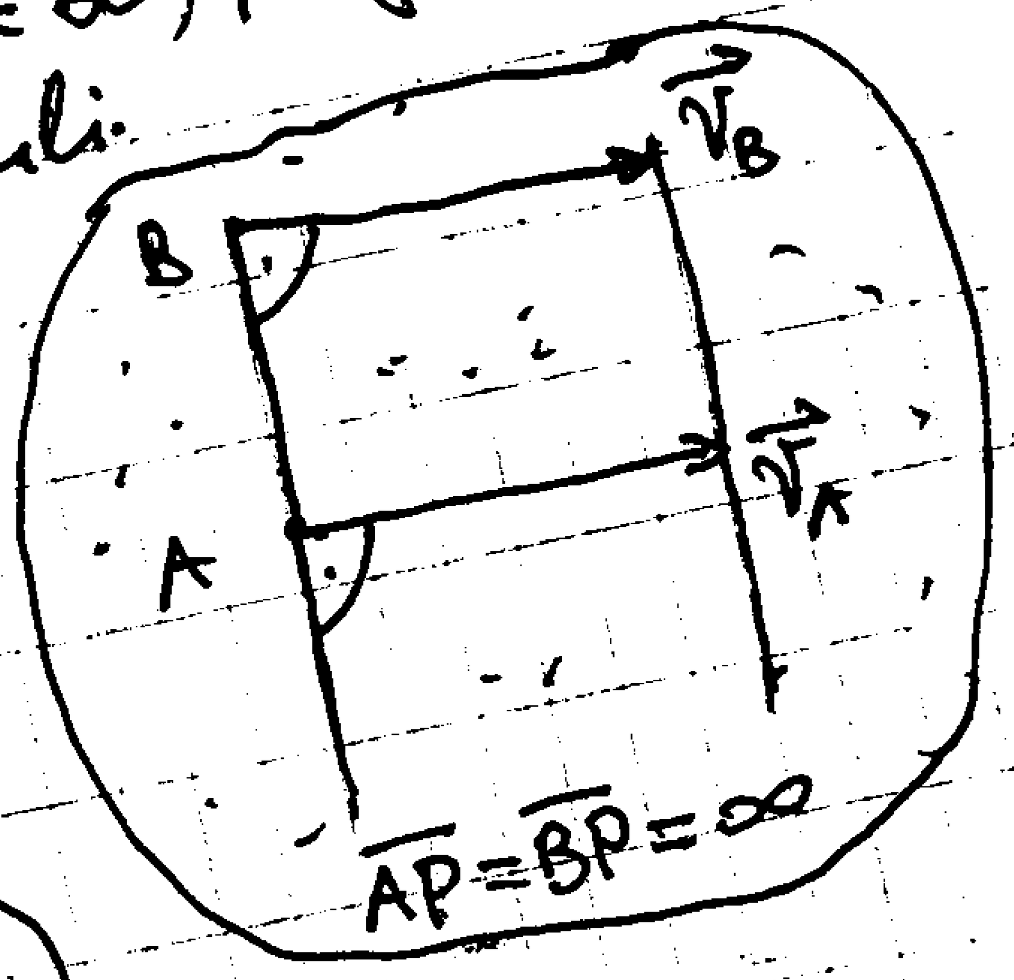
Pol brzina se nalazi u presjeku prave povučene kroz vrhove vektora brzina tačaka A i B i prave AB.





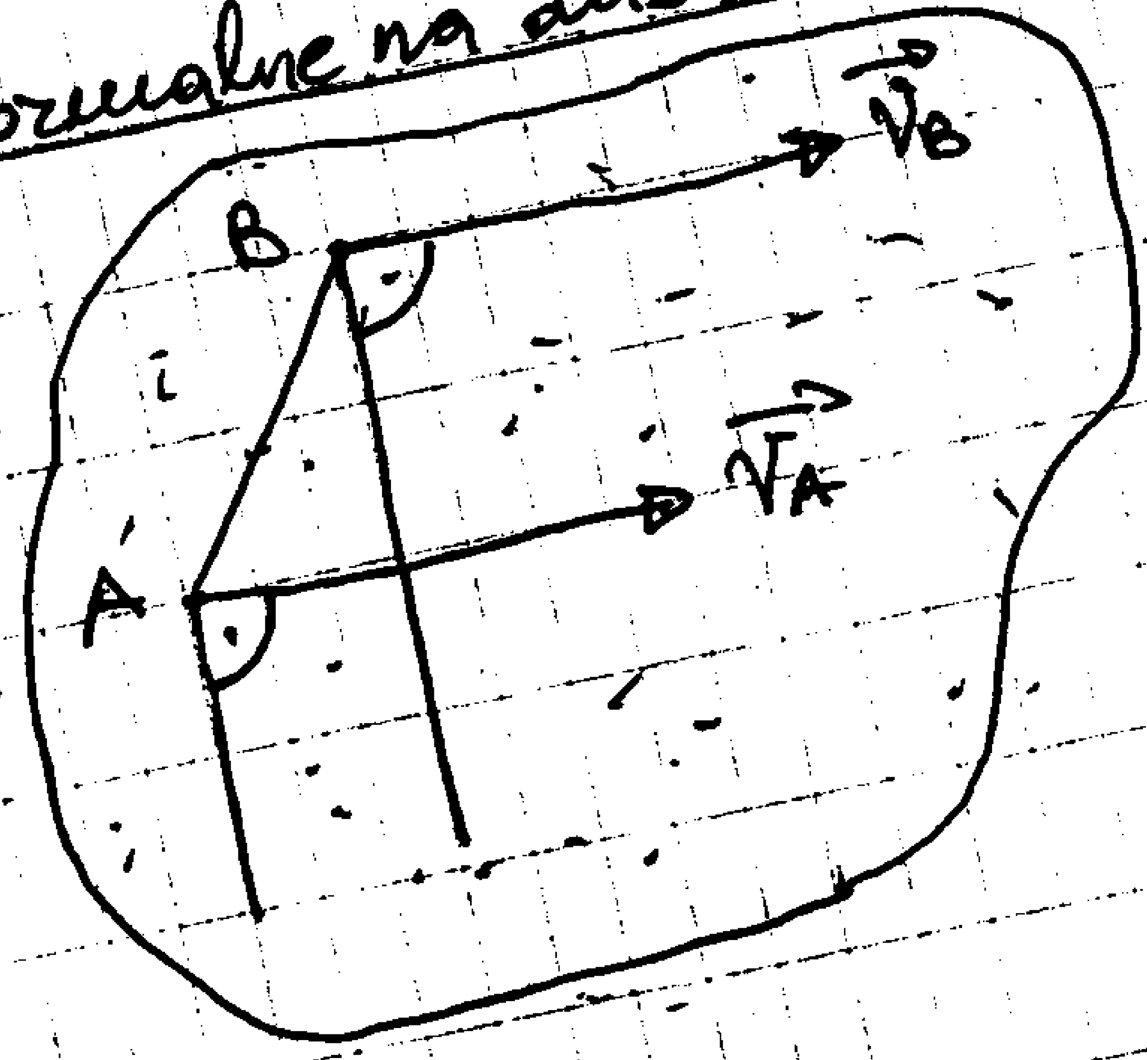
ako je $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ uočene prave se ne sijeku
nalazi u beskonačnosti ($\overline{AP} = \infty$, $\overline{BP} = \infty$) pa je $|\omega| = \frac{\ldots}{\overline{AP}}$
ugaona brzina je jednaka nuli.
trenutna ugaona

datom trenutku, vektori brzina
tijela jednaki, tj. tijelo ima trenu-
atorni raspored brzina.



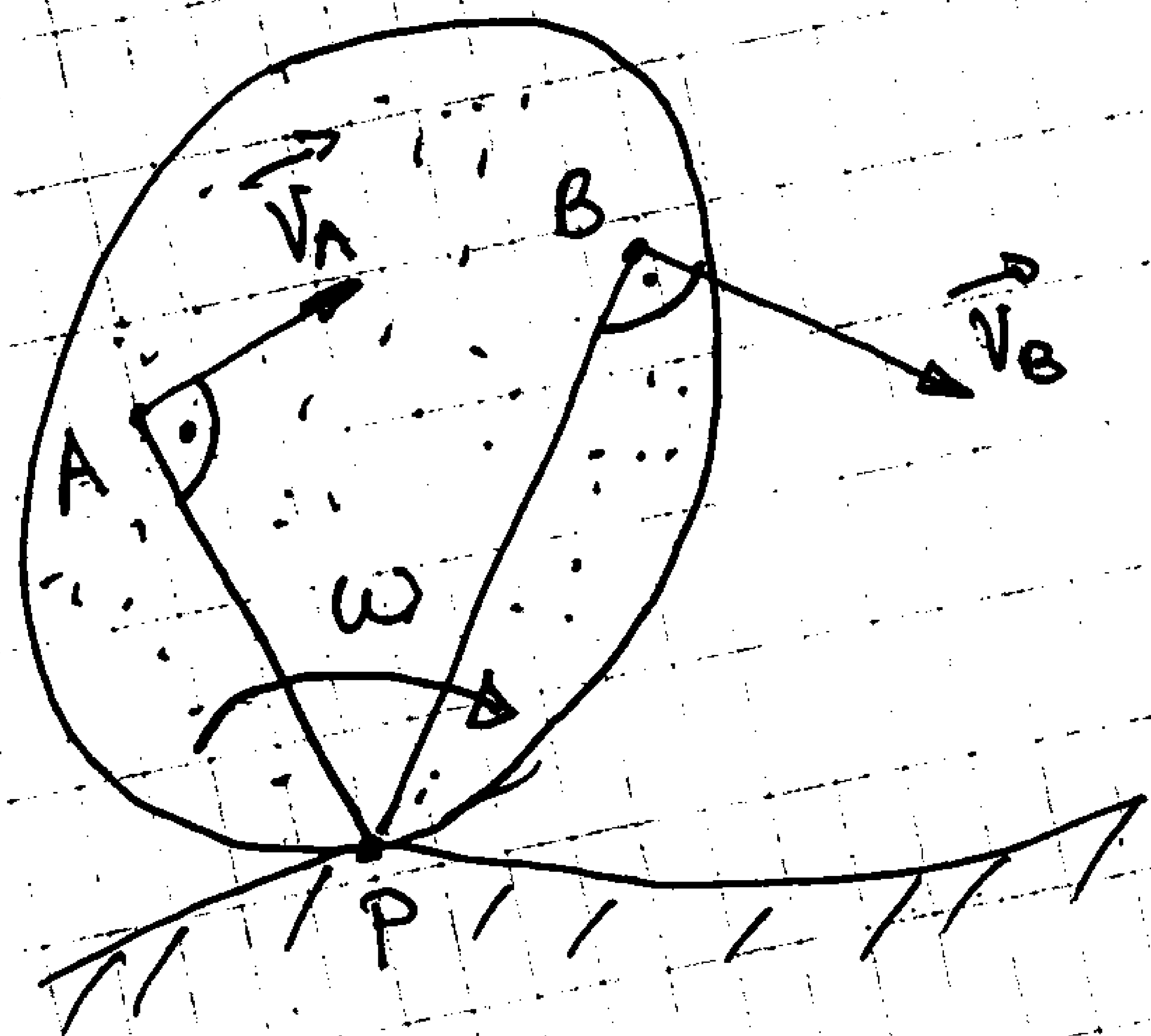
zine nisu normalne na duž AB

pol brzina
beskonačno-
$\omega = 0$ i tijelo
nutno transla-
spored brzina.

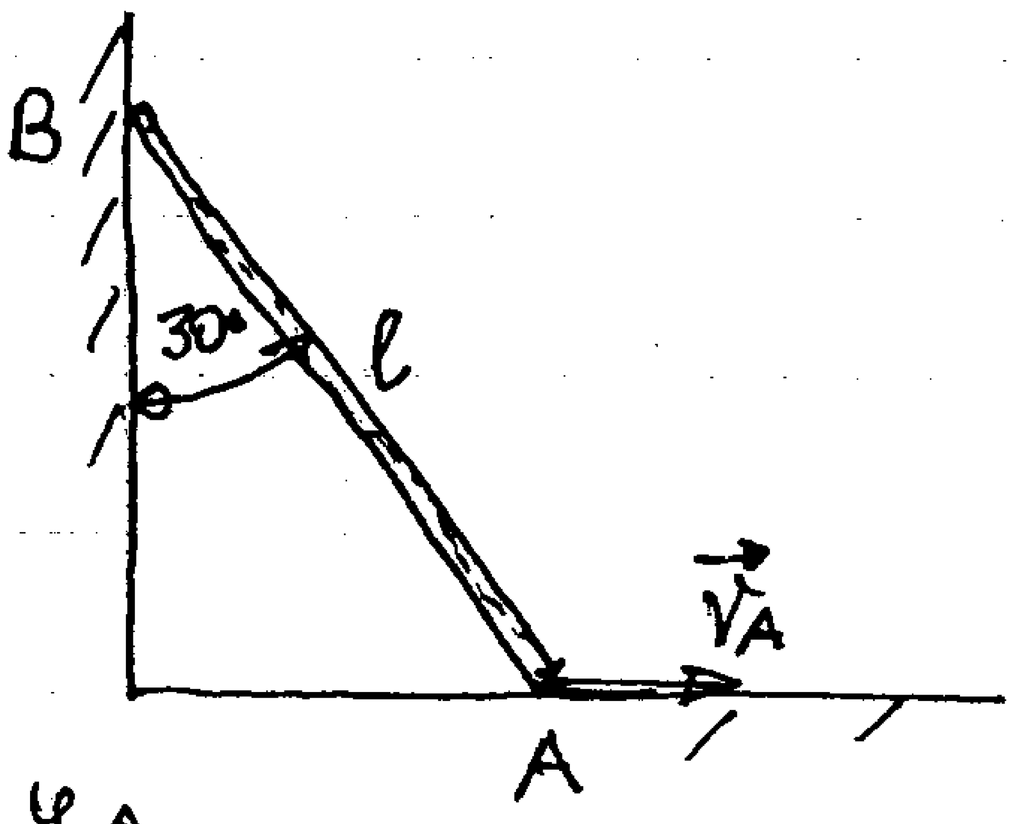


slučaj kotrljanja bez klizanja

že se da se kretanje u ravni ostvaruje kotrljanjem bez klizanja je-
tijela po drugom ako tačke u kontaktu na ovim tijelima imaju istu
nu. Ako je jedno tijelo nepokretno, onda je tačka dodira tre-
tni pol brzina za drugo pokretno tijelo



Primjer 1. Štap AB, dužine $l = 1m$, kreće se u vertikalnoj ravni tako da mu kraj A kliži po horizontalnom podu a kraj B po vertikalnom zidu. U datom trenutku, kada štap zaklapa sa vertikalnim zidom ugao od 30°, brzina kraja A štapa je $2\,\frac{m}{s}$. Odrediti brzinu kraja B, kao i ugaonu brzinu štapa u tom trenutku.

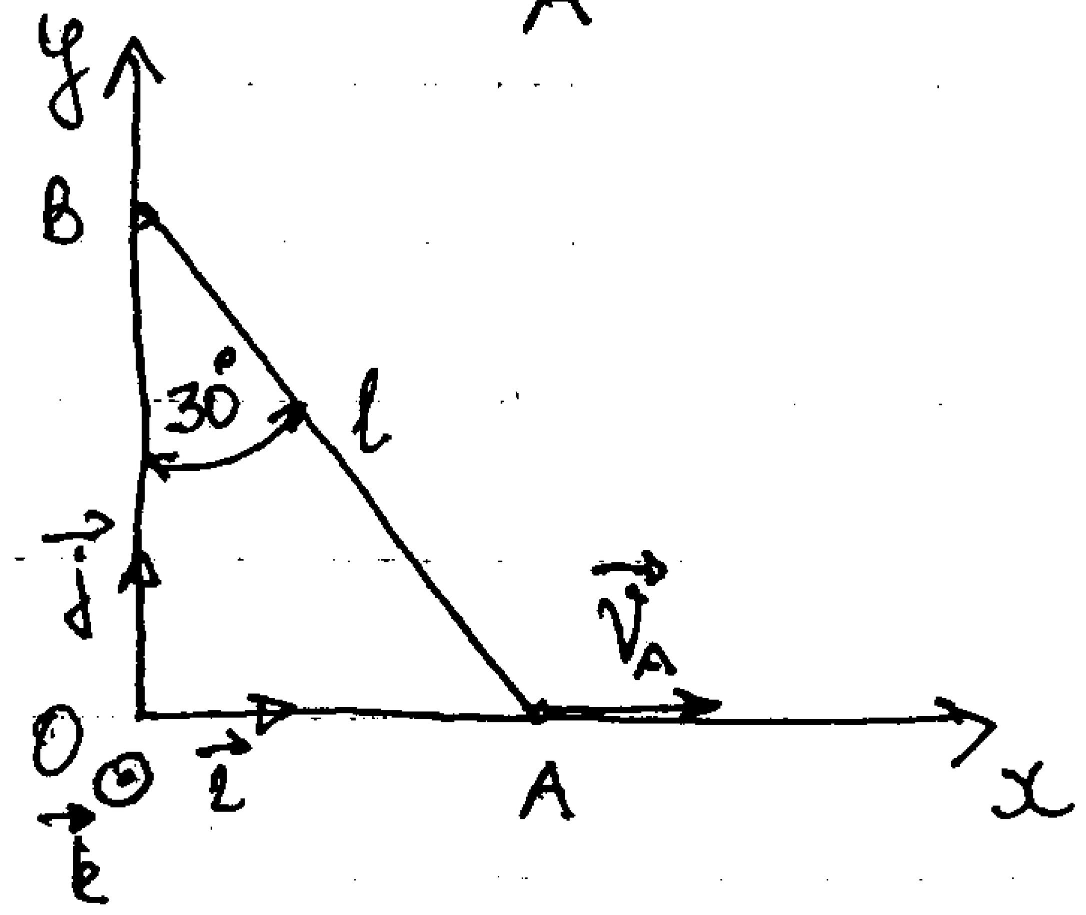


I Direktna primjena teoreme o brzinama

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A \qquad (*)$$

a) analitičko rješenje

Postavimo u ravni kretanja koor. sistem Oxy



$\vec{v}_A = v_{Ax}\vec{i} = 2\vec{i}$ [m/s]

$\vec{v}_B = v_{By}\vec{j}$ jer se tačka B kreće duž y-ose

$\vec{v}_B^A = \vec{\omega}\times\vec{AB}$, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, $\vec{AB} = -l\sin30^\circ\,\vec{i} + l\cos30^\circ\,\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt3}{2}\vec{j}$

$$\vec{v}_B^A = \omega\Big(-\frac{1}{2}\underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{=\vec{j}} + \frac{\sqrt3}{2}\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{=-\vec{i}}\Big) = -\frac{\sqrt3}{2}\omega\vec{i} - \frac{1}{2}\omega\vec{j}$$

$\vec{v}_B^A = v_{Bx}^A\vec{i} + v_{By}^A\vec{j}$, $v_{Bx}^A = -\frac{\sqrt3}{2}\omega$, $v_{By}^A = -\frac{1}{2}\omega$

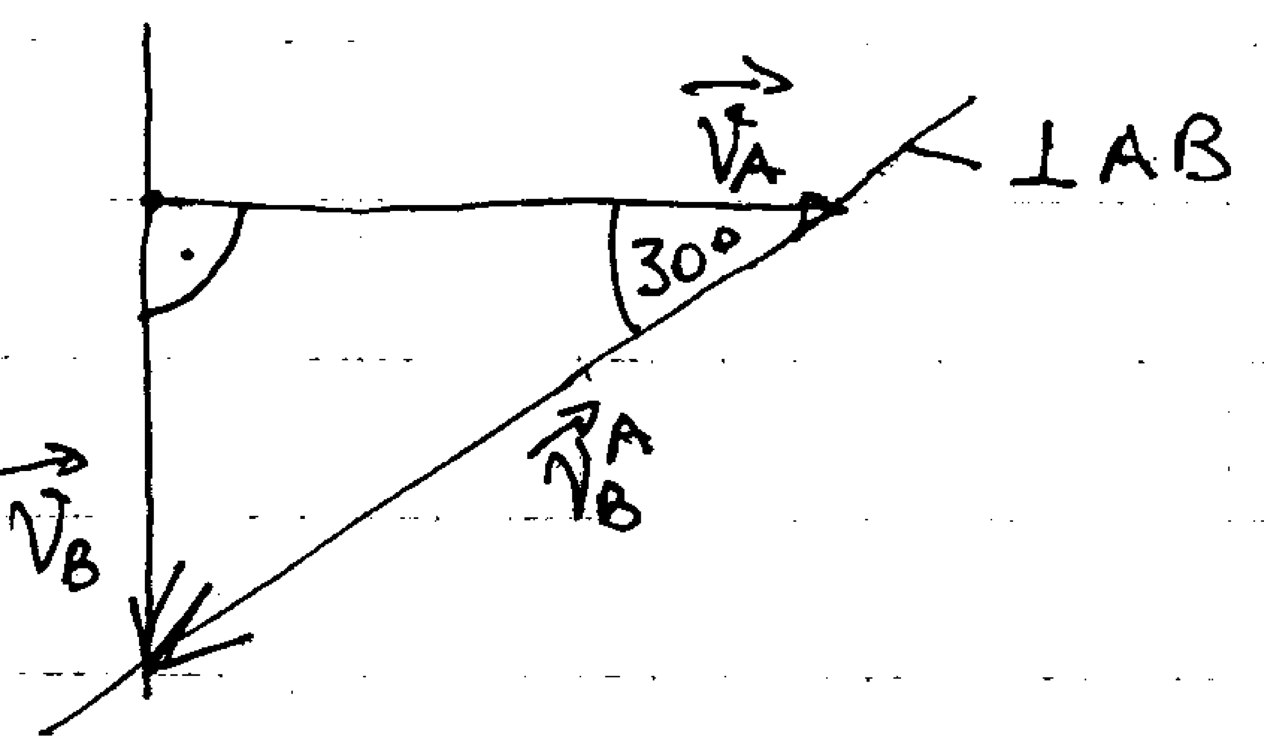
Kada projiciramo vektorsku jednačinu (*) na ose x i y dobijamo:

$x:\quad 0 = 2 - \frac{\sqrt3}{2}\omega \;\rightarrow\; \omega = \frac{4}{\sqrt3}\,\frac{rad}{s}$

$y:\quad v_{By} = -\frac{1}{2}\omega \;\rightarrow\; v_{By} = -\frac{2}{\sqrt3}\,\frac{m}{s}$, tj. $v_B = \frac{2}{\sqrt3}\,\frac{m}{s}\downarrow$

b) geometrijsko rješenje

$\vec{v}_B$ ima vertikalan pravac, a $\vec{v}_B^A$ pravac normalan na AB

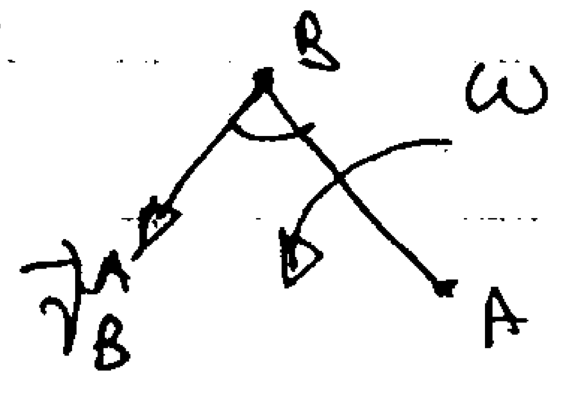


$\frac{v_B}{v_A} = \tan 30^\circ \rightarrow v_B = \frac{v_A}{\sqrt3} = \frac{2}{\sqrt3}\,\frac{m}{s}\downarrow$

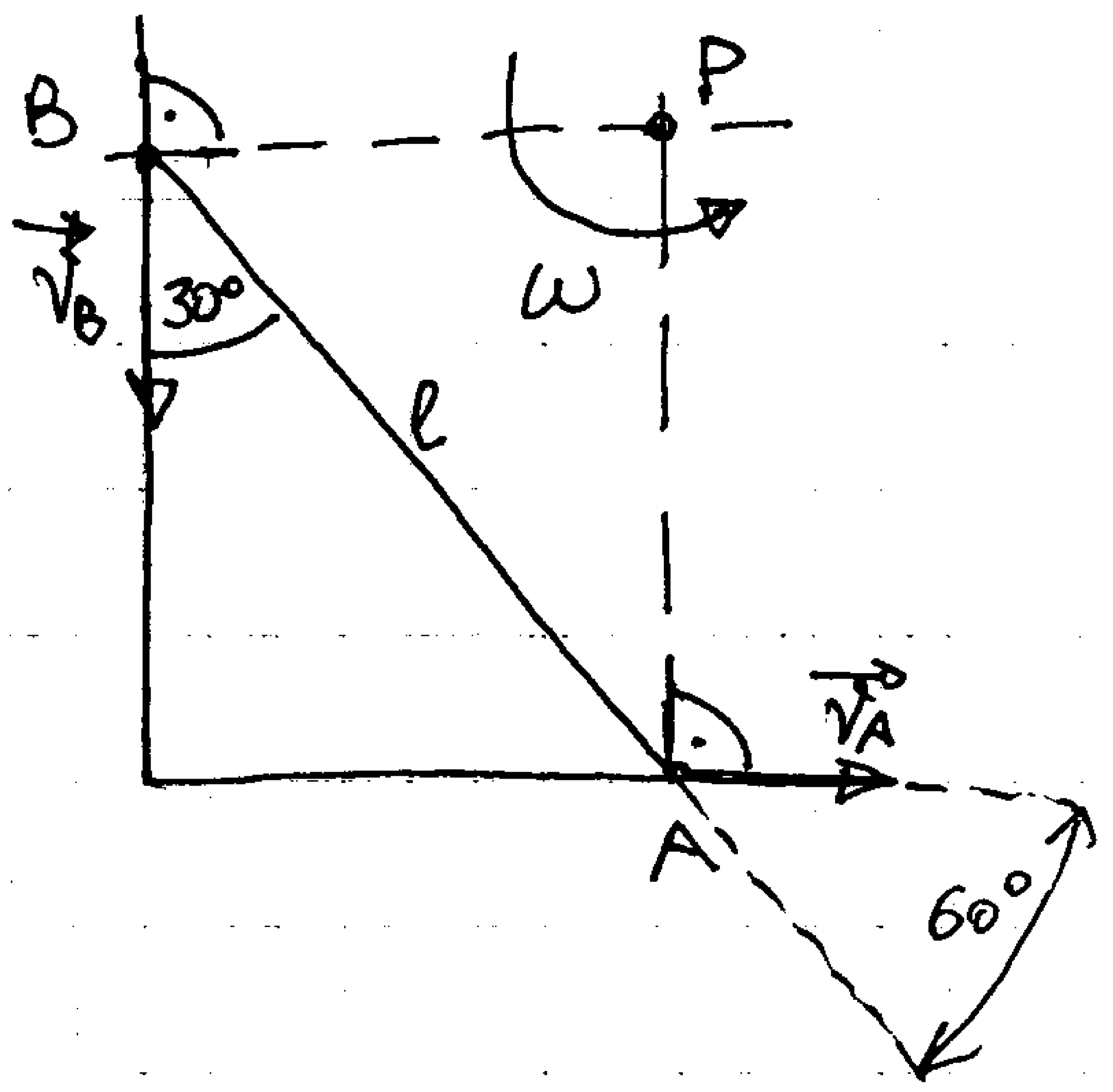
$\frac{v_A}{v_B^A} = \cos30^\circ \rightarrow v_B^A = \frac{4}{\sqrt3}\,\frac{m}{s}$

$v_B^A = \overline{AB}\,|\omega| = l|\omega| \rightarrow |\omega| = \frac{4}{\sqrt3}\,\frac{rad}{s}$

Konačno, na osnovu smjera brzine $\vec{v}_B^A$, slijedi $\omega = \frac{4}{\sqrt3}\,\frac{rad}{s}$



II Primjena pola brzina



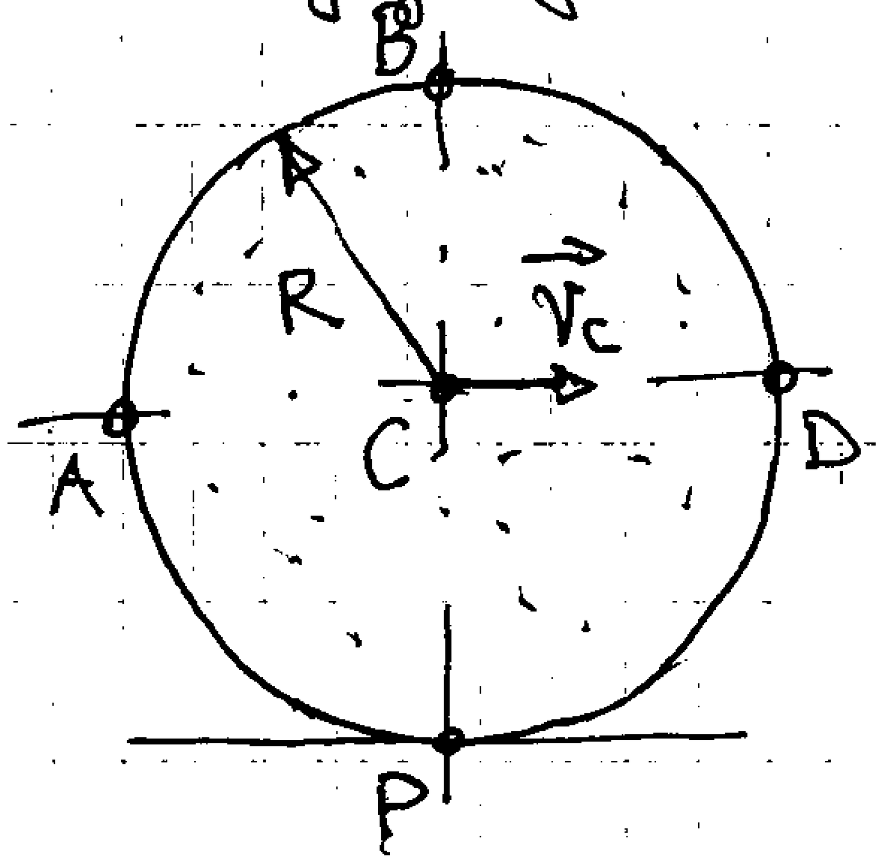
· Pošto su nam poznati pravci brzina tačaka A i B štapa, pol brzina P nalazi se u presjeku normala na odgovarajuće pravce, pa je $v_A = \overline{PA}|\omega| = l\cos 30^\circ|\omega|$,

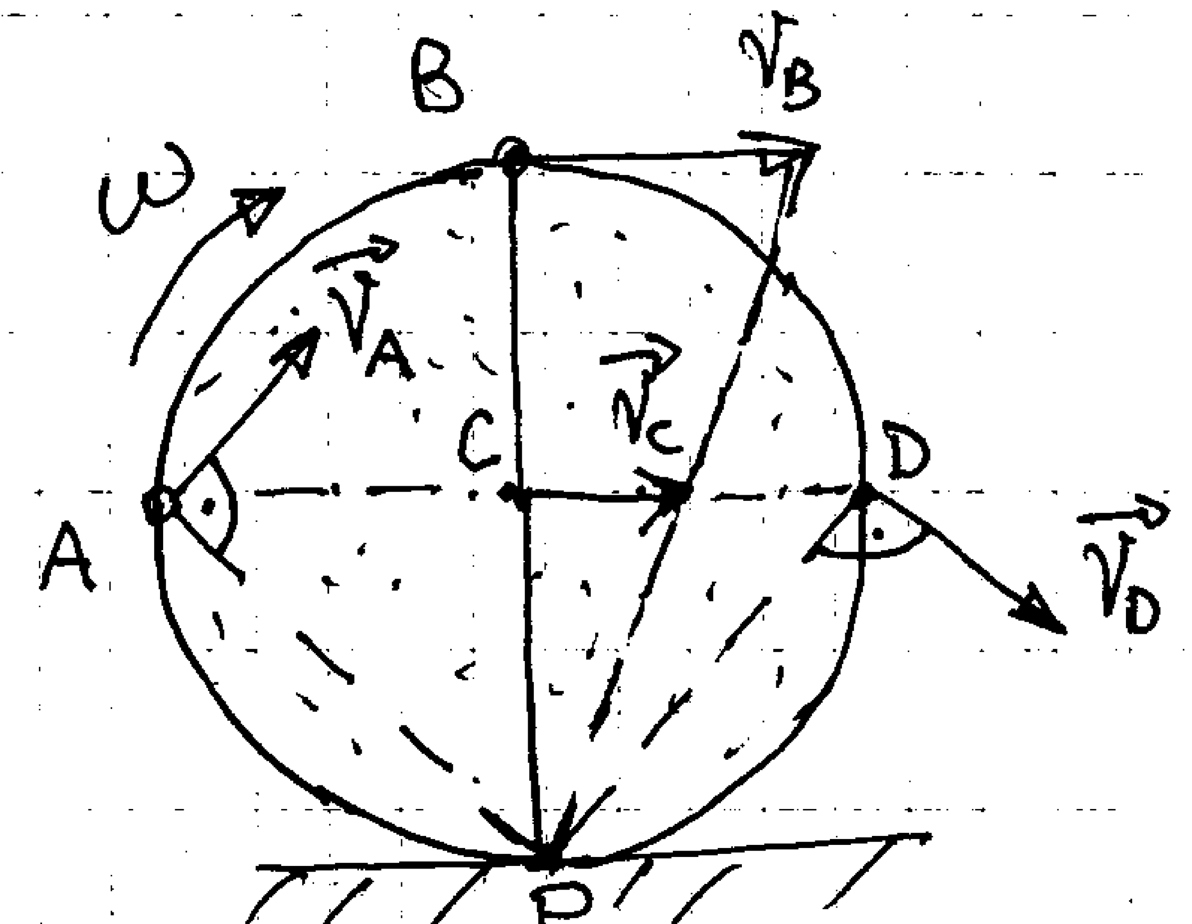
odakle je $|\omega| = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{rad}{s}$. Imajući u vidu smjer brzine $\vec v_A$, slijedi da je $\omega = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{rad}{s}$.

Dalje je $v_B = \overline{PB}|\omega| = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{m}{s} \downarrow$

N. Brzinu tačke B lako dobijamo i primjenom posledice teoreme o brzinama: $v_A\cos 60^\circ = v_B\cos 30^\circ$

Primjer 2. Točak poluprečnika R=1m kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj šini. Odrediti ugaonu brzinu točka, kao i brzine tačaka A, B i D na obodu točka kada je brzina njegovog centra $v_C = 1\,\frac{m}{s}$.





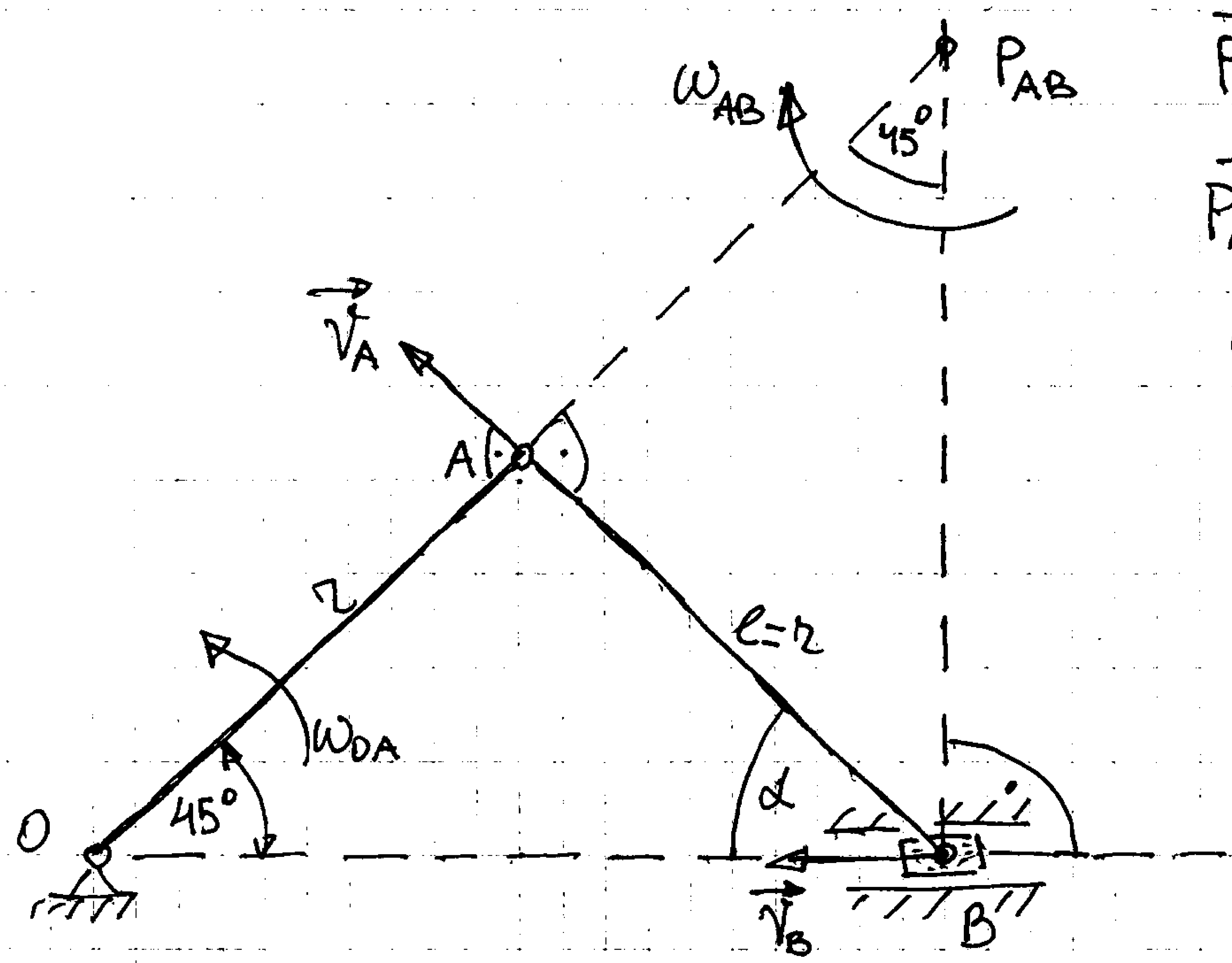
Zbog kotrljanja bez klizanja, pol brzina P je tačka na obodu točka koja je u kontaktu sa šinom. U odnosu na tačku P točak se obrće u smjeru kazaljke na satu (zbog datog smjera brzine tačke C).

$$v_C = \overline{PC}\,\omega = R\omega \longrightarrow \omega = \frac{v_c}{R} = 1\,\frac{rad}{s}$$

Brzine tačaka A, B i D su usmjerene na stranu obrtanja po normalama na trenutne poluprečnike PA, PB i PD. Kako je $\overline{PA} = \overline{PD} = R\sqrt{2}$ i $\overline{PB} = 2R$, intenziteti brzina ovih tačaka su:

$$v_A = \overline{PA}\,\omega = \sqrt{2}\,\frac{m}{s},\quad v_B = \overline{PB}\,\omega = 2\,\frac{m}{s},\quad v_D = \overline{PD}\,\omega = \sqrt{2}\,\frac{m}{s}.$$

Primjer 3. Krivaja OA klipnog mehanizma dužine $r=1\,m$ obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega_{OA}=4\,rad/s$. Dužina spojne poluge AB je $l=1\,m$. Kolika je brzina klizača B, a kolika ugaona brzina spojne poluge u položaju mehanizma prikazanom na slici.



Sa slike je:

$\overline{P_{AB}A}=r=1\,m$

$\overline{P_{AB}B}=\overline{OB}=2r\cos45^\circ=\sqrt{2}\,m$

$\alpha=45^\circ$

Primijetimo da tačka A istovremeno pripada krivaji OA i poluzi AB, a tačka B poluzi AB i klizaču B. Intezitet brzine tačke A, kao tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose je

$$v_A=\overline{OA}\,\omega_{OA},$$

a pravac i smjer kao na slici. Brzina klizača B ima pravac OB, a pošto tačka B pripada i poluzi, pol brzina P_{AB} za ravansko kretanje poluge AB nalazi se u presjeku normala na pravce brzina $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$. Intezitet brzine tačke A, kao tačke poluge koja izvodi ravansko kretanje je

$$v_A=\overline{P_{AB}A}\,\omega_{AB},$$

odakle nalazimo, vodeći računa o smjeru brzine $\vec{v}_A$,

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{\overline{P_{AB}A}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{P_{AB}A}}\omega_{OA}=4\,\frac{rad}{s}$$

Dalje je $v_B=\overline{P_{AB}B}\,\omega_{AB}=4\sqrt{2}\,\frac{m}{s}\leftarrow$

Ili, pošto projekcije brzina $\vec{v}_B$ i $\vec{v}_A$ na pravac BA moraju biti jednake: $v_B\cos\alpha=v_A\cos0^\circ\longrightarrow v_B=4\sqrt{2}\,\frac{m}{s}\leftarrow$

3.2 Ubrzanja tačaka tijela pri ravanskom kretanju

Ako relaciju

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_M^A = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AM}$$

koja povezuje vektore brzina dveju tačaka ravne figure, diferenciramo po vremenu dobićemo

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AM} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{AM}}{dt}, \qquad (1)$$

gdje su:

- $\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_M$ – vektor ubrzanja tačke M,
- $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$ – vektor ubrzanja tačke A,
- $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – vektor ugaonog ubrzanja ravne figure,
- $\frac{d\vec{AM}}{dt} = \vec{v}_M^A = \vec{\omega} \times \vec{AM}$ – brzina tačke M u odnosu na tačku A.

Sada se izraz (1) može napisati u obliku

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A, \quad \vec{a}_M^A = \vec{\varepsilon} \times \vec{AM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AM})}, \qquad (2)$$

gdje je $\vec{a}_A$ ubrzanje pola A, $\vec{a}_M^A = \vec{\varepsilon} \times \vec{AM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AM})$ ubrzanje koje bi tačka M imala kada bi se ravna figura obrtala oko nepokretnog pola A (odnosno oko ose koja prolazi kroz pol A a upravna je na ravan kretanja). Vektor $\vec{a}_M^A$ zove se vektor ubrzanja tačke M u odnosu na tačku A.

Relacija (2) je poznata pod imenom "teorema o ubrzanjima tačaka ravne figure" i glasi: ubrzanje proizvoljne tačke M tijela pri ravnom kretanju jednako je vektorskom zbiru ubrzanja pola A i ubrzanja tačke M u odnosu na tačku A.

Ubrzanje tačke M u odnosu na tačku A, na isti način kao kod obrtanja oko nepokretne ose, razlaže se na dvije komponente:

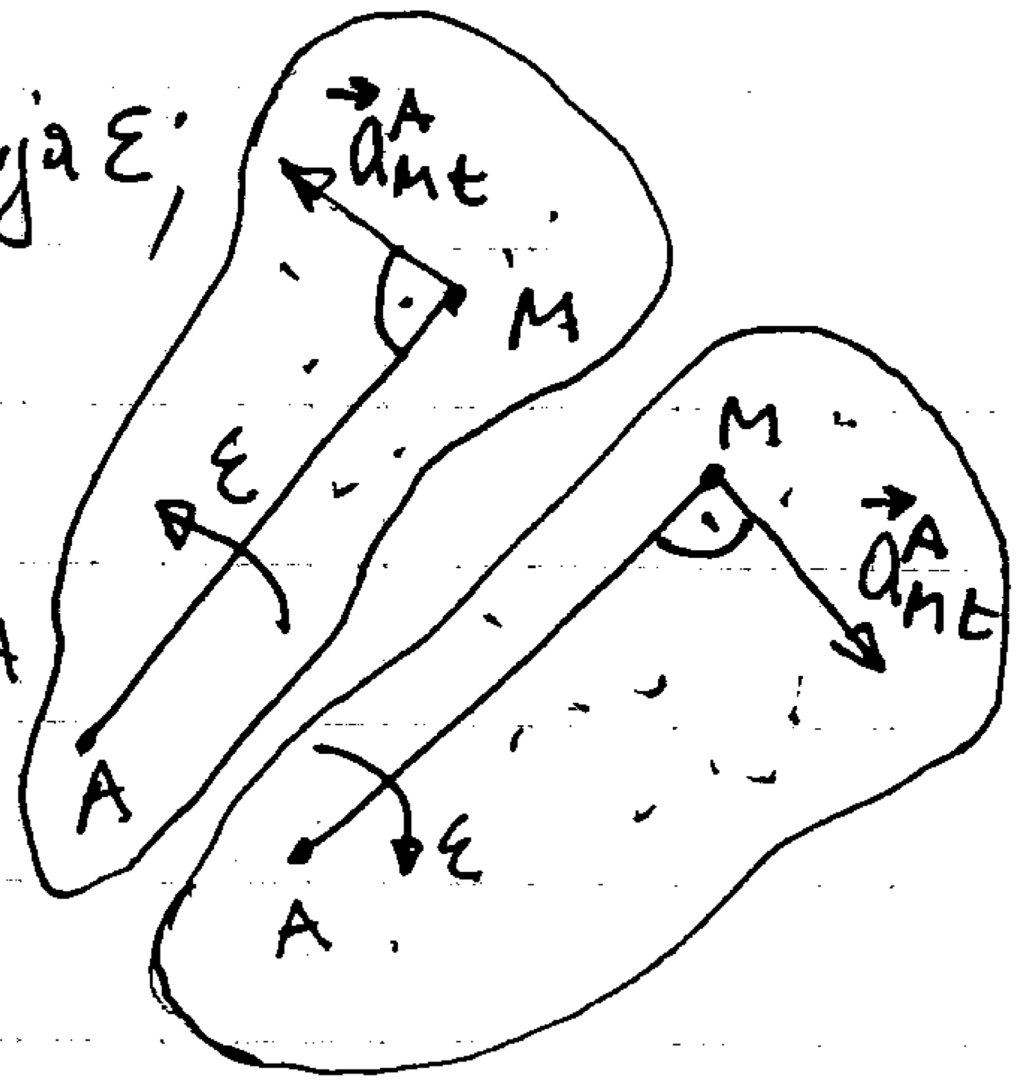
$$\vec{a}_M^A = \vec{a}_{Mt}^A + \vec{a}_{Mn}^A$$

gdje je $\vec{a}_{Mt}^A = \vec{\varepsilon} \times \vec{AM}$ tangencijalna, a $\vec{a}_{Mn}^A = \vec{\omega} \times \vec{v}_M^A = (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AM})$ normalna komponenta vektora $\vec{a}_M^A$.

Elementi tangencijalne komponente $\vec{a}^{A}_{Mt}$ su:

- leži u ravni figure upravno na pravac AM;
- smjer mu je određen smjerom ugaonog ubrzanja ε;
- intenzitet mu je

$$|a^A_{Mt}| = \overline{AM}\cdot|\varepsilon|\underbrace{\sin\angle(\vec{\varepsilon},\overrightarrow{AM})}_{=1} = \overline{AM}\cdot|\varepsilon|,$$

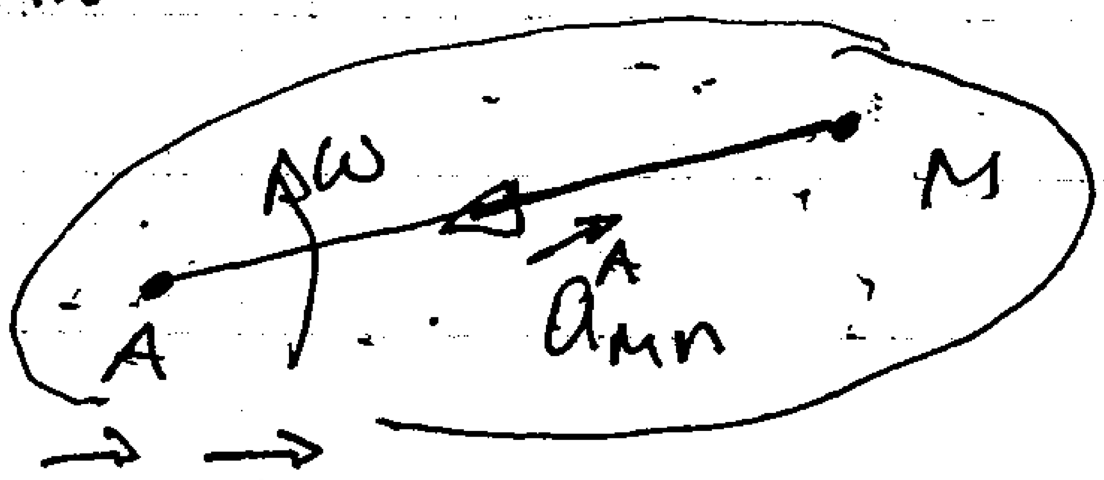


tj. jednak je proizvodu rastojanja tačke M od tačke A i intenziteta ugaonog ubrzanja tijela.

Koristeći pravilo o dekompoziciji dvostrukog vektorskog proizvoda ($\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$) izraz za $\vec{a}^A_{Mn}$ se svodi na sledeći oblik

$$\vec{a}^A_{Mn} = \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{AM}) - \overrightarrow{AM}\omega^2, \text{ tj}$$

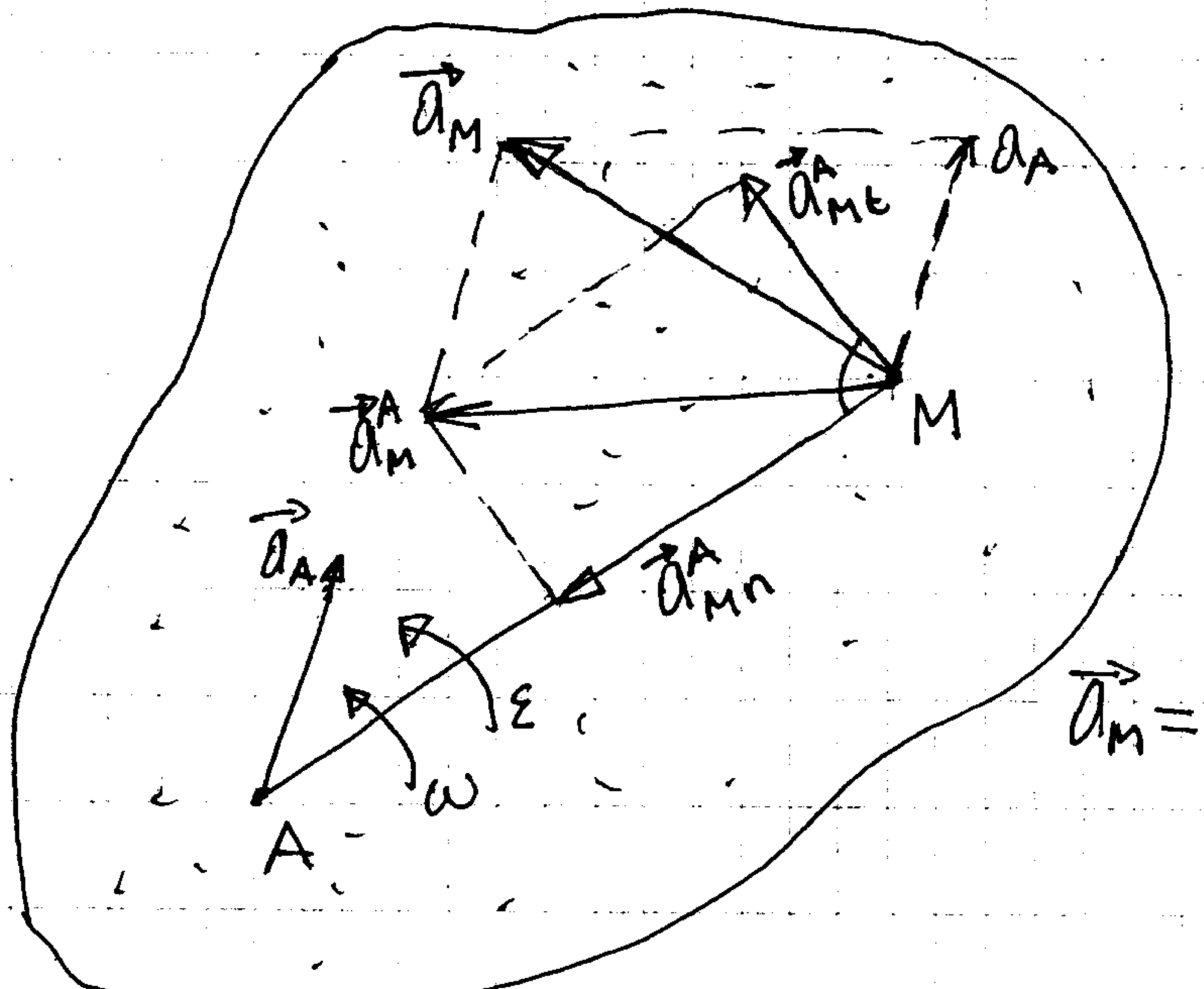
$$\vec{a}^A_{Mn} = -\omega^2\overrightarrow{AM},$$



jer je, zbog ortogonalnosti vektora $\vec{\omega}$ i $\overrightarrow{AM}$, $\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

Znači, normalna komponenta ubrzanja tačke M u odnosu na tačku A uvijek je usmjerena od tačke M ka polu A, dok je njen intenzitet jednak proizvodu rastojanja tačke M do tačke A i kvadrata ugaone brzine tijela

$$a^A_{Mn} = \overline{AM}\cdot\omega^2$$

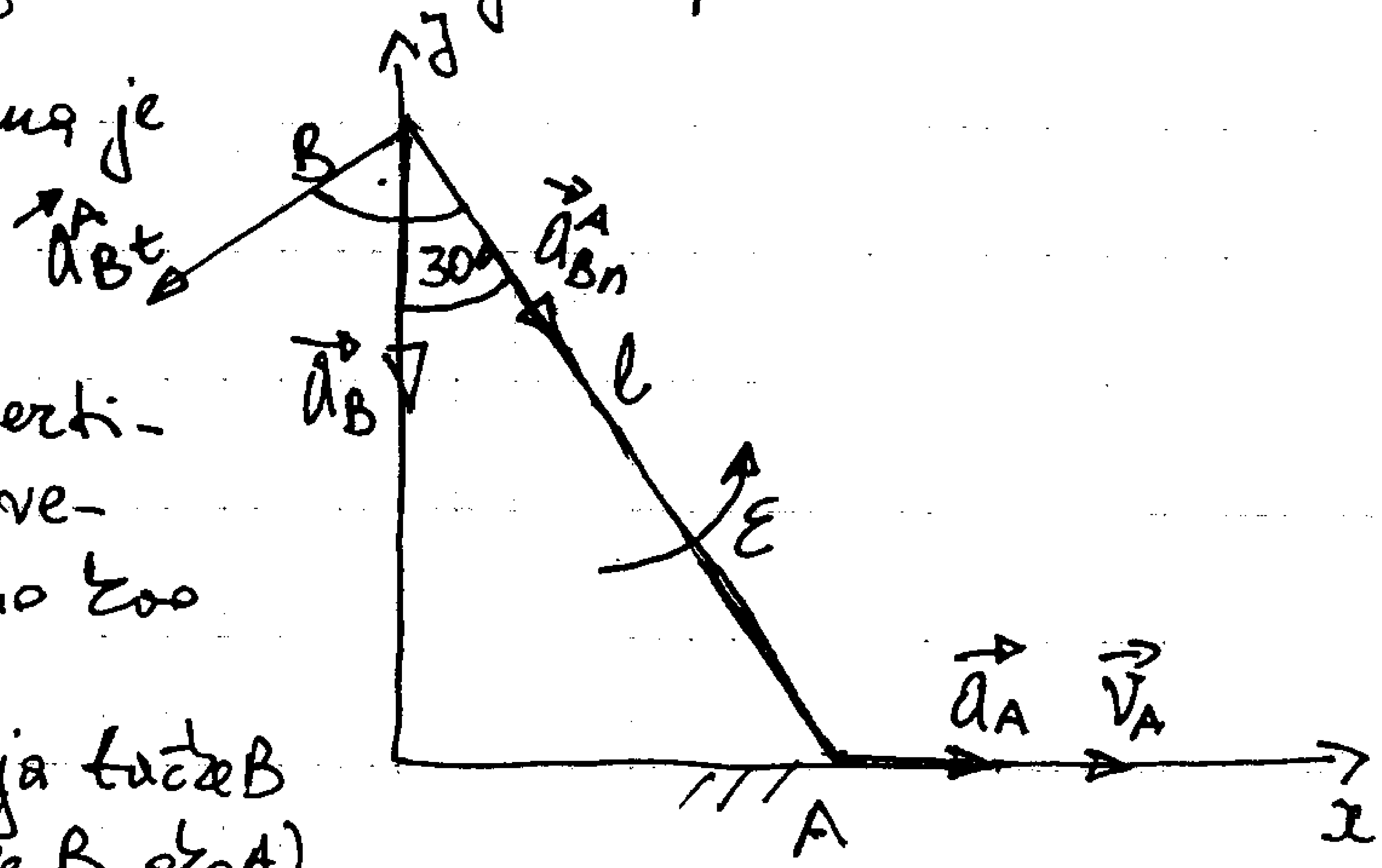


$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^A_M, \quad \vec{a}^A_M = \vec{a}^A_{Mt} + \vec{a}^A_{Mn}$$

Primjer 4. U primjeru 1, uzimajući da je ubrzanje tačke A, $a_A = \frac{1}{3}\frac{m}{s}$, odrediti ubrzanje tačke B i ugaono ubrzanje štapa.

Na osnovu teoreme o ubrzanjima je

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^A_{Bt} + \vec{a}^A_{Bn}$$



Tačka B se kreće pravolinijski po vertikalnoj osi pa je pravac vektora $\vec{a}_B$ vertikalan, a smjer mu pretpostavimo kao na slici.

Normalna komponenta ubrzanja tačke B u odnosu na tačku A (ubrzanja tačke B oko A) usmjerena je od tačke B ka tački A i ima intezitet

$$a^A_{Bn} = \omega^2 \overline{AB} = \omega^2 l = \frac{16}{3}\frac{m}{s^2},$$

jer je u Primjeru 1 nađeno da je $\omega = 4/\sqrt{3}\ \frac{rad}{s}$.

Tangencijalna komponenta ubrzanja tačke B oko A ima pravac normalan na pravac AB i za pretpostavljeni smjer ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ usmjereno je kao na slici.

$$a^A_{Bt} = \varepsilon \overline{AB} = \varepsilon l = \varepsilon \ \frac{m}{s^2}$$

Skalarne jednačine koje dobijamo projiciranjem gornje vektorske jednačine na horizontalni i vertikalni pravac su:

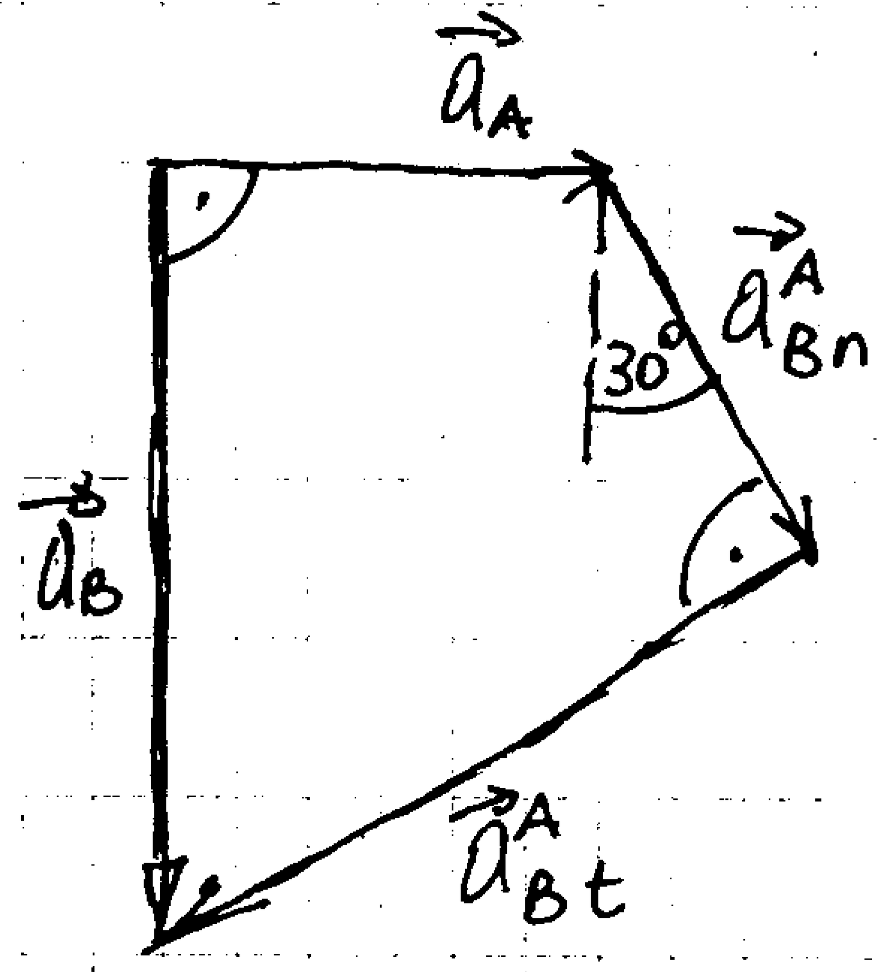
$$x: \ 0 = a_A - a^A_{Bt}\sin 60^\circ + a^A_{Bn}\sin 30^\circ,$$

$$y: -a_B = -a^A_{Bt}\cos 60^\circ - a^A_{Bn}\cos 30^\circ,$$

odnosno

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon + \frac{8}{3},$$

$$a_B = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

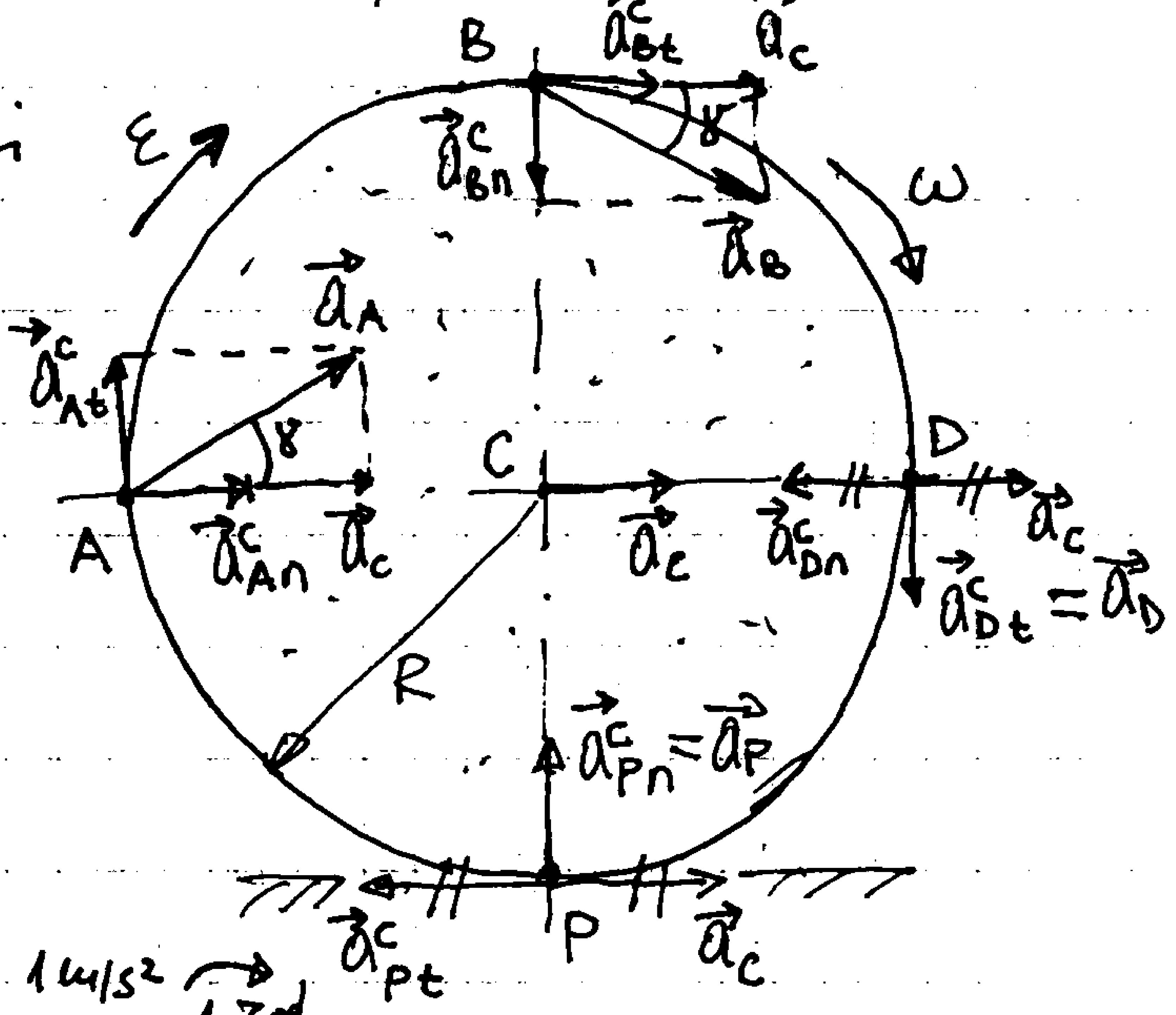


odakle dobijamo:

$$\varepsilon = 2\sqrt{3}\ rad/s^2$$

$$a_B = \frac{11}{3}\sqrt{3}\ \frac{m}{s^2}$$

Primjer 5. Ako je u primjeru 2 ubrzanje centra točka $1\,\frac{m}{s^2}$ u smjeru njegove brzine, odrediti ubrzanja tačaka A, B, D i P na obodu točka.



Centar točka se kreće pravolinijski i u proizvoljnom (svakom) trenutku vremena je

$$v_C = R\omega.$$

Odavde, slijedi $\frac{dv_C}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$,

odnosno

$$a_C = R\varepsilon,$$

tj.

$$\varepsilon = \frac{a_C}{R}$$

U datom trenutku vremena je $\varepsilon = \frac{1\,m/s^2}{1\,m} = 1\,\frac{rad}{s^2}$,

i $\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{1\,m/s}{1\,m} = 1\,\frac{rad}{s}$

Na osnovu teoreme o ubrzanjima, ubrzanje neke tačke M na obodu točka određeno je formulom

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_M^C, \quad \vec{a}_M^C = \vec{a}_{Mt}^C + \vec{a}_{Mn}^C$$

Tangencijalne komponente ubrzanja tačaka A, B, D i P u odnosu na C su po intezitetu jednake i usmjerene upravno na odgovarajuće poluprečnike u stranu ugaonog ubrzanja:

$$a_{At}^C = a_{Bt}^C = a_{Dt}^C = a_{Pt}^C = R\varepsilon = 1\,\frac{m}{s^2}$$

Normalne komponente ubrzanja tačaka A, B, D i P oko C su po intenzitetu jednake i usmjerene ka centru točka:

$$a_{An}^C = a_{Bn}^C = a_{Dn}^C = a_{Pn}^C = R\omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2}$$

Sabirajući u svakoj naznačenoj tački tri komponente ubrzanja ($\vec{a}_C, \vec{a}_{Mt}^C, \vec{a}_{Mn}^C$) po vektorskoj formuli

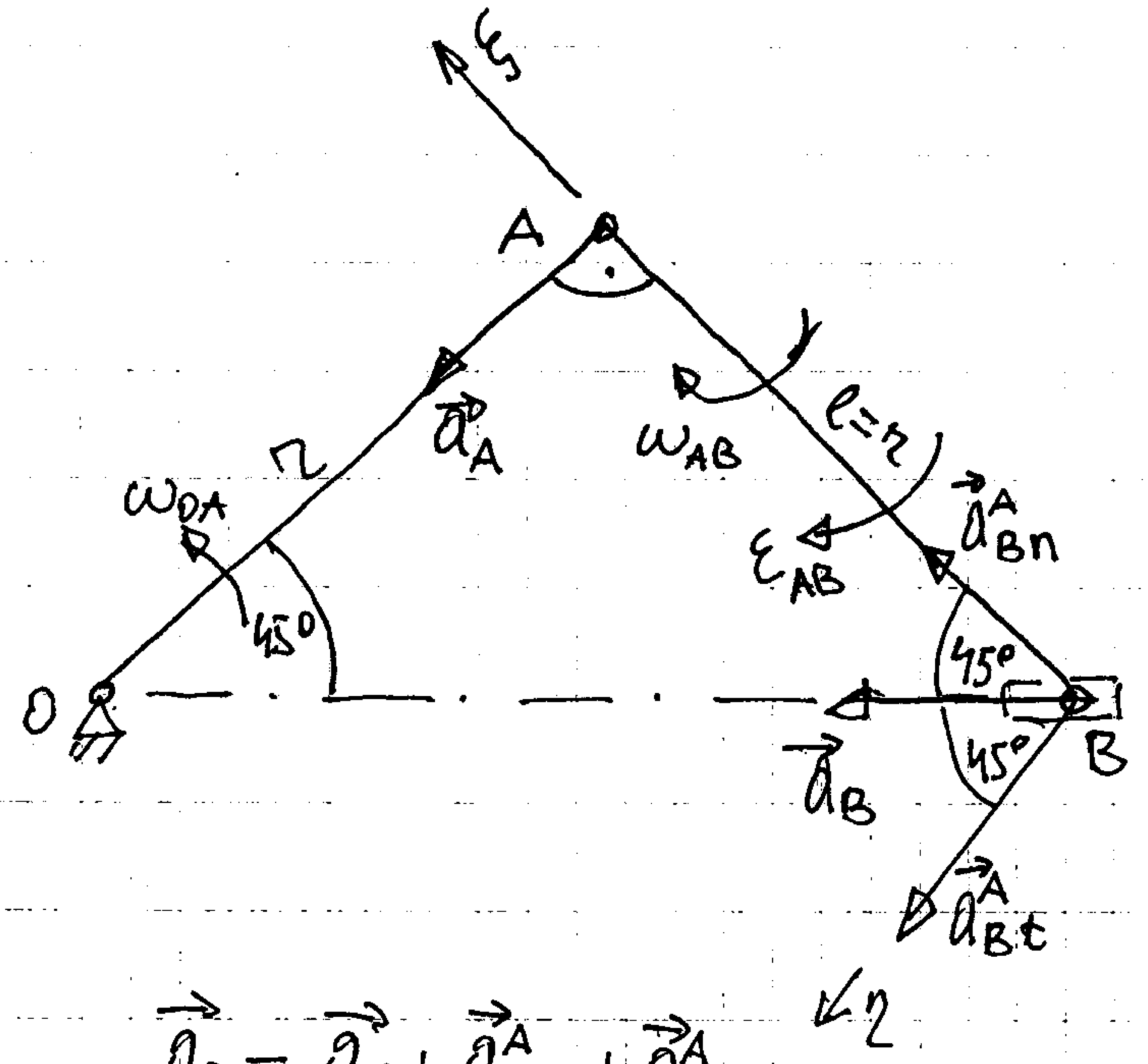
$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{Mt}^C + \vec{a}_{Mn}^C$$

dobijamo da su inteziteti traženih ubrzanja

$$a_P = a_D = 1\,\frac{m}{s^2}, \quad a_A = a_B = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\,\frac{m}{s^2},$$

a njihovi pravci i smjerovi su prikazani na slici ($\tan\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 26{,}6^\circ$)

Primjer 6. Koliki su ugaono ubrzanje poluge AB i ubrzanje klizača B u primjeru 3.



$\omega_{OA} = const \Rightarrow \varepsilon_{OA} = 0$

$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_{An}$, $a_{An} = r\,\omega_{OA}^2 = 16\,\frac{m}{s^2}$

$a_{Bn}^A = \overline{AB}\,\omega_{AB}^2 = 16\,\frac{m}{s^2}$, jer je u primjeru 3 nađeno da je $\omega_{AB} = 4\,\frac{rad}{s}$.

$a_{Bt}^A = \overline{AB}\,\varepsilon_{AB} = l\,\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AB}\,\frac{m}{s^2}$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{Bt}^A + \vec{a}_{Bn}^A$$

$$\xi:\ a_B \cos 45^\circ = 0 + 0 + a_{Bn}^A \Rightarrow \boxed{a_B = \frac{32}{\sqrt{2}}\,\frac{m}{s^2}},$$

$$\eta:\ a_B \cos 45^\circ = a_A + a_{Bt}^A \Rightarrow 16 = 16 + \varepsilon_{AB} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{AB} = 0}$$