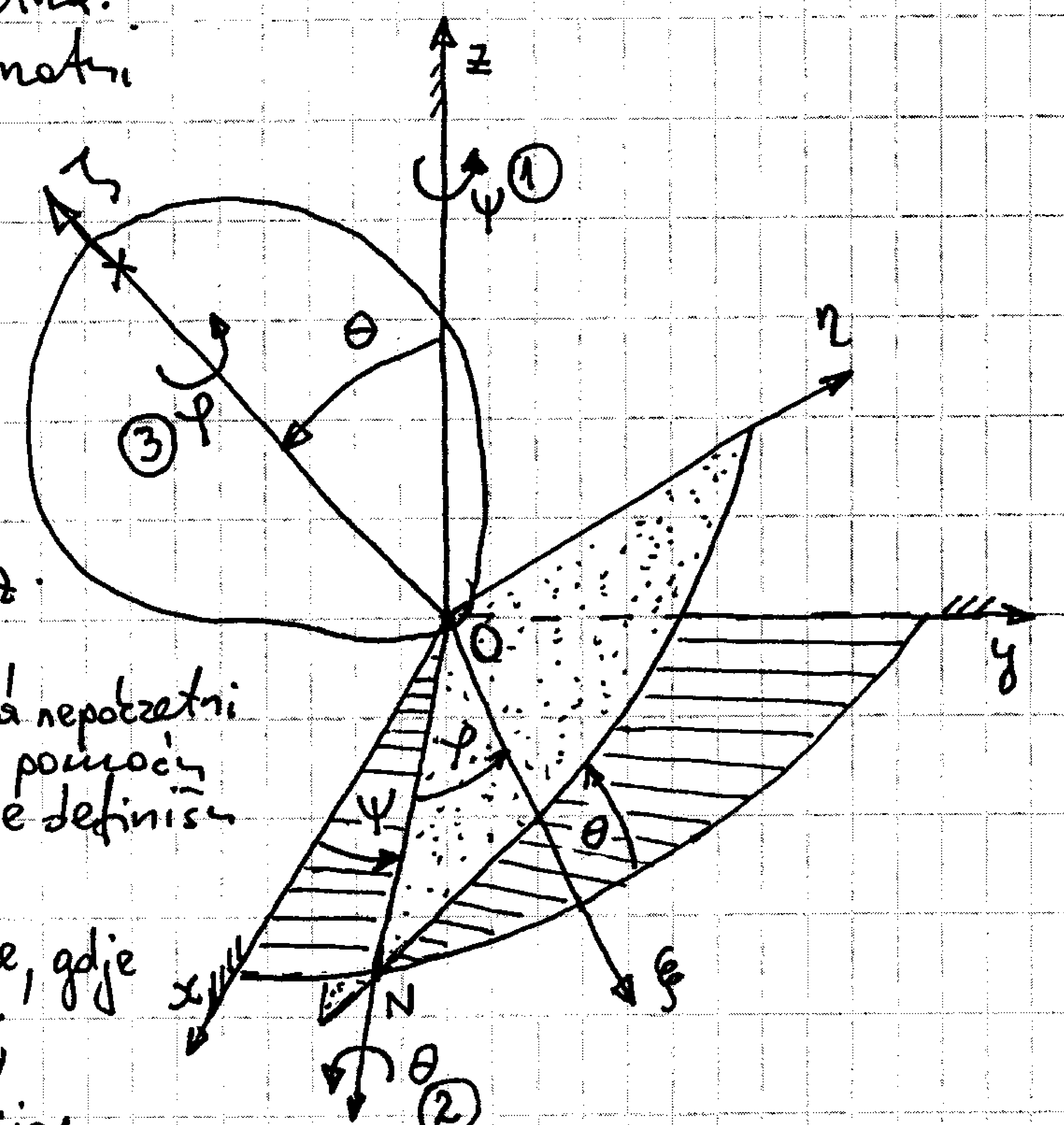
4. Obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke

4.1 Konačne jednačine kretanja

Kretanje krutog tijela, pri kome jedna njegova tačka ostaje za sve vrijeme kretanja nepokretna naziva se obrtanje tijela oko nepokretne tačke ili sferno kretanje.

Neka je tačka O tijela nepokretna. Usvojimo nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i pokretni $O\xi\eta\zeta$ koji je čvrsto vezan za tijelo. Položaj tijela pri obrtanju oko nepokretne tačke O jednoznačno je određen položajem pokretnog koor. sistema $O\xi\eta\zeta$ u odnosu na nepokretni sistem referencije $Oxyz$.



Položaj pokretnog sistema $O\xi\eta\zeta$, a samim tim i tijela, u odnosu na nepokretni sistem $Oxyz$ najčešće se određuje pomoću tri Ojlerova ugla ψ, θ, φ koji se definišu na sledeći način:

$\psi = \measuredangle(Ox, ON)$ - ugao precesije, gdje je $ON = Oxy \cap O\xi\eta$ - čvorna osa;

$\theta = \measuredangle(Oz, O\zeta)$ - ugao nutacije;

$\varphi = \measuredangle(ON, O\xi)$ - ugao sopstvene rotacije.

Smatra se da su uglovi ψ, θ i φ pozitivni kada se, posmatrano iz krajeva osa Oz, ON i $O\zeta$, vidi da se obrtanje oko tih osa vrši u suprotnom smjeru od obrtanja kazaljke na satu.

Preko tri uzastopne nezavisne rotacije tijela za ugao ψ oko ose Oz (osa precesije), zatim za ugao θ oko čvorne ose ON i najzad za ugao φ oko ose $O\zeta$ (osa sopstvene rotacije), može se pokretni sistem referencije $O\xi\eta\zeta$ (tijelo) prevesti u bilo koji položaj.

Pri kretanju tijela mijenja se njegov položaj u odnosu na nepokretni sistem referencije $Oxyz$, a samim tim mijenjaju se i uglovi ψ, θ i φ, tj oni su neke funkcije vremena t:

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \qquad (1)$$

Ove jednačine u potpunosti određuju kretanje tijela oko nepokretne tačke i nazivaju se konačne jednačine obrtanja tijela oko nepokretne tačke (sfernog kretanja).

Kako je u ovom slučaju kretanja ~~tijela~~ položaj tijela određen sa tri nezavisna parametra (generalisane koordinate) to tijelo pri sfernom kretanju ima tri stepena slobode, tj. može da vrši tri nezavisna obrtanja.

4.2 Ojler-Dalamberova teorema. Trenutna osa obrtanja. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje.

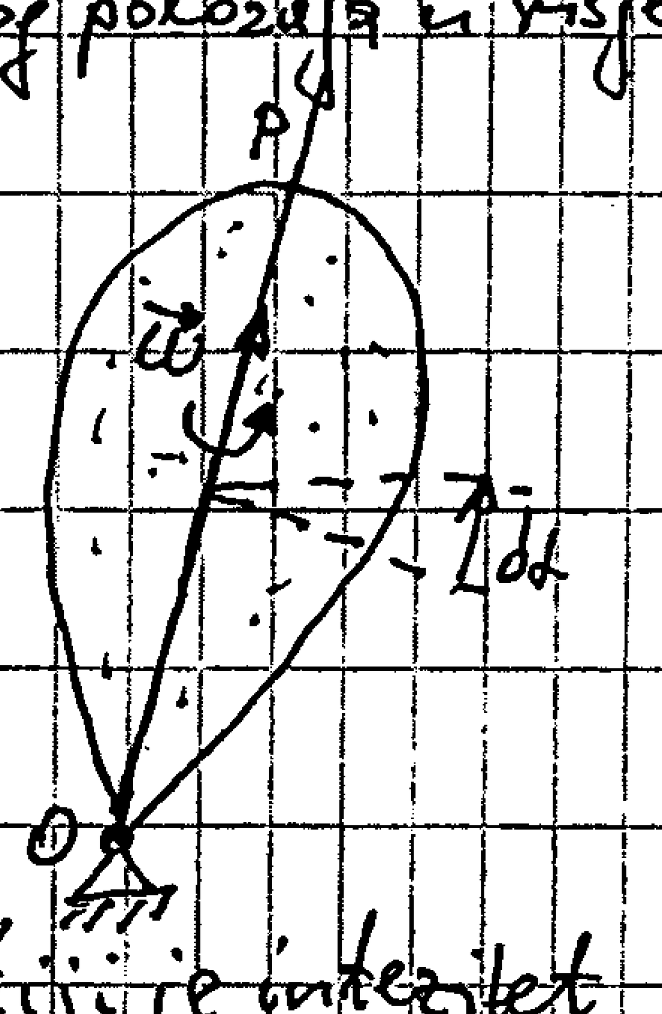
Za pomjeranje tijela, koje ima jednu nepokretnu tačku važi sledeća Ojler-Dalamberova teorema:

Svako pomjeranje krutog tijela iz jednog položaja u drugi položaj može se izvršiti jednom rotacijom tog tijela oko određene ose koja prolazi kroz nepokretnu tačku, a koja se zove osa konačne rotacije.

Ova teorema pokazuje samo da se ~~pomjeranje~~ tijelo može premjestiti iz položaja koji odgovara trenutku t u drugi položaj koji odgovara trenutku $t+\Delta t$ jednim obrtanjem oko ose konačnog obrtanja za određeni ugao $\Delta\alpha$. Međutim, to ne znači da je stvarno kretanje tijela u toku vremenskog intervala Δt zaista takvo prosto obrtanje. To obrtanje biće bliže stvarnom kretanju utoliko ukoliko je interval Δt manji, tj. ukoliko su bliži jedan drugom prvi i drugi položaj tijela. U graničnom slučaju, tj. kada $\Delta t \to 0$ drugi položaj tijela se približava prvom, a osa konačne rotacije teži nekom graničnom položaju OP; tu osu nazivamo trenutnom osom obrtanja za dati trenutak vremena t. Trenutna osa obrtanja (osa trenutne rotacije) uvijek prolazi kroz nepokretnu tačku O, a obrtanjem tijela oko te ose za elementarni (beskonačno mali) ugao $d\alpha$ tijelo prelazi iz datog položaja u susjedni beskonačno bliski položaj. Ugaona brzina

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \qquad (1)$$

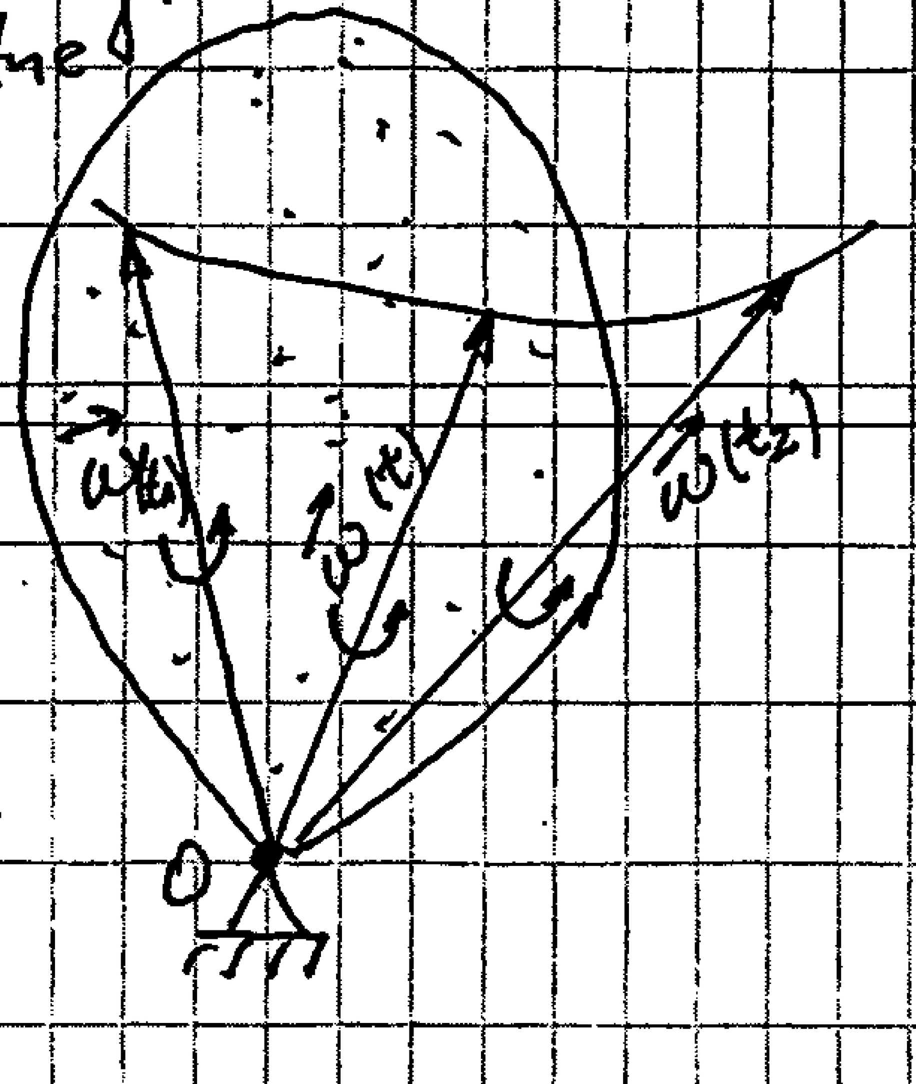
kojom se vrši ovo obrtanje predstavlja trenutnu ugaonu brzinu tijela (ugaonu brzinu tijela u datom trenutku t). Ovdje je potrebno naglasiti da veličina $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\alpha/\Delta t)$ nije jednaka izvodu nekog ugla α po vremenu jer pri sfernom kretanju ne postoji takav jedan ugao, već se položaj tijela određuje sa tri nezavisna ugla.



Trenutnu ugaonu brzinu možemo predstaviti i kao vektor $\vec{\omega}$ čiji je intenzitet jednak apsolutnoj vrijednosti izraza (1) a koji je usmjeren duž trenutne ose obrtanja OP tako da, gledano iz vrha vektora $\vec{\omega}$, obrtanje tijela vidimo u suprotnom smjeru od obrtanja kazaljke na satu.

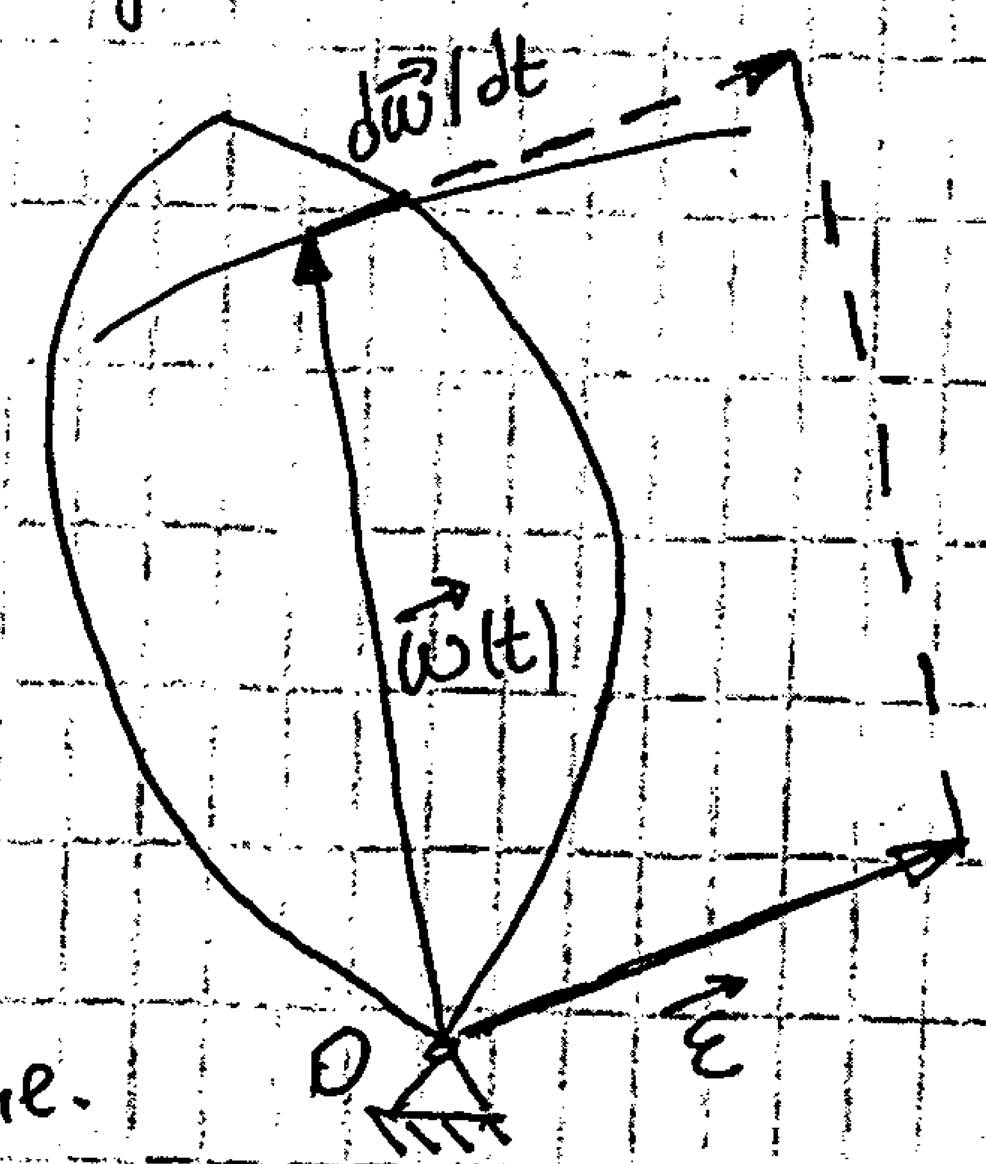
Trenutna obrtna osa tijela razlikuje se od nepokretne ose po tome što se njen pravac u prostoru i u samom tijelu mijenja tokom kretanja.

Prema tome, obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke, može da se predstavi kao niz uzastopnih elementarnih obrtanja ugaonim brzinama $\vec{\omega}$ oko čitavog niza trenutnih obrtnih osa koje sve prolaze kroz nepokretnu tačku. Uzastopni položaji trenutnih obrtnih osa obrazuju pri tome konusnu površ, a kraj vektora $\vec{\omega}$ opisuje na toj površi neku krivu — hodograf vektora trenutne ugaone brzine.



Vektor ugaonog ubrzanja tijela $\vec{\varepsilon}$ karakteriše promjenu vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$, tj. jednak je izvodu po vremenu ugaone brzine:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2)$$



$\vec{\varepsilon}$ ima pravac tangente na hodografu ugaone brzine $\vec{\omega}$, a uzima se da prolazi kroz nepokretnu tačku tijela.

Prema tome, u datom slučaju, za razliku od slučaja obrtanja oko nepokretne ose, pravac vektora ugaonog ubrzanja ne poklapa se sa pravcem vektora ugaone brzine.

Ako sa $\vec{\omega}_0$ označimo jedinični vektor vektora ugaone brzine (odnosno trenutne ose obrtanja) onda je $\vec{\omega} = \omega\vec{\omega}_0$, ω – intenzitet vektora ugaone brzine. Sada je

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega\vec{\omega}_0) = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 + \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}$$

odnosno

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2, \quad \vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0, \quad \vec{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} \qquad (3)$$

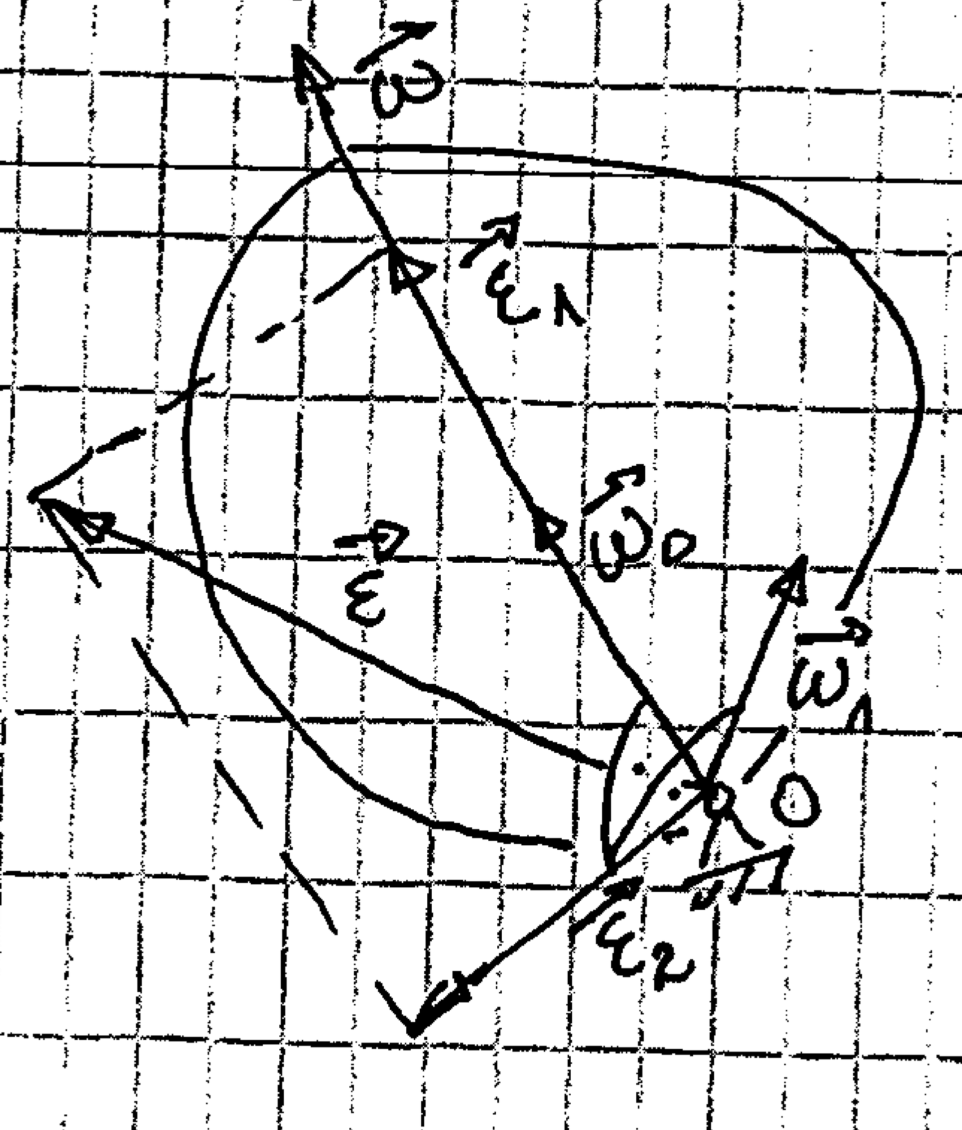
Iz izraza (3) vidimo da se vektor ugaonog ubrzanja tijela sastoji iz dvije komponente.

- Komponenta $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0$ karakteriše promjenu vektora ugaone brzine samo po intenzitetu: usmjerena je duž trenutne obrtne ose i ima isti smjer kao $\vec{\omega}$ ako je $\dot{\omega} > 0$, odnosno suprotan smjer ako je $\dot{\omega} < 0$.
- Komponenta $\vec{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}$ karakteriše promjenu pravca vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$. Ako sa $\vec{\omega}_1$ označimo ugaonu brzinu obrtanja trenutne obrtne ose, a samim tim i vektora $\vec{\omega}_0$, onda prema formuli za izvod vektora konstantnog intenziteta ($|\vec{\omega}_0| = 1$) (v. napomenu u 4.4) dobijamo da je

$$\vec{\varepsilon}_2 = \omega(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}, \qquad (4)$$

tj. komponenta $\vec{\varepsilon}_2$ uvijek je upravna na $\vec{\omega}$ i $\vec{\omega}_1$, a samim tim i na $\vec{\varepsilon}_1$.

Specijalno, ako se tijelo obrće oko nepokretne ose, onda je $\vec{\omega}_0 = const$ i, dakle, $\vec{\varepsilon}_2 = 0$. Isto tako, ako je $\omega = const$ onda je $\vec{\varepsilon}_1 = 0$.

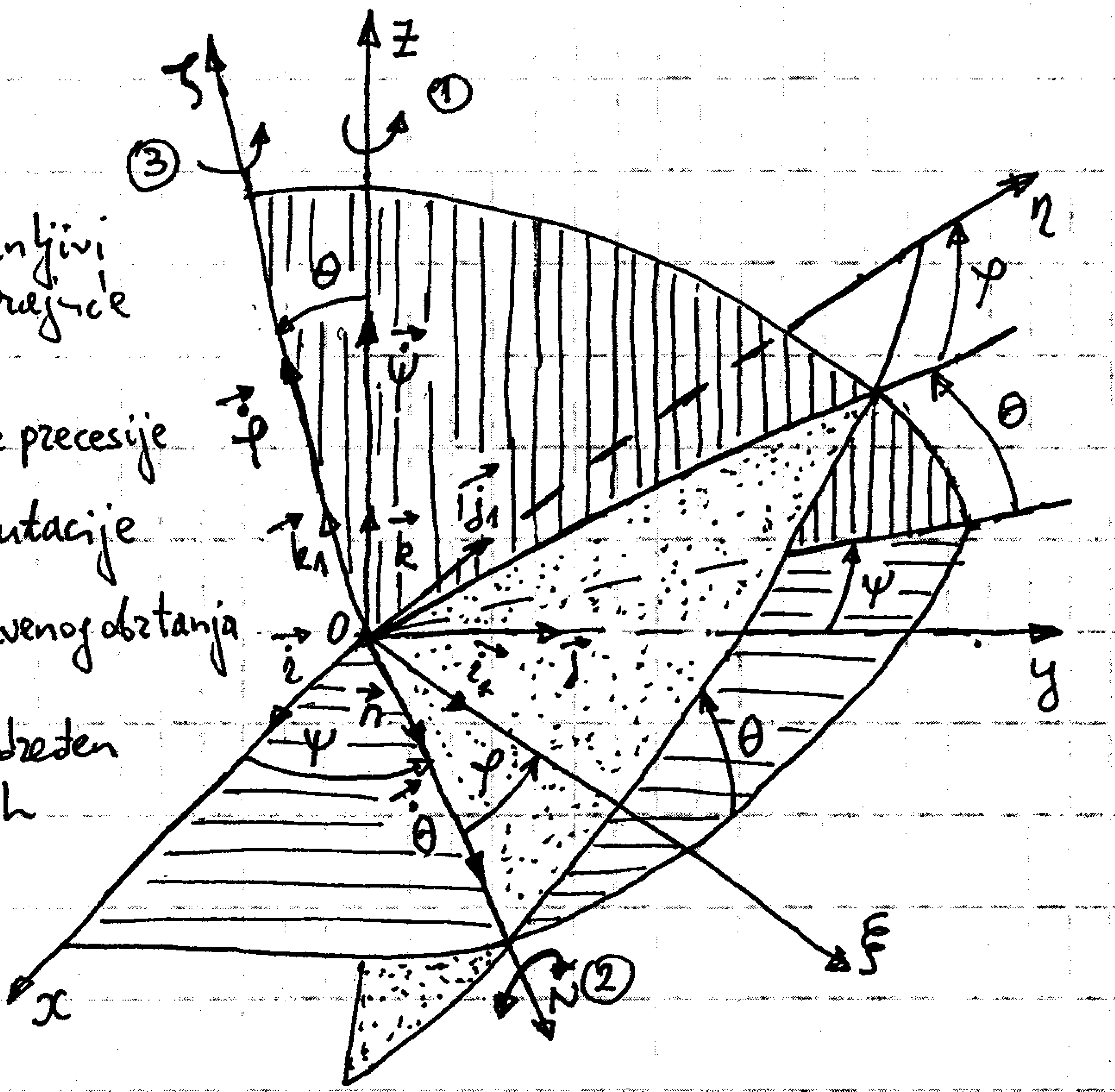


4.3 Ojlerove kinematičke jednačine

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – jedinični vektori nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$

$\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – –॥– pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$

$\vec{n}$ – jedinični vektor čvorne ose



Pošto su Ojlerovi uglovi ψ, θ i φ promjenljivi u toku vremena možemo uvesti odgovarajuće ugaone brzine:

$\vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\vec{k} = \frac{d\psi}{dt}\vec{k}$ – vektor ugaone brzine precesije

$\vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\vec{n} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}$ – –॥– –॥– nutacije

$\vec{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\vec{k}_1 = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}_1$ – –॥– –॥– sopstvenog obrtanja

Vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ određen je vektorskim zbirom komponentnih ugaonih brzina:

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\varphi}}$$

$$= \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{k}_1,$$

što kada se projicira na ose pokretnog koordinatnog sistema daje:

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

Intezitet vektora trenutne ugaone brzine je $\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}$,

a pravac vektora $\vec{\omega}$ u odnosu na sistem $O\xi\eta\zeta$ određen je relacijama:

$$\cos\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{i}_1) = \frac{\omega_\xi}{\omega}, \quad \cos\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{j}_1) = \omega_\eta/\omega; \quad \cos\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{k}_1) = \omega_\zeta/\omega$$

Analogno, u nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$, je

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$$

gdje su: $\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$, $\omega_y = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi$, $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$

Projekcije vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ na ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema nazivaju se Ojlerove kinematičke jednačine.

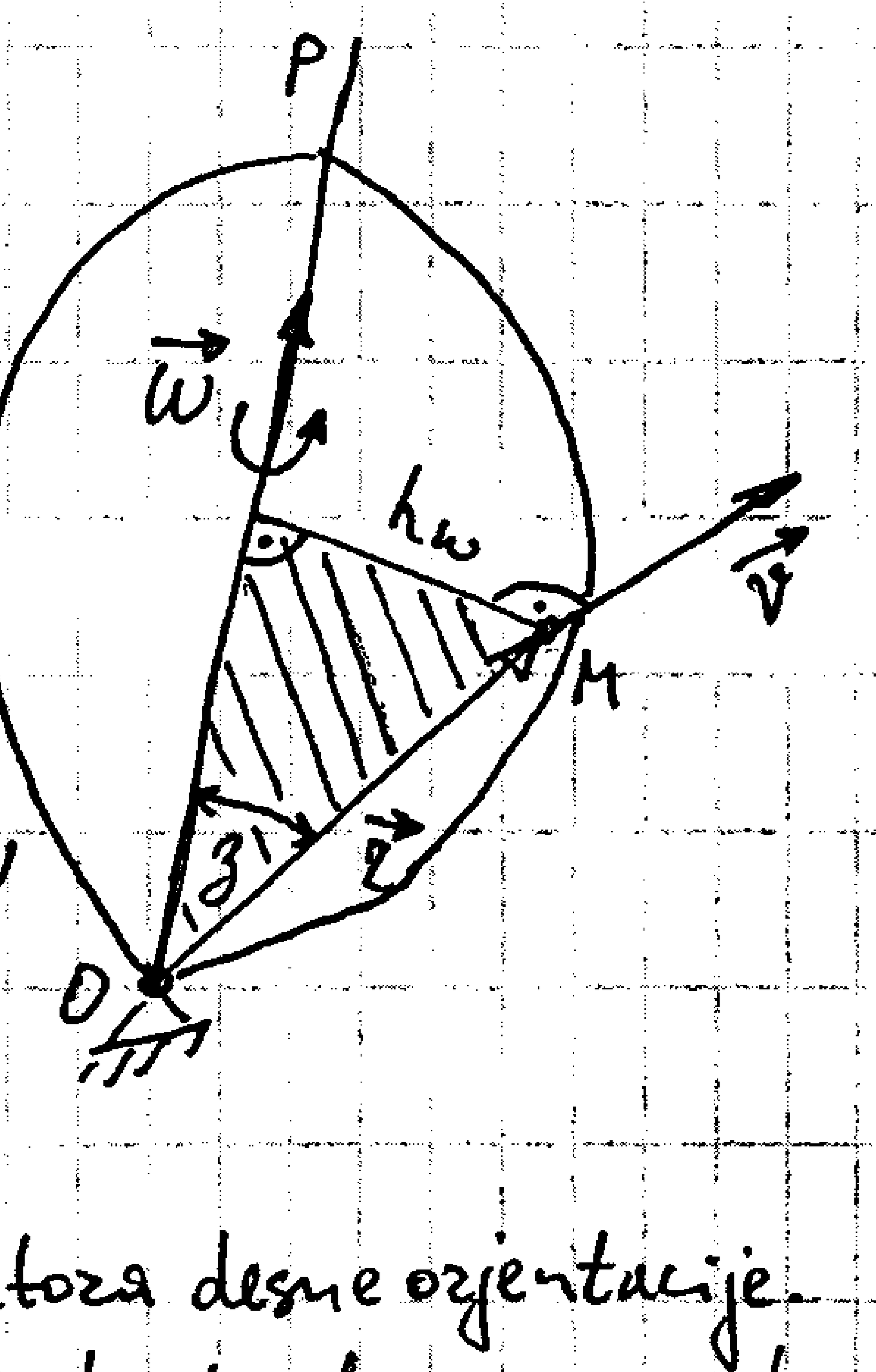
Ako znamo konačne jednačine obrtanja tijela oko nepokretne tačke onda je na osnovu Ojlerovih kinematičkih jednačina moguće odrediti u svakom trenutku vremena vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ a time ujedno i položaj trenutne obrtne ose OP, jer je vektor $\vec{\omega}$ usmjeren duž te ose.

4.4 Brzine tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

U odjeljku 4.2 pokazano je da se obrtanje oko nepokretne tačke sastoji iz niza elementarnih obrtanja oko trenutnih osa obrtanja, pri čemu u svakom trenutku vremena t imamo jednu trenutnu osu obrtanja duž koje je usmjeren vektor ugaone brzine $\vec{\omega}(t)$. Trenutna osa obrtanja se može smatrati nepokretnom u infinitezimalnom intervalu vremena dt, pa se Ojlerov obrazac za brzinu tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose (v. 2.3)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1)$$

može primijeniti i na obrtanje oko nepokretne tačke.



Dakle, vektor brzine proizvoljne tačke M tijela u nekom trenutku t, čiji je vektor položaja u tom trenutku $\vec{r}$ određen je sledećim elementima:

- pravac je upravan na ravan koju određuju vektori $\vec{r}$ i $\vec{\omega}$,
- intezitet brzine jednak je proizvodu inteziteta ugaone brzine i rastojanja tačke M od trenutne ose obrtanja: $v = \omega r \sin\gamma = \omega h_\omega$ (2)
- smjer brzine tačke je takav da $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ i $\vec{v}$ čine sistem vektora desne orijentacije.

Polazeći od formule (1) lako se određuju projekcije brzine tačke tijela na ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema

a) $O\xi\eta\zeta$: $\vec{v} = v_\xi \vec{i}_1 + v_\eta \vec{j}_1 + v_\zeta \vec{k}_1$; $\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{i}_1 + \omega_\eta \vec{j}_1 + \omega_\zeta \vec{k}_1$; $\vec{r} = \xi \vec{i}_1 + \eta \vec{j}_1 + \zeta \vec{k}_1$ $\begin{pmatrix} \xi = const \\ \eta = const \\ \zeta = const \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = (\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta)\vec{i}_1 + (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta)\vec{j}_1 + (\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi)\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow v_\xi = \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \quad v_\eta = \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \quad v_\zeta = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi \qquad (3)$$

b) $Oxyz$: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Analogno prethodnom slučaju je:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x \qquad (4)$$

Pošto su brzine tačaka trenutne ose obrtanja jednake nuli, jednačinu trenutne ose obrtanja u pokretnom koordinatnom sistemu dobijamo iz (3) izjednačavajući desne strane tih izraza sa nulom:

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta} \qquad (5)$$

---

odnosno u nepokretnom koordinatnom sistemu na osnovu (4) jednačina trenutne ose biće

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \qquad (6)$$

N. Pošto je $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{r} = \overline{OM}$, $r = \overline{OM} = const$ jer je tijelo kruto, to se imajući u vidu (1) može zaključiti da je izvod po vremenu bilo kojeg vektora $\vec{A}(t)$ konstantnog inteziteta određen formulom: $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$ gdje je $\vec{\Omega}$ ugaona brzina vektora $\vec{A}$.
Na osnovu toga izvodi ortova pokretnog koordinatnog sistema čvrsto vezanog za tijelo biće

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1$$ – Poasonove formule.

4.5 Ubrzanja tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

Pošto je vektor brzine proizvoljne tačke tijela određen izrazom

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad (1)$$

ubrzanje proizvoljne tačke tijela dobija se diferenciranjem po vremenu ovog izraza.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

odnosno, s obzirom da je $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ i $\vec{v} = d\vec{r}/dt$,

$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega, \quad \vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (2)$$

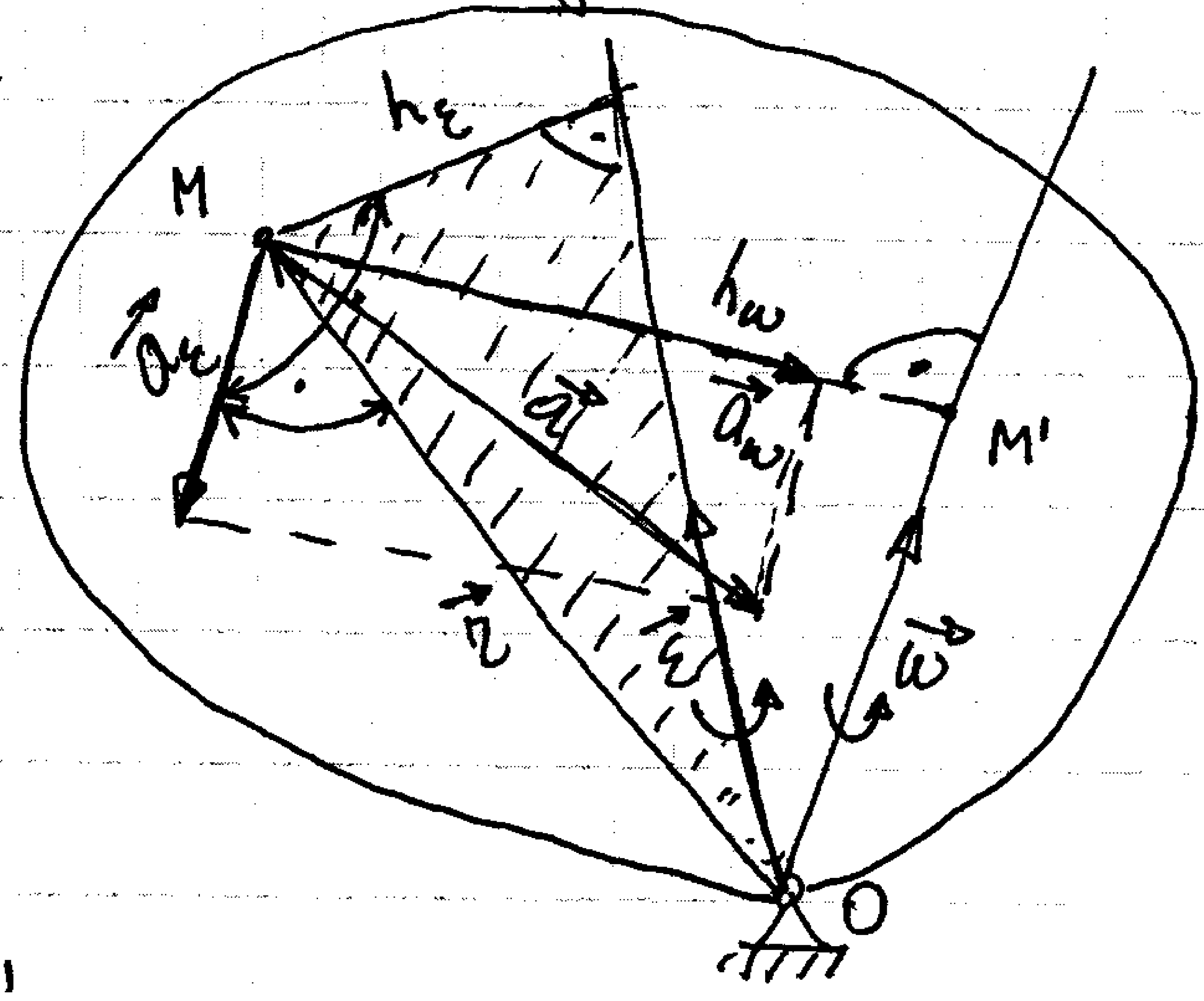
Komponenta

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

čiji je uzrok ugaono ubrzanje tijela, zove se obrtno ubrzanje i određeno je sledećim elementima:

- pravac je upravan na ravan koja prolazi kroz pokretnu tačku M tijela i vektor $\vec{\varepsilon}$,
- smjer je takav da vektori $\vec{a}_\varepsilon, \vec{\varepsilon}$ i $\vec{r}$ čine sistem desne orijentacije
- intezitet je jednak proizvodu inteziteta ugaonog ubrzanja i rastojanja pokretne tačke od pravca ugaonog ubrzanja,

$$a_\varepsilon = \varepsilon r |\sin\sphericalangle(\vec{\varepsilon}, \vec{r})| = \varepsilon h_\varepsilon$$



Druga komponenta

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

čiji je uzrok ugaona brzina $\vec{\omega}$, zove se aksipetalno ubrzanje. Ako se uzme da je $\vec{r} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ $(\overrightarrow{M'M} \perp \vec{\omega})$ biće $\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{M'M})$ jer je $\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM'} = 0$ $(\overrightarrow{OM'} \parallel \vec{\omega})$. Koristeći pravilo dekompozicije dvostrukog vektorskog proizvoda (V. 3.4), izraz za $\vec{a}_\omega$ se svodi na oblik

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega}\,(\underbrace{\overset{0}{\cancel{\vec{\omega}\,\overrightarrow{M'M}}}}_{\vec{\omega} \perp \overrightarrow{M'M}}) - \overrightarrow{M'M}\,\omega^2 = \omega^2\,\overrightarrow{MM'}$$

iz koga se vidi da je aksipetalno ubrzanje usmjereno od pokretne tačke M po normali na trenutnu osu ka trenutnoj osi, a njegov intezitet a_ω jednak je proizvodu kvadrata inteziteta ugaone brzine i rastojanja tačke M od trenutne ose obrtanja

$$a_\omega = \omega^2\,\overline{MM'} = \omega^2 h_\omega$$

~~N1. U slučaju obrtanja tijela oko nepokretne tačke, za razliku od obrtanja oko nepo-~~
kretne ose, $\vec{a}_\varepsilon$ i $\vec{a}_\omega$ se ne poklapaju sa tangencijalnim i normalnim ubrzanjem posmatrane tačke tijela.

Komponente $\vec{a}_\varepsilon$ i $\vec{a}_\omega$ u opštem slučaju nijesu uzajamno normalne pa se intezitet ubrzanja tačke izračunava kao dijagonala paralelograma po formuli

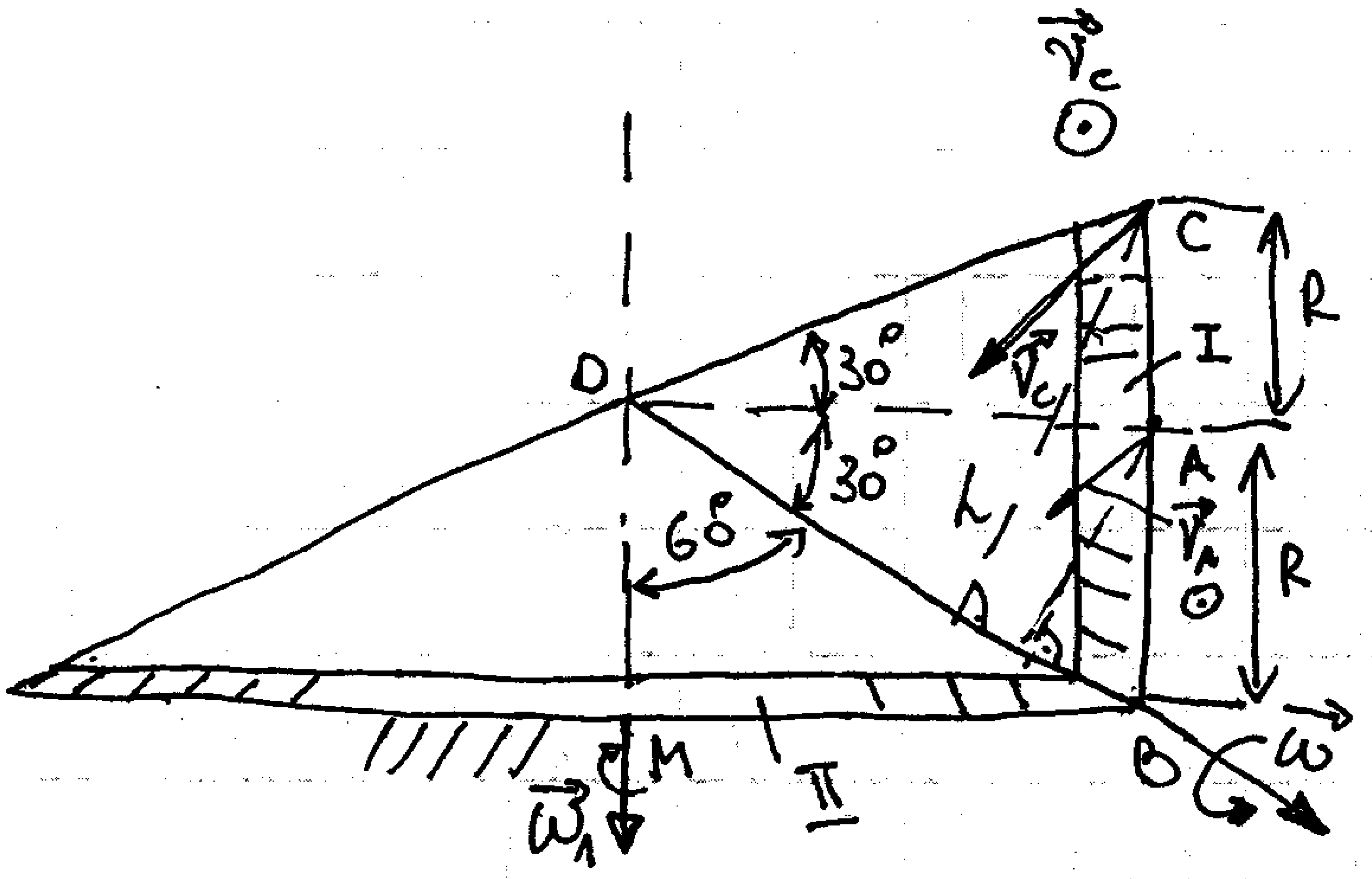
$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2 + 2 a_\varepsilon a_\omega \cos\sphericalangle(\vec{a}_\varepsilon, \vec{a}_\omega)}$$

N2. S obzirom da je $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$ (V. 4.2), obrtno ubrzanje se može razložiti na dvije komponente

$\vec{a}_\varepsilon = \vec{a}_{\varepsilon_1} + \vec{a}_{\varepsilon_2}$, $\vec{a}_{\varepsilon_1} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}$ - posledica promjene inteziteta vektora $\vec{\omega}$ i pada u pravac vektora brzine $\vec{v}$,

$\vec{a}_{\varepsilon_2} = \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r}$ - posledica promjene pravca vektora $\vec{\omega}$.

Primjer 1. Konični zupčanik I sa uglom pri vrhu $2\alpha=60°$ i poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po nepokretnom zupčaniku II (v. sliku). Brzina tačke C zupčanika I je v_C. Odrediti ugaonu brzinu zupčanika I, kao i ugaonu brzinu ose OA.



Kretanje zupčanika I je obrtanje oko nepokretne tačke O, a ono se sastoji od obrtanja oko ose OA i od obrtanja, zajedno sa osom OA, oko ose OM.

Pošto je $v_B=0$ (kotrljanje bez klizanja), to je OB trenutna osa rotacije

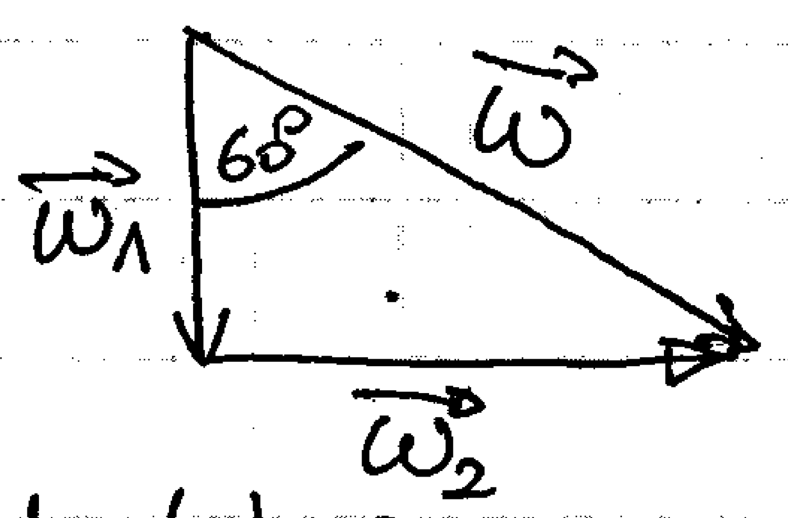
$v_C=\omega h = R\sqrt{3}\,\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_C}{R\sqrt{3}}}$ – ugaona brzina zupčanika I

$v_A = R\frac{\sqrt{3}}{2}\omega = \frac{v_C}{2}$, S druge strane $v_A = \overline{OA}\,\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_1$, ω_1 – ugaona brzina obrtanja ose OA oko ose OM

$$\Rightarrow \frac{v_C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{3}\,v_C}{2R\sqrt{3}},\quad \boxed{\omega_1 = \frac{v_C}{2R\sqrt{3}}}$$

Kolika je ugaona brzina obrtanja zupčanika oko ose OA?

$$\vec\omega = \vec\omega_1 + \vec\omega_2$$



$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{v_C}{2R}}$$

Primjer 2. Tijelo se obrće oko nepokretne tačke O ugaonom brzinom $\vec\omega = t^2\vec i + \vec j + 2t\vec k$. U trenutku $t=2$ odrediti intenzitet ugaone brzine i ugaonog ubrzanja tijela, kao i brzinu i ubrzanje one tačke tijela koja se u tom trenutku nalazi na osi trenutnog obrtanja na rastojanju $\overline{OM}=2$.

$\vec\omega = t^2\vec i + \vec j + 2t\vec k$

$\vec\varepsilon = \frac{d\vec\omega}{dt} = 2t\vec i + 2\vec k$

$\vec\omega(t=2) = \vec\omega_2 = 4\vec i + \vec j + 4\vec k$

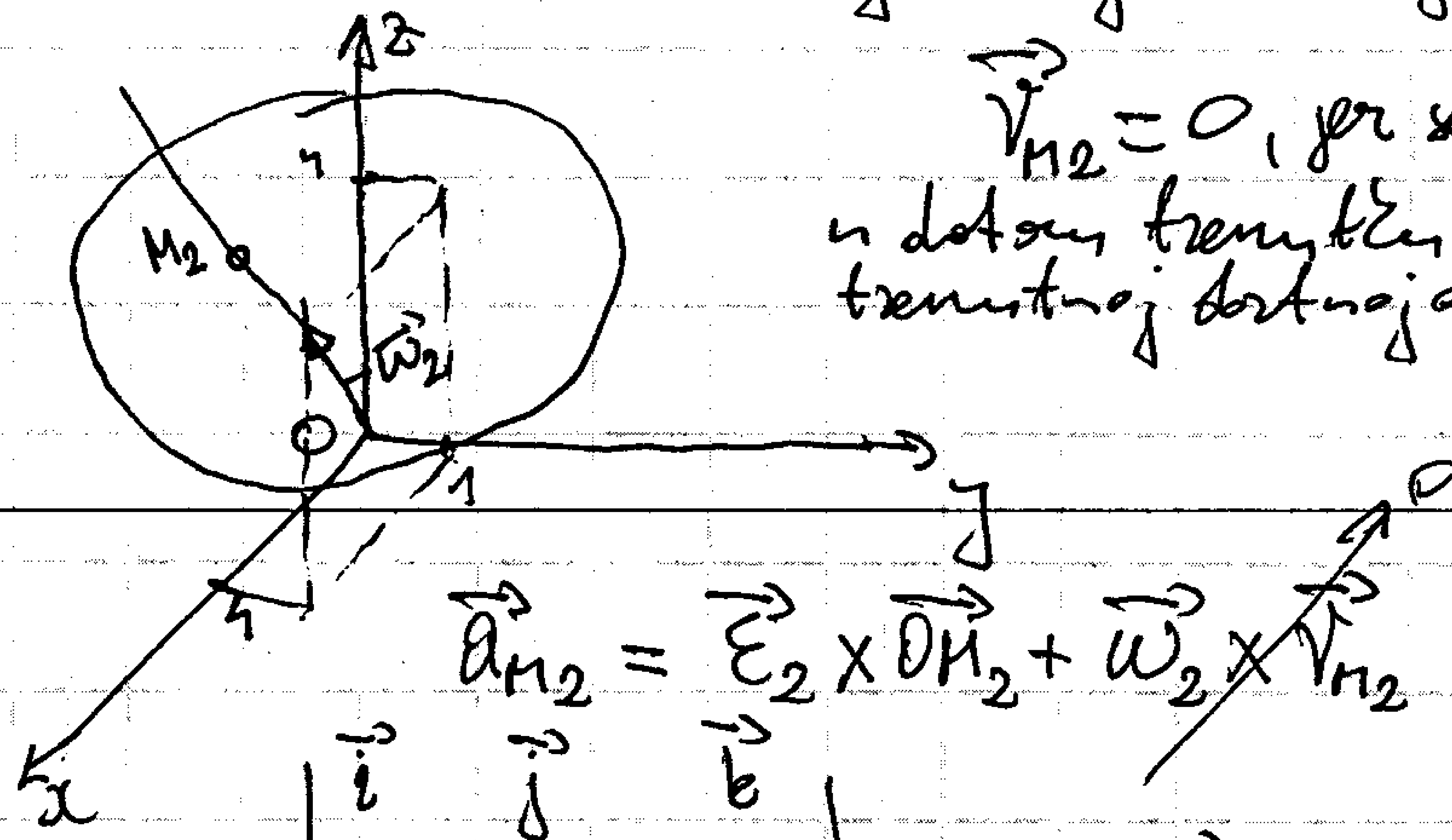
$\omega_2 = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}$

$\vec\varepsilon(t=2) = \vec\varepsilon_2 = 4\vec i + 2\vec k$

$\varepsilon_2 = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\vec\omega_{02} = \frac{\vec\omega_2}{\omega_2} = \frac{4\vec i + \vec j + 4\vec k}{\sqrt{33}}$

$\overrightarrow{OM_2} = \overline{OM}\,\vec\omega_{02} = \frac{8\vec i + 2\vec j + 8\vec k}{\sqrt{33}}$



$\vec v_{M2} = 0$, jer se tačka M u datom trenutku nalazi na trenutnoj obrtnoj osi.

$$\vec a_{M2} = \vec\varepsilon_2 \times \overrightarrow{OM_2} + \cancel{\vec\omega_2 \times \vec v_{M2}}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 4 & 0 & 2 \\ \frac{8}{\sqrt{33}} & \frac{2}{\sqrt{33}} & \frac{8}{\sqrt{33}} \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{33}}\vec i - \frac{16}{\sqrt{33}}\vec j + \frac{8}{\sqrt{33}}\vec k$$

$$a_{M2} = \frac{4}{\sqrt{33}}\sqrt{1+16+4} = \frac{4\sqrt{7}}{11}$$

2. Odrediti intezitet ugaone brzine tijela koje izvodi sferno kretanje, ako su konačne jednačine kretanja

$$\psi=\pi\sin t,\quad \theta=\pi\cos t,\quad \varphi=\pi.$$

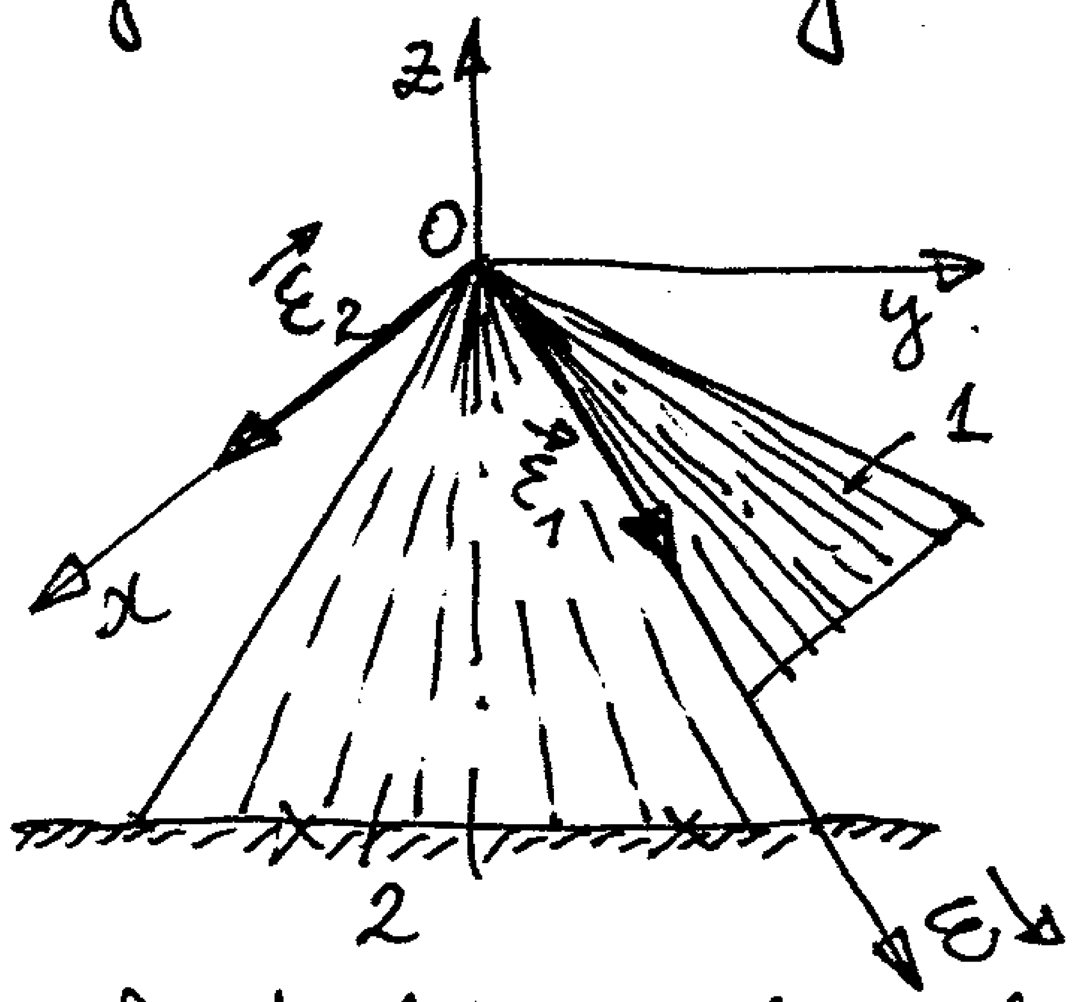
$$\dot\psi=\pi\cos t,\quad \dot\theta=-\pi\sin t,\quad \dot\varphi=0$$

Intezitet ugaone brzine određen je izrazom (v. predavanja, §4.3)

$$\omega=\sqrt{\dot\psi^2+\dot\theta^2+2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta},\ \text{pa je}$$

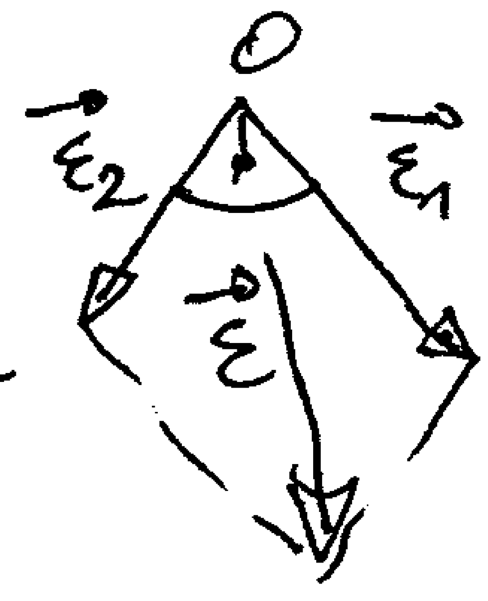
$$\omega=\pi\sqrt{\cos^2t+\sin^2t}=\pi=3,14\ \text{rad/s}$$

3. Pri kotrljanju bez klizanja konusa 1 po nepokretnom konusu 2 u datom trenutku komponente ugaonog ubrzanja $\vec\varepsilon_1$ i $\vec\varepsilon_2$ (paralelna i upravna komponenta na vektor ugaone brzine) imaju vrijednosti: $\varepsilon_1=0,1\pi$ rad/s², $\varepsilon_2=0,2\pi$ rad/s². Odrediti ugaono ubrzanje.

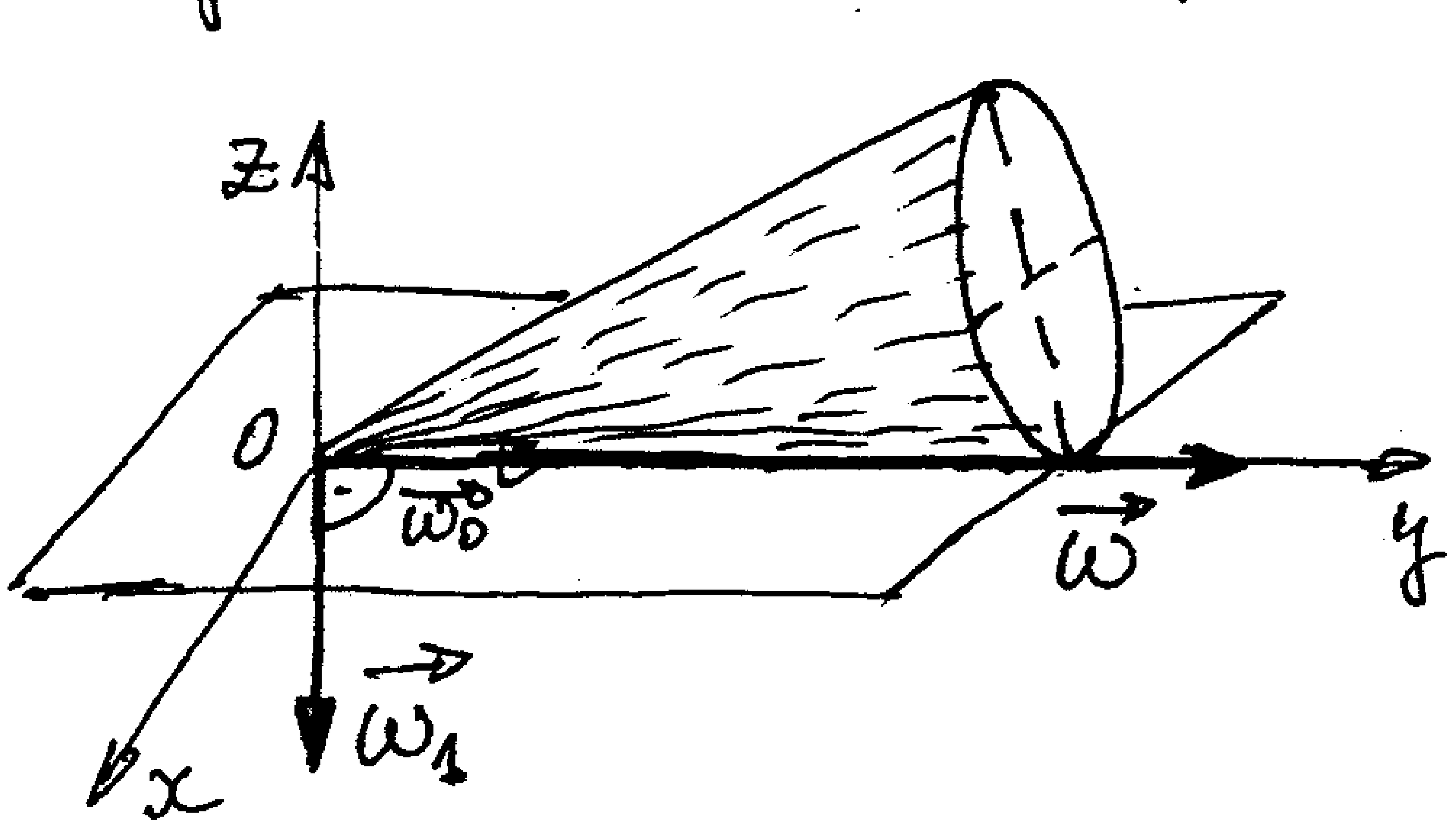


$$\vec\varepsilon=\vec\varepsilon_1+\vec\varepsilon_2$$

$$\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}=0,702\ \text{rad/s}^2$$



4. Pri kotrljanju bez klizanja konusa po nepokretnoj horizontalnoj ravni vektor ugaone brzine intenziteta $\omega=2\pi$ rad/s obrće se oko vertikalne z ose sa ugaonom brzinom $\omega_1=2$ rad/s. Odrediti intenzitet ugaonog ubrzanja.



$$\vec\omega=\omega\vec\omega_0,\quad \omega=\text{const}=2\pi$$

$$\vec\varepsilon=\vec\varepsilon_1+\vec\varepsilon_2;\quad \vec\varepsilon_1=\frac{\overset{0}{d\omega}}{dt}\vec\omega_0=0$$

$$\vec\varepsilon_2=\omega\frac{d\vec\omega_0}{dt}=\omega\,\vec\omega_1\times\vec\omega_0=\vec\omega_1\times\vec\omega$$

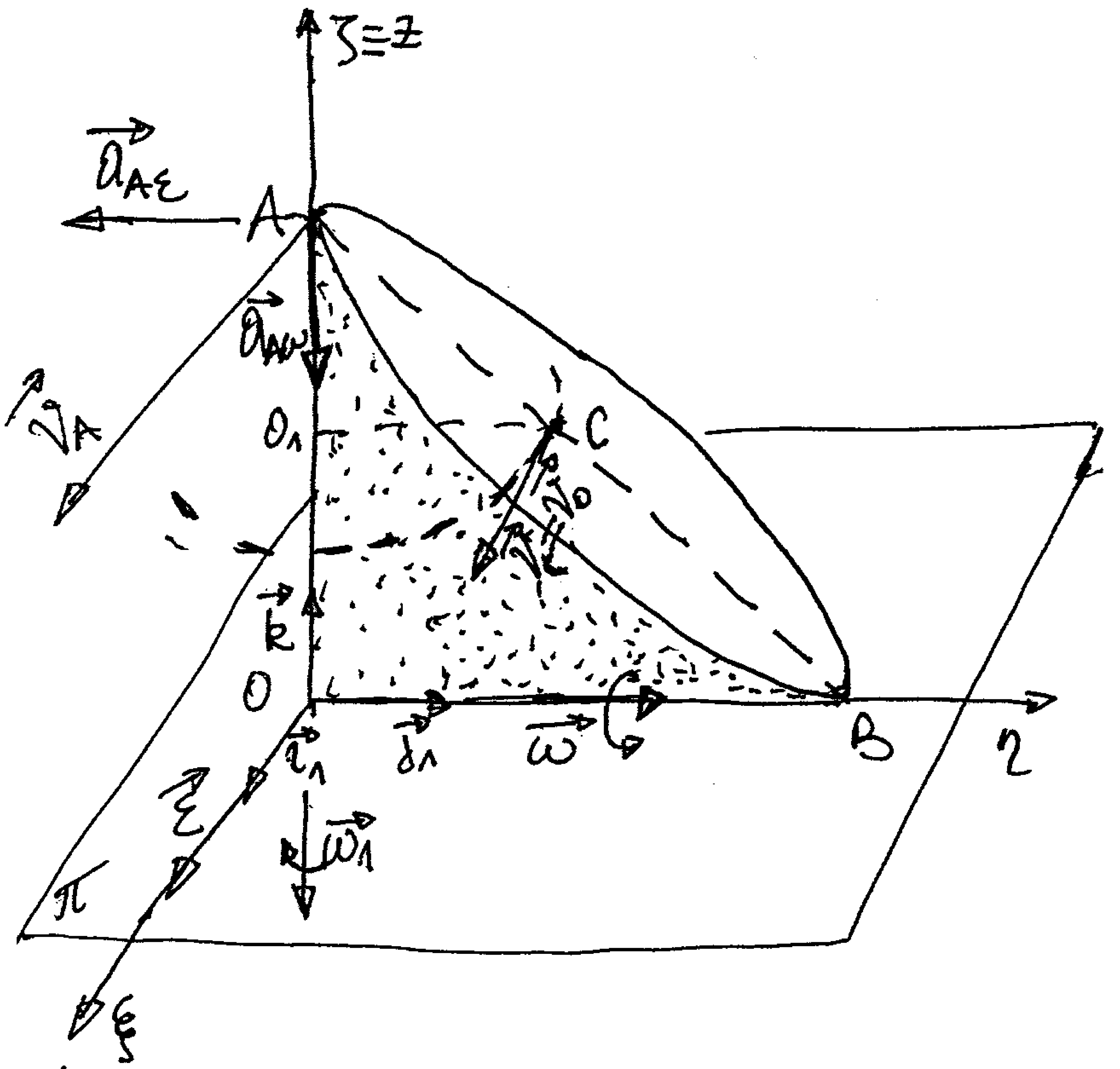
$$\varepsilon=\varepsilon_2=\omega_1\omega\sin 90^\circ=4\pi=12,56\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

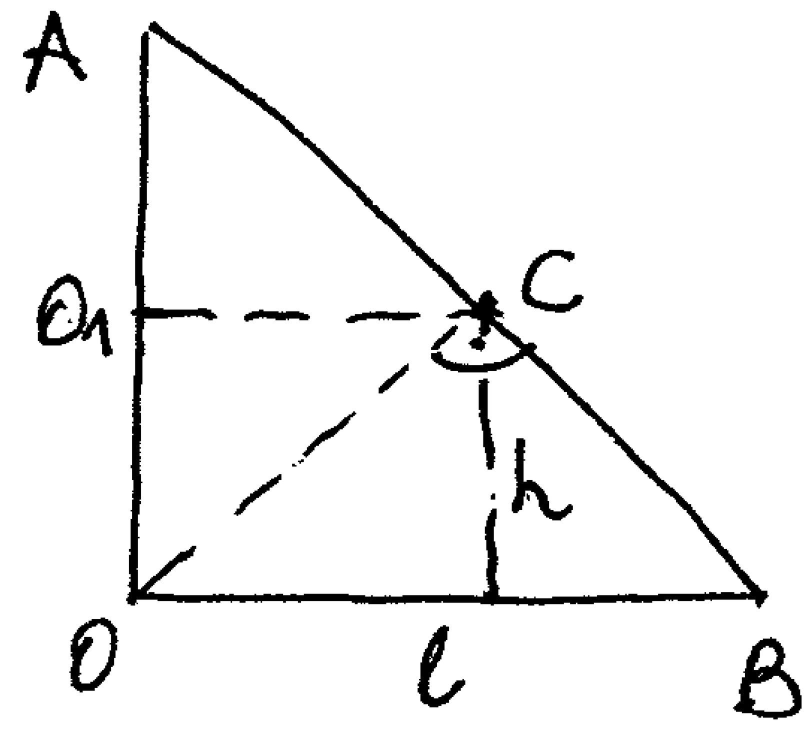
5. Pravi kružni konus, čiji je ugao pri vrhu jednak $2\alpha = 90^\circ$, kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj ravni π tako da mu je tačka O nepokretna. Ako je $\overline{OB} = l$, a intezitet brzine središta osnove konusa (tačke C) konstantan i jednak v_0, odrediti:

a) ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje konusa;

b) brzine tačaka A i B;

c) obrtna, aksipetalna i ukupna ubrzanja tačaka A i B.





$h = \frac{l}{2}$, $\overline{O_1C} = \frac{l}{2}$

a) Zbog kotrljanja bez klizanja OB je trenutna osa rotacije pa ugaona brzina konusa $\vec{\omega}$ pada u pravac nje.

Postavimo koord. sistem $O\xi\eta z$ tako da se osa $O\eta$ poklapa sa izvodnicom konusa OB (v. sl.).

$$v_C = h\omega \Rightarrow v_0 = \frac{l}{2}\omega \Rightarrow \omega = \frac{2v_0}{l}$$

~~Vodeći računa o smjeru brzine $\vec{v}_C$, konačno imamo~~

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{2v_0}{l}\vec{j}_1}$$ — vektor ugaone brzine konusa

$\vec{\omega}$, kao i $O\xi\eta z$, se obrće oko z ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}_1$ koja se takođe određuje na osnovu brzine tačke C. Pri tome treba imati u vidu da se tačka C kreće po kružnici poluprečnika $\overline{O_1C} = \frac{l}{2}$ konstantnom brzinom $v_C = v_0$.

$$v_C = \overline{O_1C}\,\omega_1 \Rightarrow v_0 = \frac{l}{2}\omega_1,$$

pa je, vodeći računa o smjeru brzine $\vec{v}_C$:

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{2v_0}{l}\vec{k}$$

Sada je, ~~obzirom~~ da je $\omega = \text{const}$, $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$,

tj

$$\vec{\varepsilon} = -\left(\frac{2v_0}{l}\right)^2 \underbrace{\vec{k} \times \vec{j}_1}_{=-\vec{i}}$$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{4v_0^2}{l^2}\vec{i}_1}$$ - vektor ugaonog ubrzanja konusa

b)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA}, \quad \vec{OA} = l\vec{k}$$

$$\vec{v}_A = \frac{2v_0}{l}\vec{j}_1 \times l\vec{k} = \boxed{2v_0\vec{i}_1}$$ - vektor brzine tačke A

$\vec{v}_B = 0$, jer B leži na trenutnoj osi rotacije ($\vec{OB} \parallel \vec{\omega}$)

c)

$$\vec{a}_{A\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OA} = \frac{4v_0^2}{l^2}\vec{i}_1 \times l\vec{k} = -\frac{4v_0^2}{l}\vec{j}_1$$ - obrtno ubrzanje tačke A

$$\vec{a}_{A\omega} = \vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{OA})}_{\vec{v}_A} = \frac{2v_0}{l}\vec{j}_1 \times 2v_0\vec{i}_1 = -\frac{4v_0^2}{l}\vec{k}$$ - aksipetalno ubrzanje tačke A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\varepsilon} + \vec{a}_{A\omega} = -\frac{4v_0^2}{l}(\vec{j}_1 + \vec{k})$$ - vektor ubrzanja tačke A, a njegov intenzitet je $a_A = \frac{4v_0^2}{l}\sqrt{2}$.

$$\vec{a}_{B\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OB} = \frac{4v_0^2}{l^2}\vec{i}_1 \times l\vec{j}_1 = \frac{4v_0^2}{l}\vec{k}$$ - obrtno ubrzanje tačke B

$$\vec{a}_{B\omega} = \vec{\omega} \times \underbrace{\vec{v}_B}_{0} = 0$$