4. Obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke

4.1 Konačne jednačine kretanja

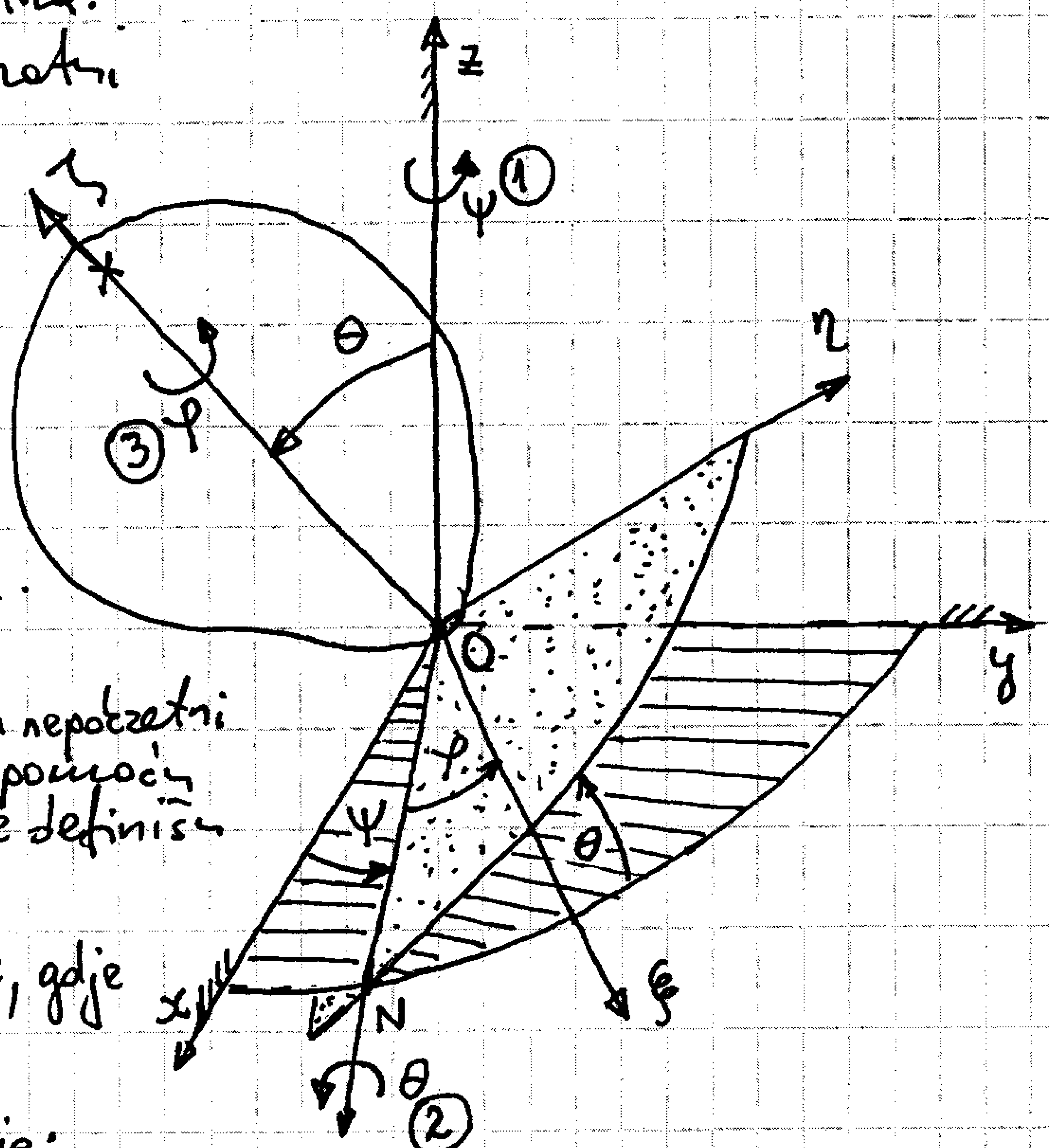
Kretanje krutog tijela, pri kome jedna njegova tačka ostaje za sve vrijeme kretanja nepokretna naziva se obrtanje tijela oko nepokretne tačke ili sferno kretanje.

Neka je tačka O tijela nepokretna. Usvojimo nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i pokretni $O\xi\eta\zeta$ koji je čvrsto vezan za tijelo. Položaj tijela pri obrtanju oko nepokretne tačke O jednoznačno je određen položajem pokretnog koor. sistema $O\xi\eta\zeta$ u odnosu na nepokretni sistem referencije $Oxyz$. Položaj pokretnog sistema $O\xi\eta\zeta$, a samim tim i tijela, u odnosu na nepokretni sistem $Oxyz$ najčešće se određuje pomoću tri Ojlerova ugla ψ, θ, φ koji se definišu na sledeći način:

$\psi = \sphericalangle(Ox, ON)$ - ugao precesije, gdje je $ON = Oxy \cap O\xi\eta$ - čvorna osa;

$\theta = \sphericalangle(Oz, O\zeta)$ - ugao nutacije;

$\varphi = \sphericalangle(ON, O\xi)$ - ugao sopstvene rotacije.



Smatra se da su uglovi ψ, θ i φ pozitivni kada se, posmatrano iz krajeva osa Oz, ON i $O\zeta$, vidi da se obrtanje oko tih osa vrši u suprotnom smjeru od obrtanja kazaljke na satu.

Preko tri uzastopne nezavisne rotacije tijela za ugao ψ oko ose Oz (osa precesije), zatim za ugao θ oko čvorne ose ON i najzad za ugao φ oko ose $O\zeta$ (osa sopstvene rotacije), može se pokretni sistem referencije $O\xi\eta\zeta$ (tijelo) prevesti u bilo koji položaj.

Pri kretanju tijela mijenja se njegov položaj u odnosu na nepokretni sistem referencije $Oxyz$, a samim tim mijenjaju se i uglovi ψ, θ i φ, tj oni su neke funkcije vremena t:

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \qquad (1)$$

Ove jednačine u potpunosti određuju kretanje tijela oko nepokretne tačke i nazivaju se konačne jednačine obrtanja tijela oko nepokretne tačke (sfernog kretanja).

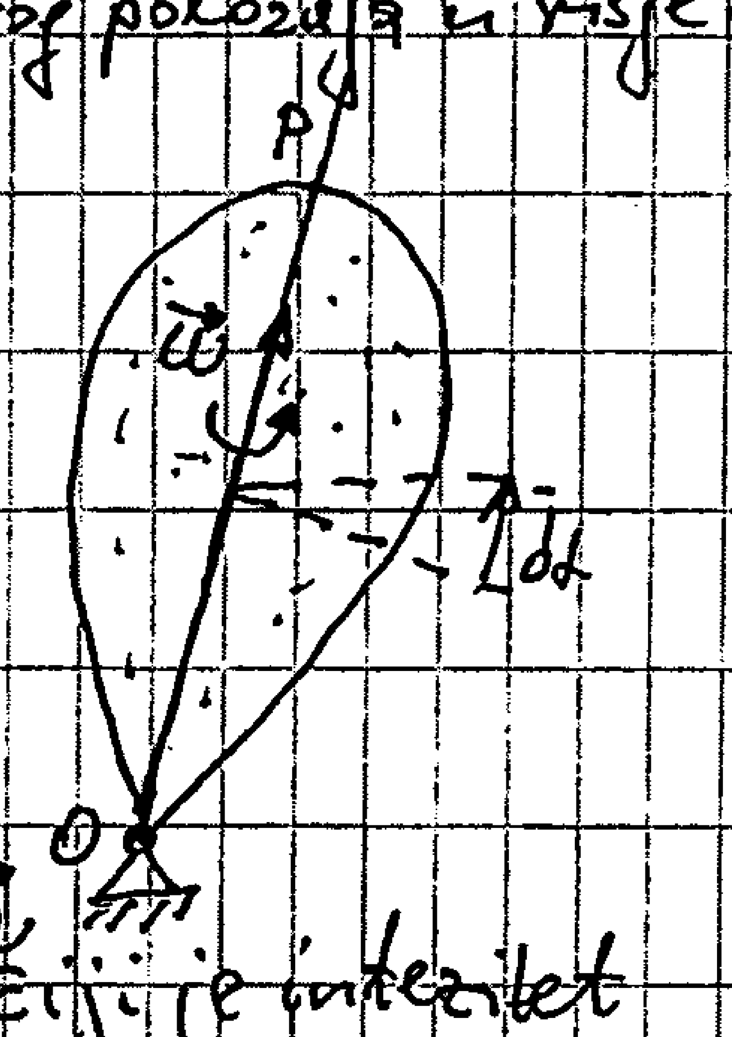
Kako je u ovom slučaju kretanja ~~tijela~~ položaj tijela određen sa tri nezavisna parametra (generalisane koordinate) to tijelo pri sfernom kretanju ima tri stepena slobode, tj. može da vrši tri nezavisna obrtanja.

4.2 Ojler-Dalamberova teorema. Trenutna osa obrtanja. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje.

Za pomjeranje tijela, koje ima jednu nepokretnu tačku važi sledeća Ojler-Dalamberova teorema:

Svako pomjeranje krutog tijela iz jednog položaja u drugi položaj može se izvršiti jednom rotacijom tog tijela oko određene ose koja prolazi kroz nepokretnu tačku, a koja se zove osa konačne rotacije.

Ova teorema pokazuje samo da se ~~pomjeranje~~ tijelo može premjestiti iz položaja koji odgovara trenutku t u drugi položaj koji odgovara trenutku $t+\Delta t$ jednim obrtanjem oko ose konačnog obrtanja za određeni ugao $\Delta\alpha$. Međutim, to ne znači da je stvarno kretanje tijela u toku vremenskog intervala Δt zaista takvo prosto obrtanje. To obrtanje biće bliže stvarnom kretanju utoliko ukoliko je interval Δt manji, tj. ukoliko su bliži jedan drugom prvi i drugi položaj tijela. U graničnom slučaju, tj. kada $\Delta t \to 0$ drugi položaj tijela se približava prvom, a osa konačne rotacije teži nekom graničnom položaju OP; tu osu nazivamo <u>trenutnom osom obrtanja</u> za dati trenutak vremena t. Trenutna osa obrtanja (osa trenutne rotacije) uvijek prolazi kroz nepokretnu tačku O, a obrtanjem tijela oko te ose za elementarni (beskonačno mali) ugao $d\alpha$ tijelo prelazi iz datog položaja u susjedni beskonačno bliski položaj. Ugaona brzina



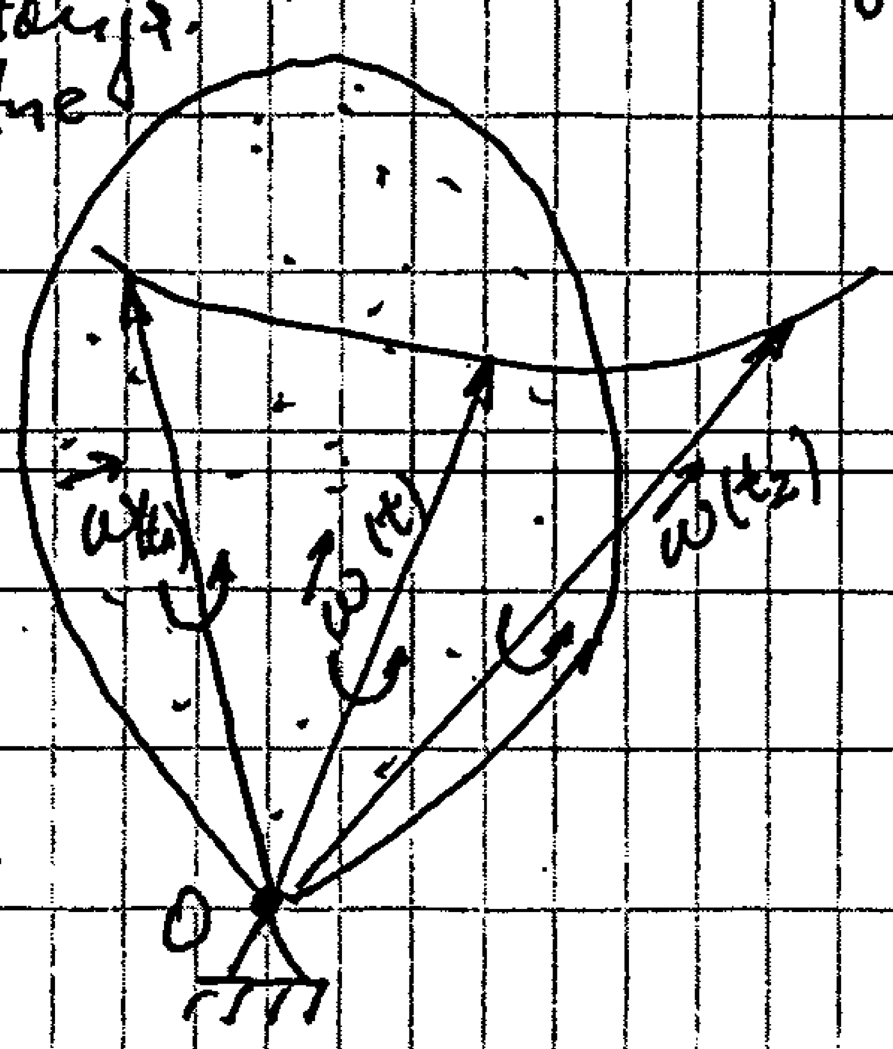
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \qquad (1)$$

kojom se vrši ovo obrtanje predstavlja trenutnu ugaonu brzinu tijela (ugaonu brzinu tijela u datom trenutku t). Ovdje je potrebno naglasiti da veličina $\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta\alpha/\Delta t)$ nije jednaka izvodu nekog ugla α po vremenu jer pri sfernom kretanju ne postoji takav jedan ugao, već se položaj tijela određuje sa tri nezavisna ugla.

Trenutnu ugaonu brzinu možemo predstaviti i kao vektor $\vec{\omega}$ čiji je intenzitet jednak apsolutnoj vrijednosti izraza (1) a koji je usmjeren duž trenutne ose obrtanja OP tako da, gledano iz vrha vektora $\vec{\omega}$, obrtanje tijela vidimo u suprotnom smjeru od obrtanja kazaljke na satu.

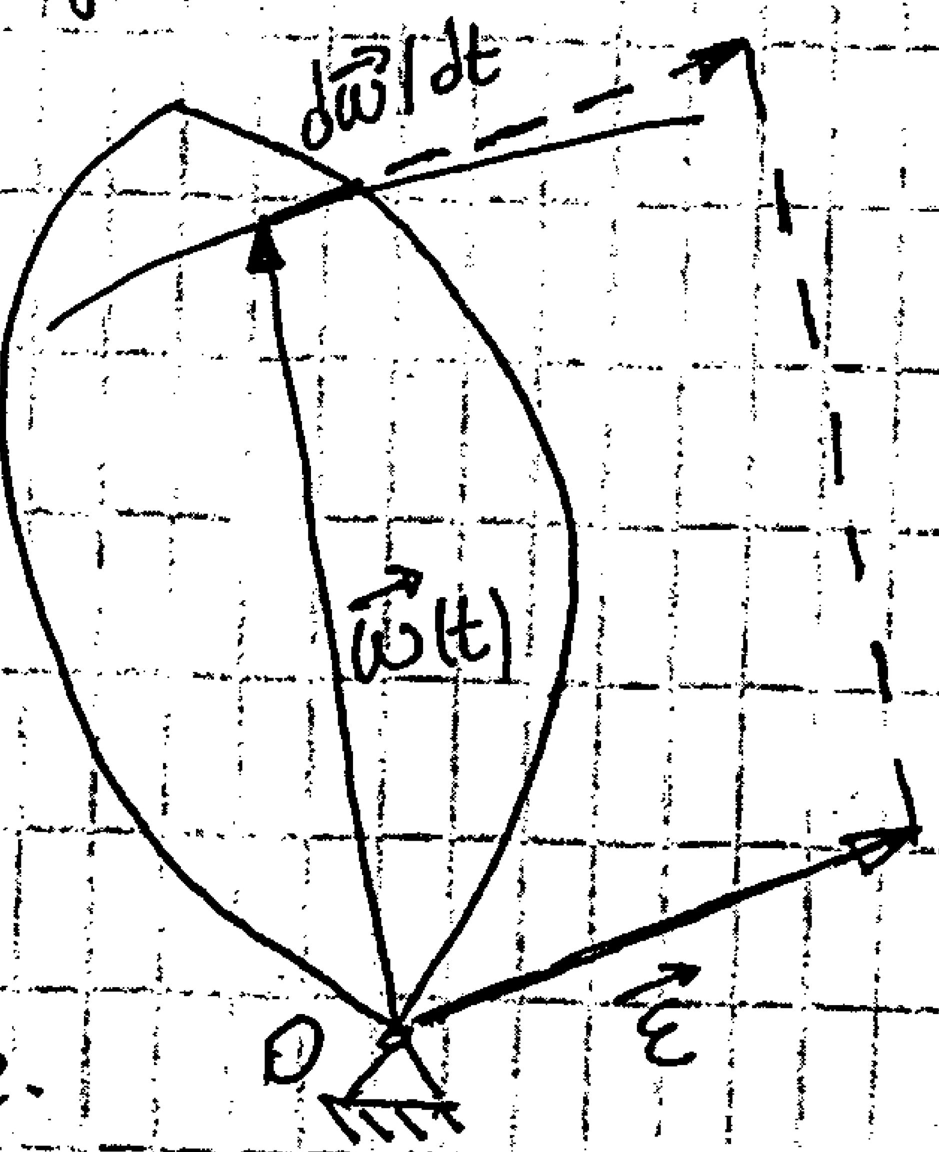
Trenutna obrtna osa tijela razlikuje se od nepokretne ose po tome što se njen pravac u prostoru i u samom tijelu mijenja tokom kretanja.

Prema tome, obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke, može da se predstavi kao niz uzastopnih elementarnih obrtanja ugaonim brzinama $\vec{\omega}$ oko čitavog niza trenutnih obrtnih osa koje sve prolaze kroz nepokretnu tačku. Uzastopni položaji trenutnih obrtnih osa obrazuju pri tome konusnu površ, a kraj vektora $\vec{\omega}$ opisuje na toj površi neku krivu — hodograf vektora trenutne ugaone brzine.



Vektor ugaonog ubrzanja tijela $\vec{\varepsilon}$ karakteriše promjenu vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$, tj. jednak je izvodu po vremenu ugaone brzine:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2)$$



$\vec{\varepsilon}$ ima pravac tangente na hodografu ugaone brzine $\vec{\omega}$, a uzima se da prolazi kroz nepokretnu tačku tijela.

Prema tome, u datom slučaju, za razliku od slučaja obrtanja oko nepokretne ose, pravac vektora ugaonog ubrzanja ne poklapa se sa pravcem vektora ugaone brzine.

Ako sa $\vec{\omega_0}$ označimo jedinični vektor vektora ugaone brzine (odnosno trenutne ose obrtanja) onda je $\vec{\omega} = \omega\vec{\omega_0}$, ω – intezitet vektora ugaone brzine. Sada je

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega\vec{\omega_0}) = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega_0} + \omega\frac{d\vec{\omega_0}}{dt}$$

odnosno

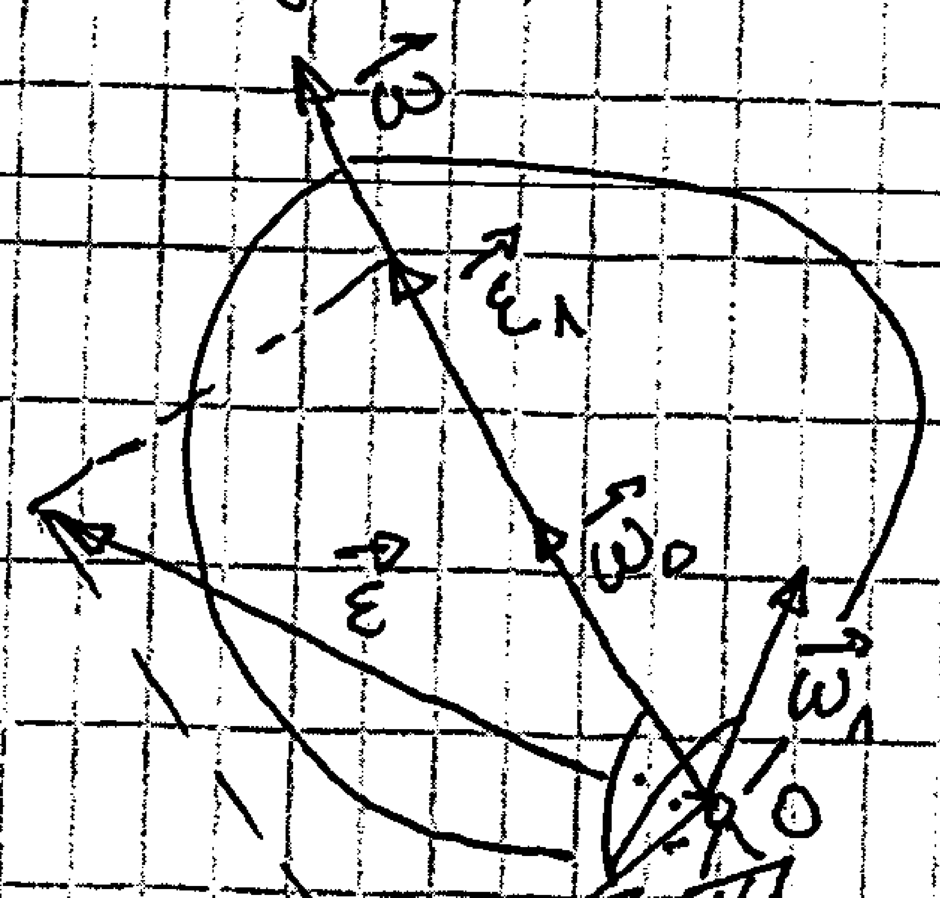
$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon_1} + \vec{\varepsilon_2}, \quad \vec{\varepsilon_1} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega_0}, \quad \vec{\varepsilon_2} = \omega\frac{d\vec{\omega_0}}{dt} \qquad (3)$$

Iz izraza (3) vidimo da se vektor ugaonog ubrzanja tijela sastoji iz dvije komponente.

- Komponenta $\vec{\varepsilon_1} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega_0}$ karakteriše promjenu vektora ugaone brzine samo po intezitetu. usmjerena je duž trenutne obrtne ose i ima isti smjer kao $\vec{\omega}$ ako je $\dot{\omega} > 0$, odnosno suprotan smjer ako je $\dot{\omega} < 0$.
- Komponenta $\vec{\varepsilon_2} = \omega\frac{d\vec{\omega_0}}{dt}$ karakteriše promjenu pravca vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$. Ako sa $\vec{\omega_1}$ označimo ugaonu brzinu obrtanja trenutne obrtne ose, a samim tim i vektora $\vec{\omega_0}$, onda prema formuli za izvod vektora konstantnog inteziteta ($|\vec{\omega_0}| = 1$) (v. napomenu u 4.4) dobijamo da je

$$\vec{\varepsilon_2} = \omega(\vec{\omega_1} \times \vec{\omega_0}) = \vec{\omega_1} \times \vec{\omega}, \qquad (4)$$

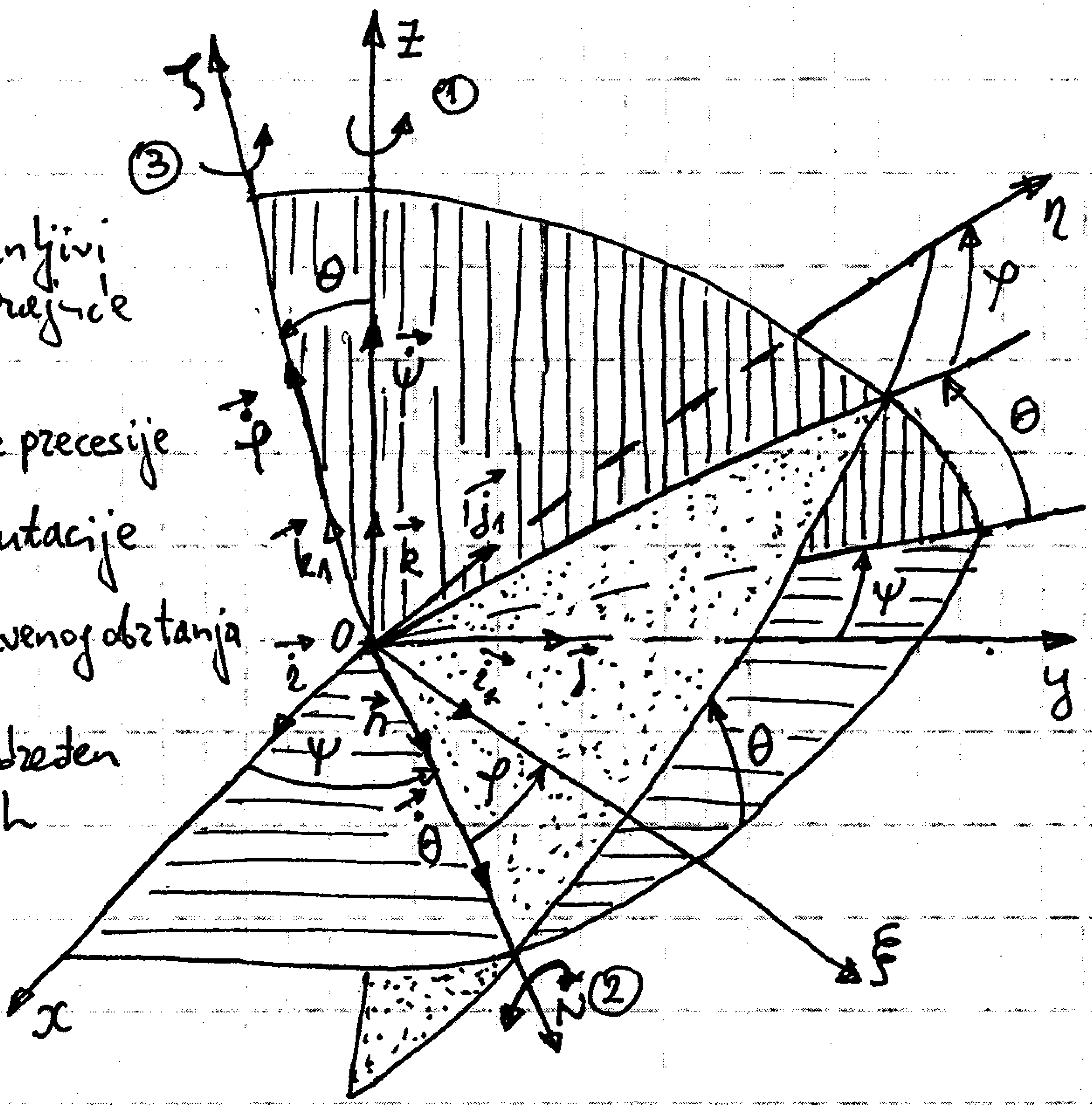
tj. komponenta $\vec{\varepsilon_2}$ uvijek je upravna na $\vec{\omega}$ i $\vec{\omega_1}$, a samim tim i na $\vec{\varepsilon_1}$.
Specijalno, ako se tijelo obrće oko nepokretne ose, onda je $\vec{\omega_0} = const$ i, dakle, $\vec{\varepsilon_2} = 0$. Isto tako, ako je $\omega = const$ onda je $\vec{\varepsilon_1} = 0$.



4.3 Ojlerove kinematičke jednačine

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – jedinični vektori nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$

$\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – –〃– pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$



$\vec{n}$ – jedinični vektor čvorne ose

Pošto su Ojlerovi uglovi ψ, θ i φ promjenljivi u toku vremena možemo uvesti odgovarajuće ugaone brzine:

$\vec{\dot\psi} = \dot\psi \vec{k} = \frac{d\psi}{dt}\vec{k}$ – vektor ugaone brzine precesije

$\vec{\dot\theta} = \dot\theta \vec{n} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}$ – –〃– –〃– nutacije

$\vec{\dot\varphi} = \dot\varphi \vec{k}_1 = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}_1$ – –〃– –〃– sopstvenog obrtanja

Vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ određen je vektorskim zbirom komponentnih ugaonih brzina:

$$\vec{\omega} = \vec{\dot\psi} + \vec{\dot\theta} + \vec{\dot\varphi}$$

$$= \dot\psi \vec{k} + \dot\theta \vec{n} + \dot\varphi \vec{k}_1,$$

što kada se projicira na ose pokretnog koordinatnog sistema daje:

$$\omega_\xi = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi$$

$$\omega_\eta = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi$$

$$\omega_\zeta = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi$$

Intezitet vektora trenutne ugaone brzine je $\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta}$, a pravac vektora $\vec{\omega}$ u odnosu na sistem $O\xi\eta\zeta$ određen je relacijama:

$$\cos\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{i}_1) = \frac{\omega_\xi}{\omega}, \quad \cos\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{j}_1) = \omega_\eta/\omega, \quad \cos\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{k}_1) = \omega_\zeta/\omega$$

Analogno, u nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$, je

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

gdje su: $\omega_x = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi$, $\omega_y = -\dot\varphi \sin\theta \cos\psi + \dot\theta \sin\psi$, $\omega_z = \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta$

Projekcije vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ na ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema nazivaju se Ojlerove kinematičke jednačine.

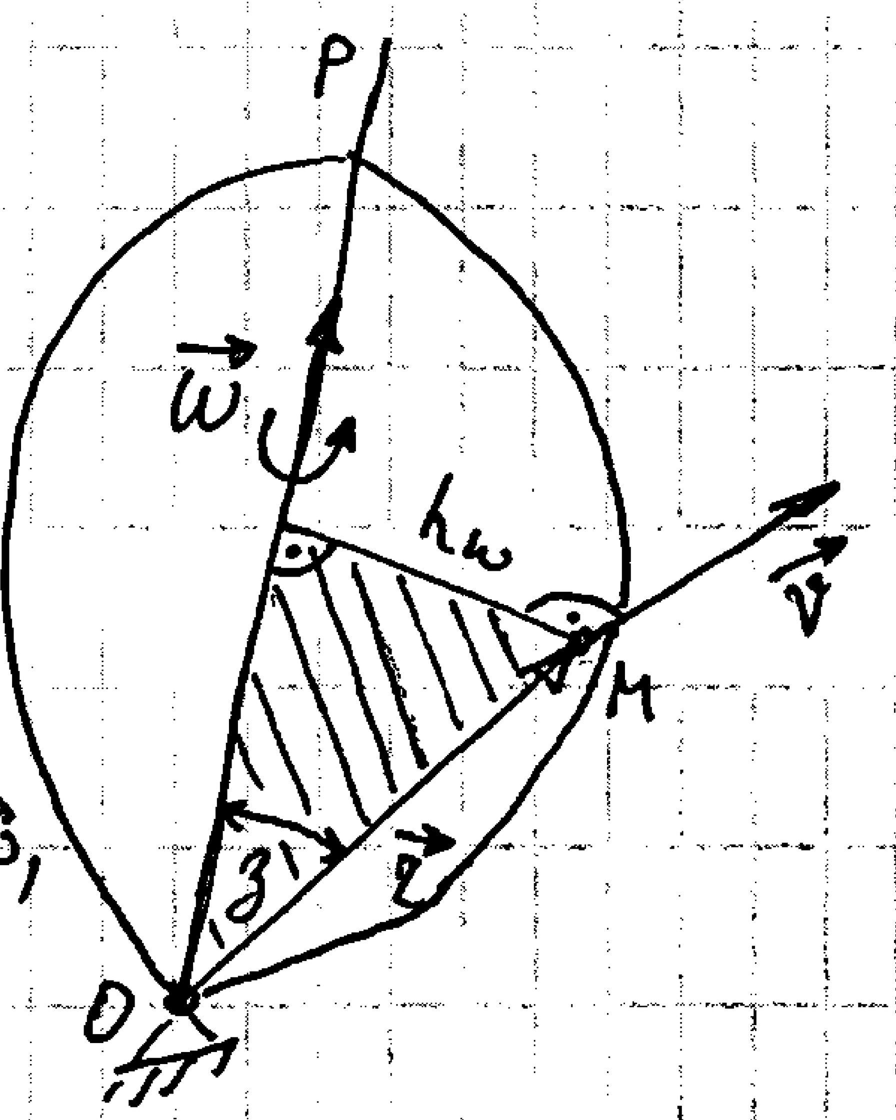
Ako znamo konačne jednačine obrtanja tijela oko nepokretne tačke onda je na osnovu Ojlerovih kinematičkih jednačina moguće odrediti u svakom trenutku vremena vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ a time ujedno i položaj trenutne obrtne ose OP_1, jer je vektor $\vec{\omega}$ usmjeren duž te ose.

4.4 Brzine tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

U odjeljku 4.2 pokazano je da se obrtanje oko nepokretne tačke sastoji iz niza elementarnih obrtanja oko trenutnih osa obrtanja, pri čemu u svakom trenutku vremena t imamo jednu trenutnu osu obrtanja duž koje je usmjeren vektor ugaone brzine $\vec{\omega}(t)$. Trenutna osa obrtanja se može smatrati nepokretnom u infinitezimalnom intervalu vremena dt, pa se Ojlerov obrazac za brzinu tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose (v. 2.3)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1)$$

može primijeniti i na obrtanje oko nepokretne tačke.



Dakle, vektor brzine proizvoljne tačke M tijela u nekom trenutku t, čiji je vektor položaja u tom trenutku $\vec{r}$ određen je sledećim elementima:

- pravac je upravan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{r}$ i $\vec{\omega}$,
- intenzitet brzine jednak je proizvodu intenziteta ugaone brzine i rastojanja tačke M od trenutne ose obrtanja: $v = \omega r \sin\gamma = \omega h_\omega \qquad (2)$
- smjer brzine tačke je takav da $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ i $\vec{v}$ čine sistem vektora desne orijentacije.

Polazeći od formule (1) lako se određuju projekcije brzine tačke tijela na ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema

a) $O\xi\eta\zeta$: $\vec{v} = v_\xi \vec{i}_1 + v_\eta \vec{j}_1 + v_\zeta \vec{k}_1$; $\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{i}_1 + \omega_\eta \vec{j}_1 + \omega_\zeta \vec{k}_1$; $\vec{r} = \xi \vec{i}_1 + \eta \vec{j}_1 + \zeta \vec{k}_1$ $\begin{pmatrix} \xi = const \\ \eta = const \\ \zeta = const \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = (\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta)\vec{i}_1 + (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta)\vec{j}_1 + (\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi)\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow v_\xi = \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \quad v_\eta = \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \quad v_\zeta = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi \qquad (3)$$

b) $Oxyz$: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Analogno prethodnom slučaju je:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x \qquad (4)$$

Pošto su brzine tačaka trenutne ose obrtanja jednake nuli, jednačinu trenutne ose obrtanja u pokretnom koordinatnom sistemu dobijamo iz (3) izjednačavajući desne strane tih izraza sa nulom:

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta} \qquad (5)$$

---

odnosno u nepokretnom koordinatnom sistemu na osnovu (4) jednačina trenutne ose biće

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \qquad (6)$$

N. Pošto je $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{r} = \overline{OM}$, $r = \overline{OM} = const$ jer je tijelo kruto, to se imajući u vidu (1) može zaključiti da je izvod po vremenu bilo kojeg vektora $\vec{A}(t)$ konstantnog intenziteta određen formulom: $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$ gdje je $\vec{\Omega}$ ugaona brzina vektora $\vec{A}$.
Na osnovu toga izvodi ortova pokretnog koordinatnog sistema čvrsto vezanog za tijelo biće

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1$$ – Poasonove formule.

4.5 Ubrzanja tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

Pošto je vektor brzine proizvoljne tačke tijela određen izrazom

$$\vec v = \vec\omega\times\vec r, \qquad (1)$$

ubrzanje proizvoljne tačke tijela dobija se diferenciranjem po vremenu ovog izraza.

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec r) = \frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r + \vec\omega\times\frac{d\vec r}{dt},$$

odnosno, s obzirom da je $\vec\varepsilon = d\vec\omega/dt$ i $\vec v = d\vec r/dt$,

$$\vec a = \vec a_\varepsilon + \vec a_\omega,\quad \vec a_\varepsilon = \vec\varepsilon\times\vec r,\quad \vec a_\omega = \vec\omega\times\vec v = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) \qquad (2)$$

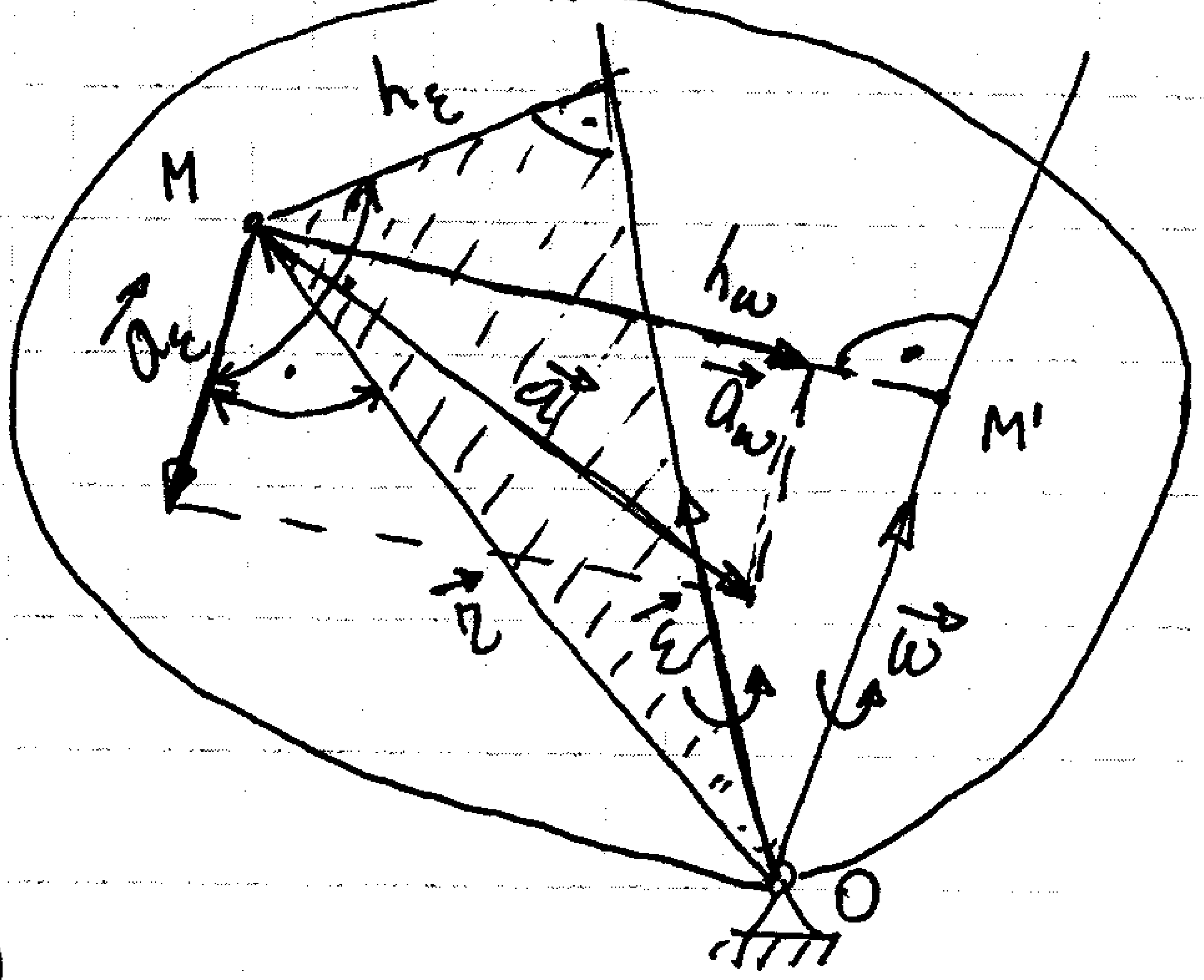
Komponenta

$$\vec a_\varepsilon = \vec\varepsilon\times\vec r,$$

čiji je uzrok ugaono ubrzanje tijela, zove se obrtno ubrzanje i određeno je sledećim elementima:

- pravac je upravan na ravan koja prolazi kroz pokretnu tačku M tijela i vektor $\vec\varepsilon$,
- smjer je takav da vektori $\vec a_\varepsilon$, $\vec\varepsilon$ i $\vec r$ čine sistem desne orijentacije
- intezitet je jednak proizvodu inteziteta ugaonog ubrzanja i rastojanja pokretne tačke od pravca ugaonog ubrzanja,

$$a_\varepsilon = \varepsilon r|\sin\sphericalangle(\vec\varepsilon,\vec r)| = \varepsilon h_\varepsilon$$



Druga komponenta

$$\vec a_\omega = \vec\omega\times\vec v = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r),$$

čiji je uzrok ugaona brzina $\vec\omega$, zove se aksipetalno ubrzanje. Ako se uzme da je $\vec r = \vec{OM'} + \vec{M'M}$ ($\vec{M'M}\perp\vec\omega$) biće $\vec a_\omega = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{M'M})$ jer je $\vec\omega\times\vec{OM'}=0$ ($\vec{OM'}\parallel\vec\omega$).
Koristeći pravilo dekompozicije dvostrukog vektorskog proizvoda (V.3.4), izraz za $\vec a_\omega$ se svodi na oblik

$$\vec a_\omega = \vec\omega(\underset{\vec\omega\perp\vec{M'M}}{\overset{0}{\vec\omega\cdot\vec{M'M}}}) - \vec{M'M}\,\omega^2 = \omega^2\,\vec{MM'}$$

iz koga se vidi da je aksipetalno ubrzanje usmjereno od pokretne tačke M po normali na trenutnu osu ka trenutnoj osi, a njegov intezitet a_ω jednak je proizvodu kvadrata inteziteta ugaone brzine i rastojanja tačke M od trenutne ose obrtanja

$$a_\omega = \omega^2\,\overline{MM'} = \omega^2 h_\omega$$

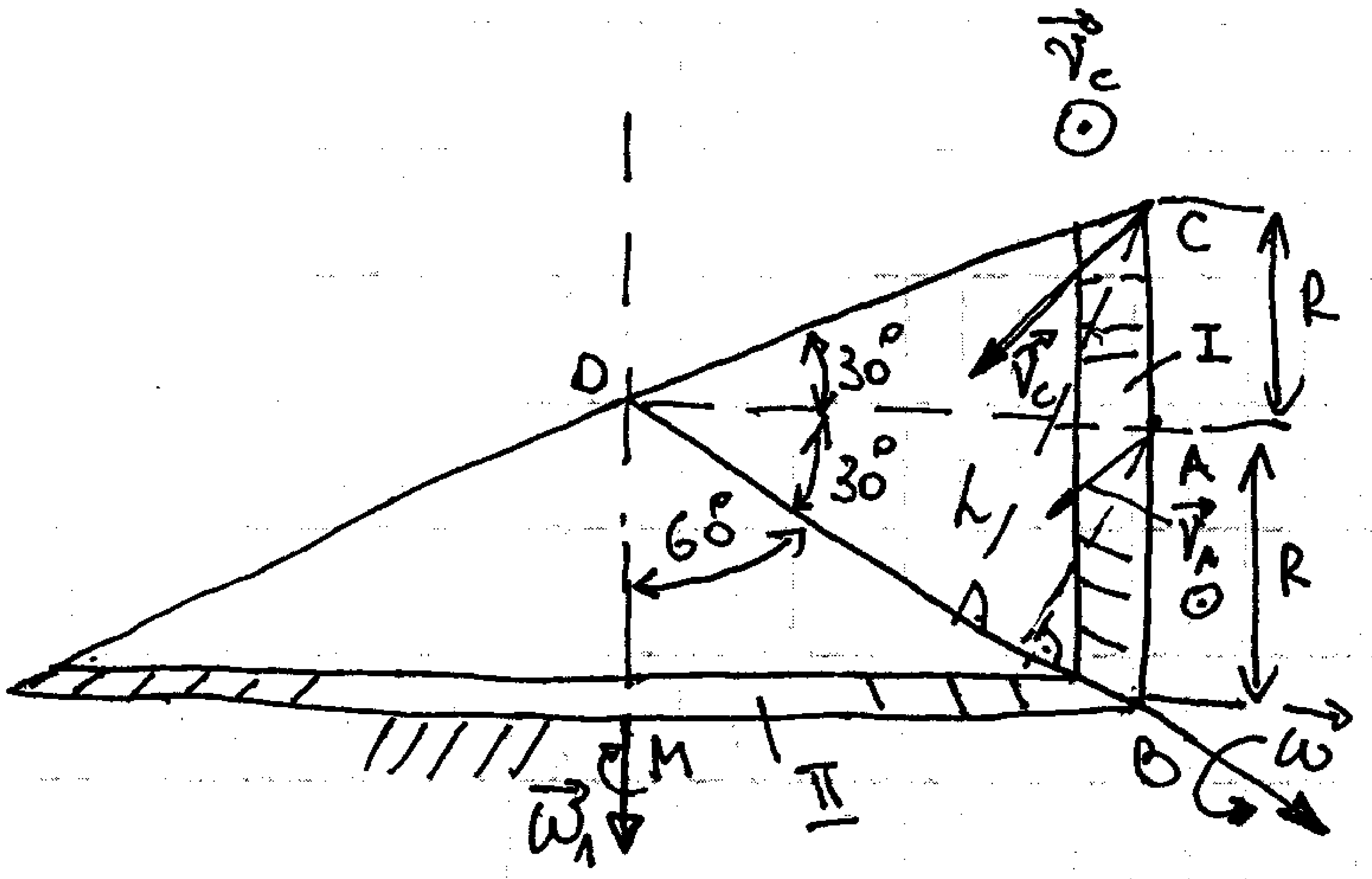
~~N1. U slučaju obrtanja tijela oko nepokretne tačke, za razliku od obrtanja oko nepo-~~ kretne ose, $\vec a_\varepsilon$ i $\vec a_\omega$ se ne poklapaju sa tangencijalnim i normalnim ubrzanjem posmatrane tačke tijela.

Komponente $\vec a_\varepsilon$ i $\vec a_\omega$ u opštem slučaju nijesu uzajamno normalne pa se intezitet ubrzanja tačke izračunava kao dijagonala paralelograma po formuli

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2 + 2a_\varepsilon a_\omega\cos\sphericalangle(\vec a_\varepsilon,\vec a_\omega)}$$

N2. S obzirom da je $\vec\varepsilon = \vec\varepsilon_1+\vec\varepsilon_2$ (V.4.2), obrtno ubrzanje se može razložiti na dvije komponente
$\vec a_\varepsilon = \vec a_{\varepsilon_1} + \vec a_{\varepsilon_2}$, $\vec a_{\varepsilon_1} = \vec\varepsilon_1\times\vec r$ - posledica promjene inteziteta vektora $\vec\omega$ i pada u pravac vektora brzine $\vec v$,
$\vec a_{\varepsilon_2} = \vec\varepsilon_2\times\vec r$ - posledica promjene pravca vektora $\vec\omega$.

Primjer 1. Konični zupčanik I sa uglom pri vrhu $2\alpha = 60°$ i poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po nepokretnom zupčaniku II (v. sliku). Brzina tačke C zupčanika I je v_C. Odrediti ugaonu brzinu zupčanika I, kao i ugaonu brzinu ose OA.



Kretanje zupčanika I je obrtanje oko nepokretne tačke O, a ono se sastoji od obrtanja oko ose OA i od obrtanja, zajedno sa osom OA, oko ose OM.

Pošto je $v_B = 0$ (kotrljanje bez klizanja), to je OB trenutna osa rotacije

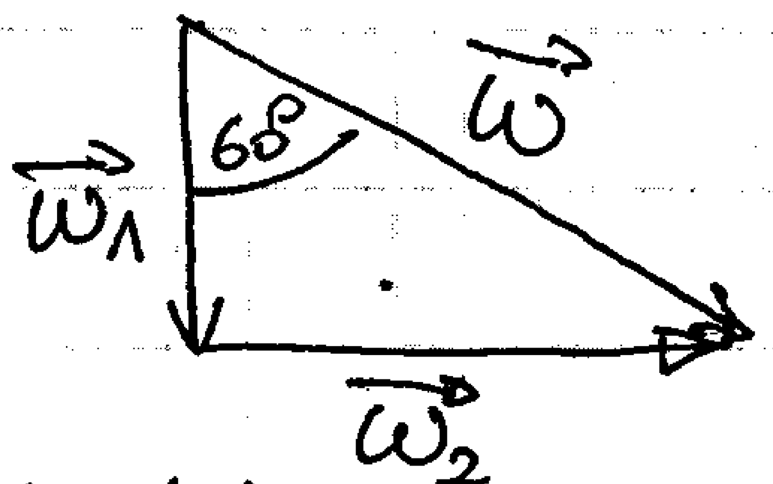
$$v_C = \omega h = R\sqrt{3}\,\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_C}{R\sqrt{3}}}$$ – ugaona brzina zupčanika I

$v_A = R\frac{\sqrt{3}}{2}\omega = \frac{v_C}{2}$, S druge strane $v_A = \overline{OA}\,\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_1$, ω_1 – ugaona brzina obrtanja ose OA oko ose OM

$$\Rightarrow \quad \frac{v_C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\cancel{2}\,v_C}{2R\sqrt{3}}, \quad \boxed{\omega_1 = \frac{v_C}{2R\sqrt{3}}}$$

Kolika je ugaona brzina obrtanja zupčanika oko ose OA?

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$



$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{v_C}{2R}}$$

Primjer 2. Tijelo se obrće oko nepokretne tačke O ugaonom brzinom $\vec{\omega} = t^2\vec{i} + \vec{j} + 2t\vec{k}$. U trenutku $t = 2$ odrediti intezitet ugaone brzine i ugaonog ubrzanja tijela, kao i brzinu i ubrzanje one tačke tijela koja se u tom trenutku nalazi na osi trenutnog obrtanja na rastojanju $\overline{OM} = 2$.

$\vec{\omega} = t^2\vec{i} + \vec{j} + 2t\vec{k}$

$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2t\vec{i} + 2\vec{k}$

$\vec{\omega}(t=2) = \vec{\omega}_2 = 4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$

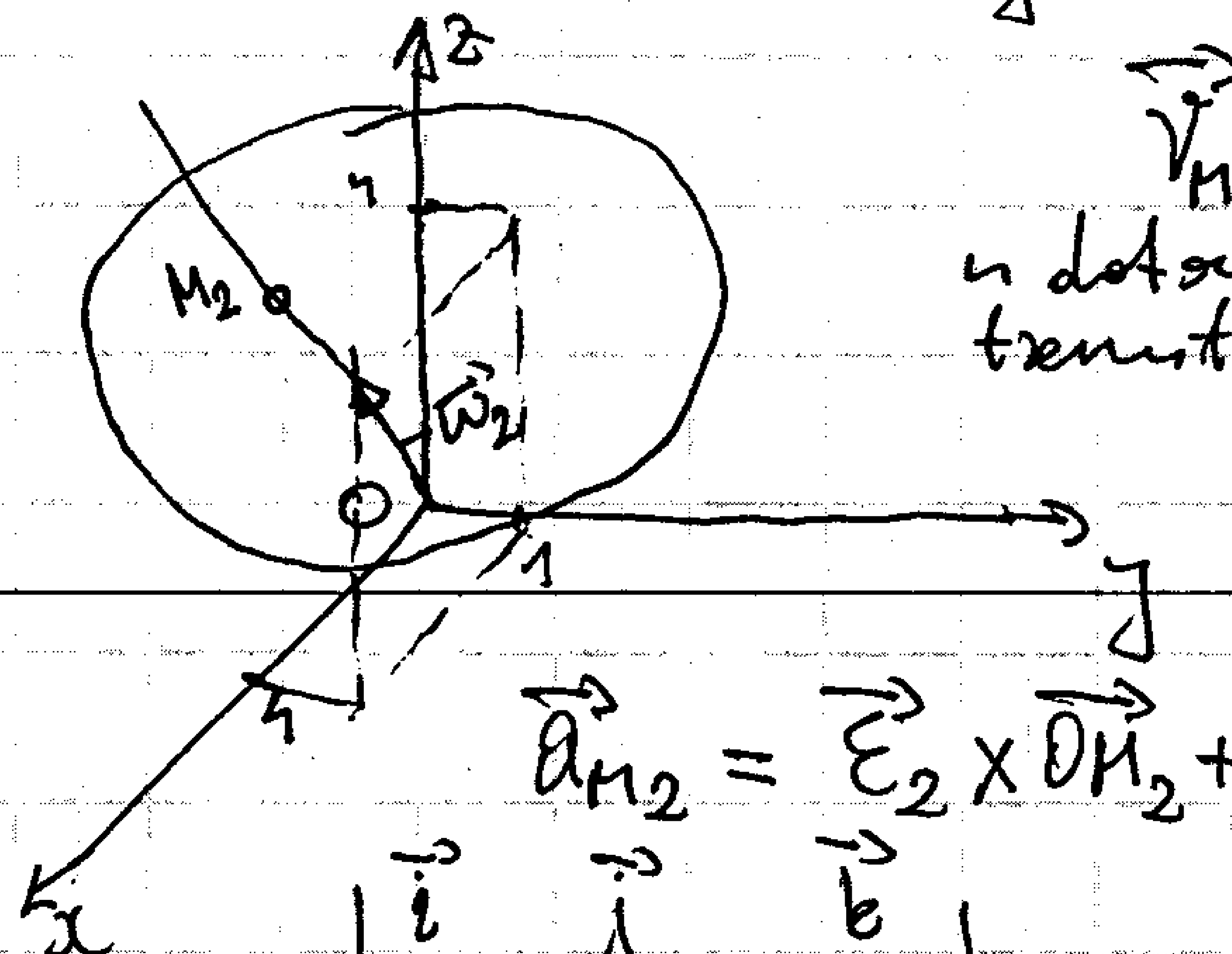
$\omega_2 = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}$

$\vec{\varepsilon}(t=2) = \vec{\varepsilon}_2 = 4\vec{i} + 2\vec{k}$

$\varepsilon_2 = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\vec{\omega}_{02} = \frac{\vec{\omega}_2}{\omega_2} = \frac{4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{33}}$

$\overrightarrow{OM_2} = \overline{OM}\,\vec{\omega}_{02} = \frac{8\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}}{\sqrt{33}}$



$\vec{v}_{M2} = 0$, jer se tačka M u datom trenutku nalazi na trenutnoj obrtnoj osi.

$$\vec{a}_{M2} = \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{OM_2} + \cancel{\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{M2}}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 2 \\ \frac{8}{\sqrt{33}} & \frac{2}{\sqrt{33}} & \frac{8}{\sqrt{33}} \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{33}}\vec{i} - \frac{16}{\sqrt{33}}\vec{j} + \frac{8}{\sqrt{33}}\vec{k}$$

$$a_{M2} = \frac{4}{\sqrt{33}}\sqrt{1+16+4} = \frac{4\sqrt{7}}{11}$$

2. Odrediti intezitet ugaone brzine tijela koje izvodi sferno kretanje, ako su konačne jednačine kretanja

$$\psi = \pi \sin t, \quad \theta = \pi \cos t, \quad \varphi = \pi.$$

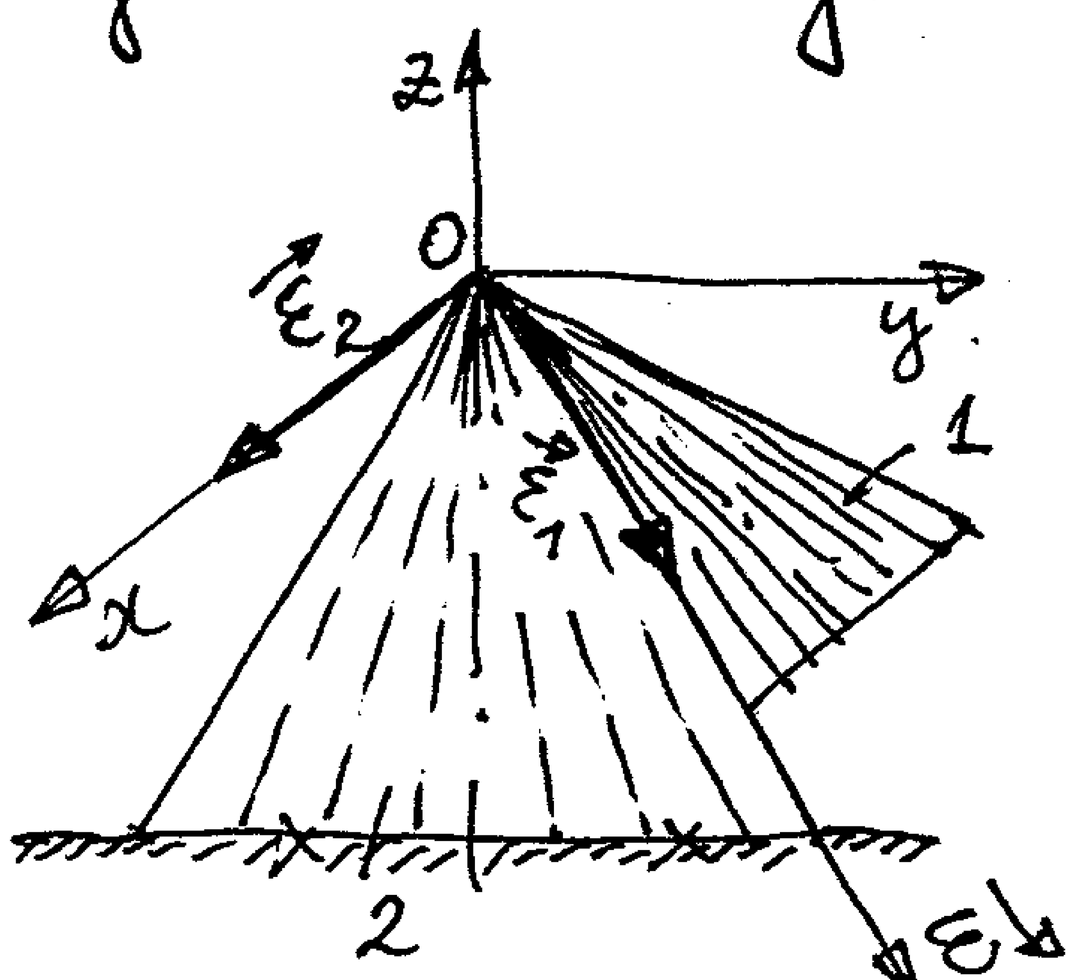
$$\dot{\psi} = \pi \cos t, \quad \dot{\theta} = -\pi \sin t, \quad \dot{\varphi} = 0$$

Intezitet ugaone brzine određen je izrazom (v. predavanja, §4.3)

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}, \text{ pa je}$$

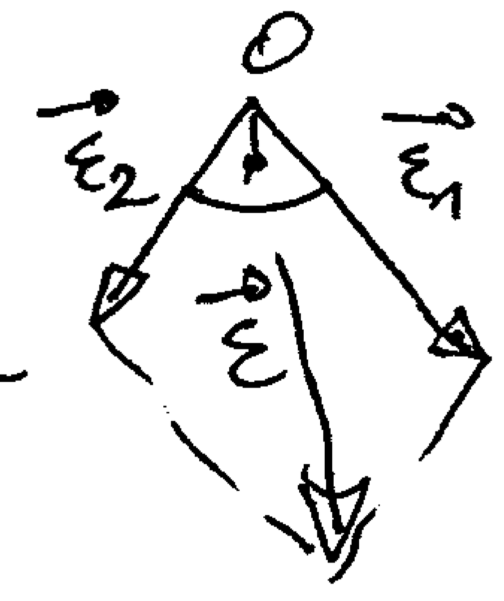
$$\omega = \pi\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \pi = 3{,}14 \text{ rad/s}$$

3. Pri kotrljanju bez klizanja konusa 1 po nepokretnom konusu 2 u datom trenutku komponente ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}_1$ i $\vec{\varepsilon}_2$ (paralelna i upravna komponenta na vektor ugaone brzine) imaju vrijednosti: $\varepsilon_1 = 0{,}1\pi$ rad/s², $\varepsilon_2 = 0{,}2\pi$ rad/s². Odrediti ugaono ubrzanje.

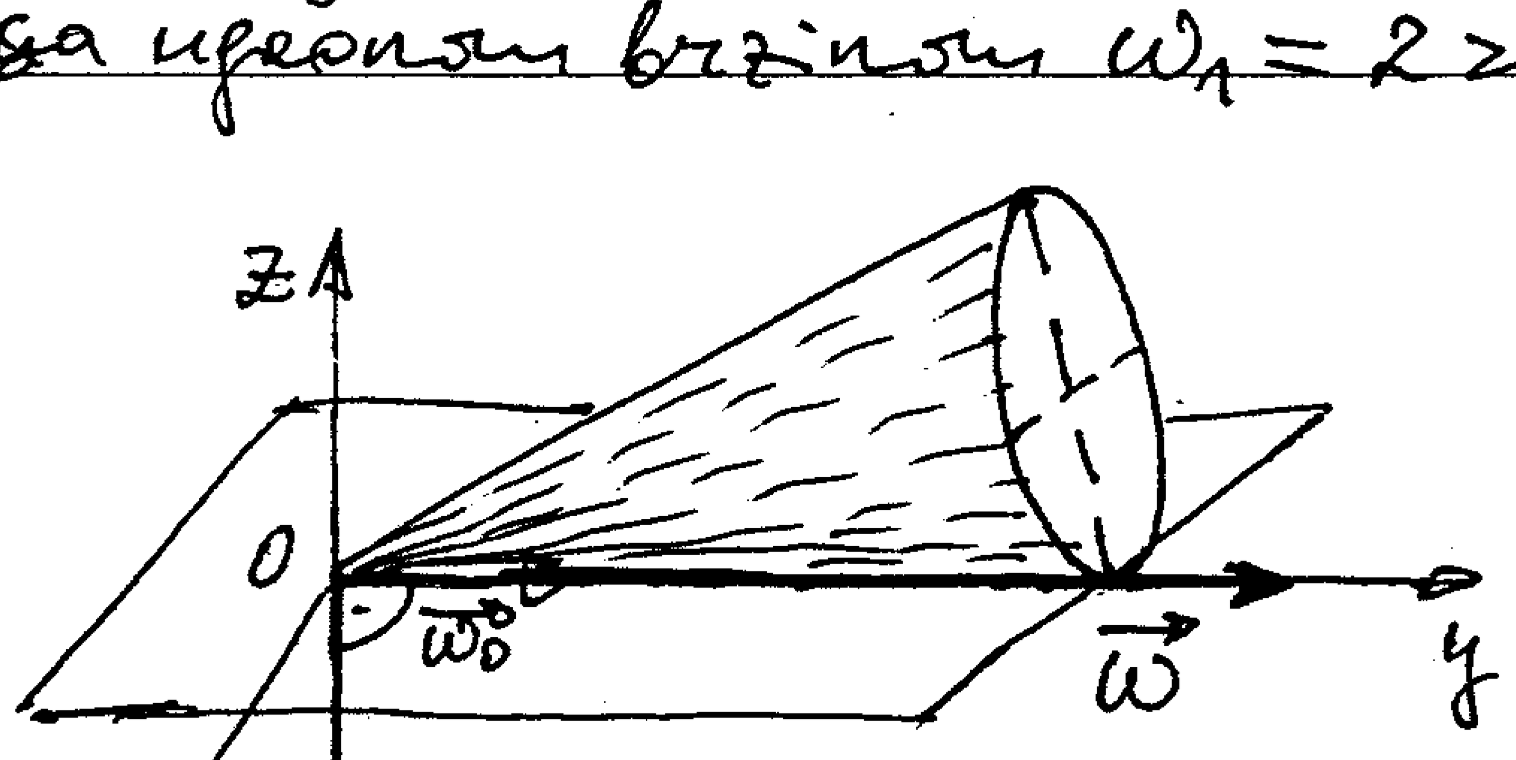


$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = 0{,}702 \text{ rad/s}^2$$



4. Pri kotrljanju bez klizanja konusa po nepokretnoj horizontalnoj ravni vektor ugaone brzine intenziteta $\omega = 2\pi$ rad/s obrće se oko vertikalne z ose sa ugaonom brzinom $\omega_1 = 2$ rad/s. Odrediti intenzitet ugaonog ubrzanja.



$$\vec{\omega} = \omega\vec{\omega}_0, \quad \omega = \text{const} = 2\pi$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2; \quad \vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 = 0$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \omega\,\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$$

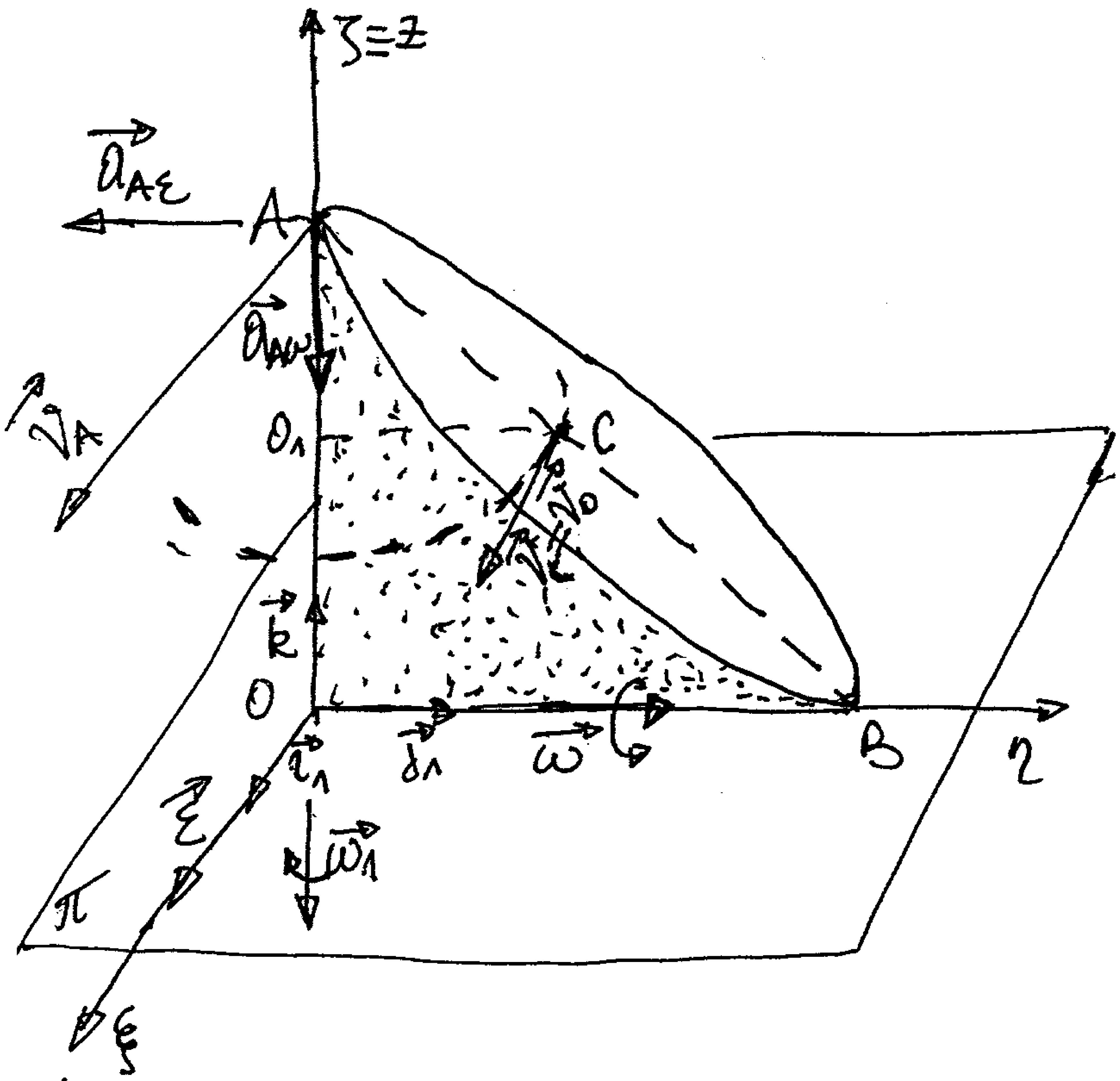
$$\varepsilon = \varepsilon_2 = \omega_1\omega\sin 90^\circ = 4\pi = 12{,}56 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

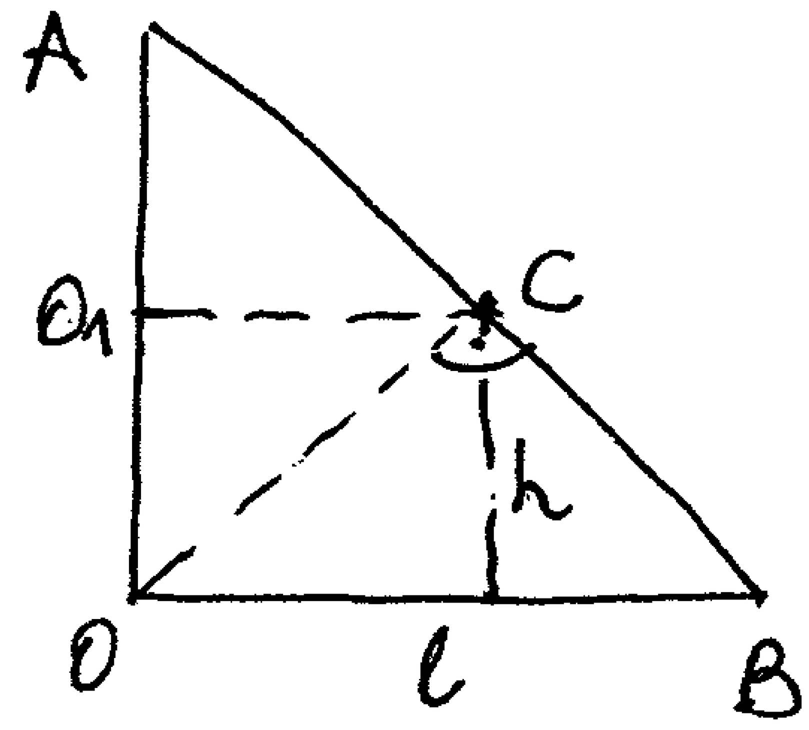
5. Pravi kružni konus, čiji je ugao pri vrhu jednak $2\alpha = 90^\circ$, kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj ravni π tako da mu je tačka O nepokretna. Ako je $\overline{OB} = l$, a intezitet brzine središta osnove konusa (tačke C) konstantan i jednak v_0, odrediti:

a) ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje konusa;

b) brzine tačaka A i B;

c) obrtna, aksipetalna i ukupna ubrzanja tačaka A i B.





$h = \frac{l}{2}, \quad \overline{O_1C} = \frac{l}{2}$

a) Zbog kotrljanja bez klizanja OB je trenutna osa rotacije pa ugaona brzina konusa $\vec{\omega}$ pada u pravac nje.
Postavimo koord. sistem $O\xi\eta z$ tako da se osa $O\eta$ poklopa sa izvodnicom konusa OB (v. sl.).

$$v_c = h\omega \Rightarrow v_0 = \frac{l}{2}\omega \Rightarrow \omega = \frac{2v_0}{l}$$

~~Vodeći računa o smjeru brzine $\vec{v}_c$, konačno imamo~~

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{2v_0}{l}\vec{j}_1} \text{ — vektor ugaone brzine konusa}$$

$\vec{\omega}$, kao i $O\xi\eta z$, se obrće oko z ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}_1$ koja se takođe određuje na osnovu brzine tačke C. Pri tome treba imati u vidu da se tačka C kreće po kružnici poluprečnika $\overline{O_1C} = \frac{l}{2}$ konstantnom brzinom $v_C = v_0$.

$$v_C = \overline{O_1C}\,\omega_1 \Rightarrow v_0 = \frac{l}{2}\omega_1,$$

pa je, vodeći računa o smjeru brzine $\vec{v}_C$:

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{2v_0}{l}\vec{k}$$

Sada je, ~~obzirom~~ da je $\omega = const$, $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$,

tj

$$\vec{\varepsilon} = -\left(\frac{2v_0}{l}\right)^2 \underbrace{\vec{k} \times \vec{j}_1}_{=-\vec{i}}$$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{4v_0^2}{l^2}\vec{i}_1}$$ - vektor ugaonog ubrzanja konusa

b)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA}, \quad \vec{OA} = l\vec{k}$$

$$\vec{v}_A = \frac{2v_0}{l}\vec{j}_1 \times l\vec{k} = \boxed{2v_0\vec{i}_1}$$ - vektor brzine tačke A

$\vec{v}_B = 0$, jer B leži na trenutnoj osi rotacije ($\vec{OB} \parallel \vec{\omega}$)

c)

$$\vec{a}_{A\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OA} = \frac{4v_0^2}{l^2}\vec{i}_1 \times l\vec{k} = -\frac{4v_0^2}{l}\vec{j}_1$$ - obrtno ubrzanje tačke A

$$\vec{a}_{A\omega} = \vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{OA})}_{\vec{v}_A} = \frac{2v_0}{l}\vec{j}_1 \times 2v_0\vec{i}_1 = -\frac{4v_0^2}{l}\vec{k}$$ - aksipetalno ubrzanje tačke A

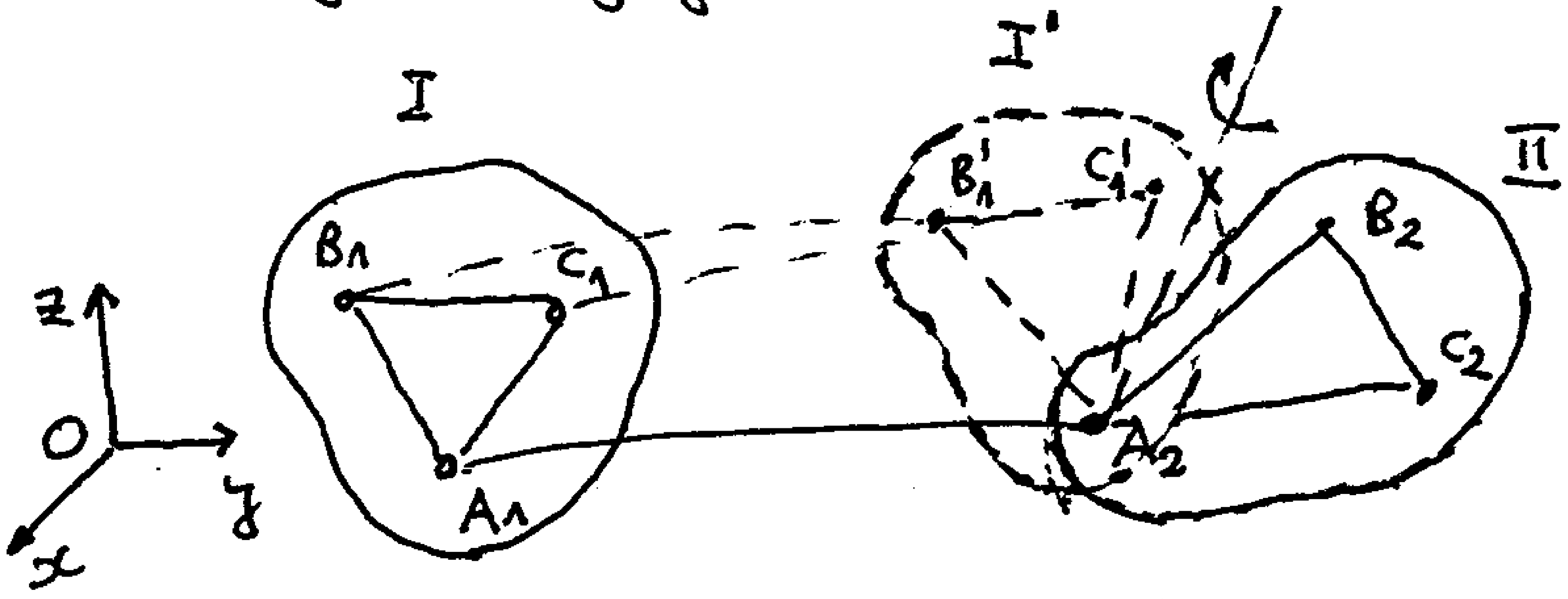
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\varepsilon} + \vec{a}_{A\omega} = -\frac{4v_0^2}{l}(\vec{j}_1 + \vec{k})$$ - vektor ubrzanja tačke A, a njegov intenzitet je $a_A = \frac{4v_0^2}{l}\sqrt{2}$.

$$\vec{a}_{B\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OB} = \frac{4v_0^2}{l^2}\vec{i}_1 \times l\vec{j}_1 = \frac{4v_0^2}{l}\vec{k}$$ - obrtno ubrzanje tačke B

$$\vec{a}_{B\omega} = \vec{\omega} \times \underbrace{\cancel{\vec{v}_B}}_{0} = 0$$

5. Opšti slučaj kretanja slobodnog krutog tijela

Razmotrimo najopštiji slučaj kretanja krutog tijela kada je ono slobodno i kada se kreće sasvim proizvoljno u prostoru. U tom slučaju položaj tijela u odnosu na koordinatni sistem referencije $Oxyz$ određen je očigledno položajem triju bilo kojih nekolinearnih tačaka A, B i C. Posmatrajmo dva položaja I i II koje zauzima tijelo u trenucima t_1 i $t_2 = t_1 + \Delta t$. Tijelo se može dovesti iz položaja I u II na sledeći način: najprije pomjerimo tijelo translatorno iz položaja I



u I' tako da jedna proizvoljno izabrana tačka tijela A_1 (pol) pređe u položaj A_2 (pri tome $\Delta A_1B_1C_1$ pređe u položaj $A_2B_1'C_1'$). Sada da bi tijelo prešlo u položaj II potrebno je da se ono okrene oko pola A_2, kao oko nepokretne tačke, a to je, kao što znamo, moguće ostvariti obrtanjem oko neke ose koja prolazi kroz pol.

Ako je Δt infinitezimalni priraštaj vremena ($\Delta t \to dt$) odgovarajuća translacija i obrtanje (osa konačnog obrtanja prelazi u trenutnu osu obrtanja) biće infinitezimalne veličine.

Prema tome, slobodno kretanje krutog tijela može se rastaviti na translatorno kretanje određeno kretanjem izabranog pola A i niza elementarnih obrtnih kretanja oko trenutnih obrtnih osa, koje prolaze kroz pol A.

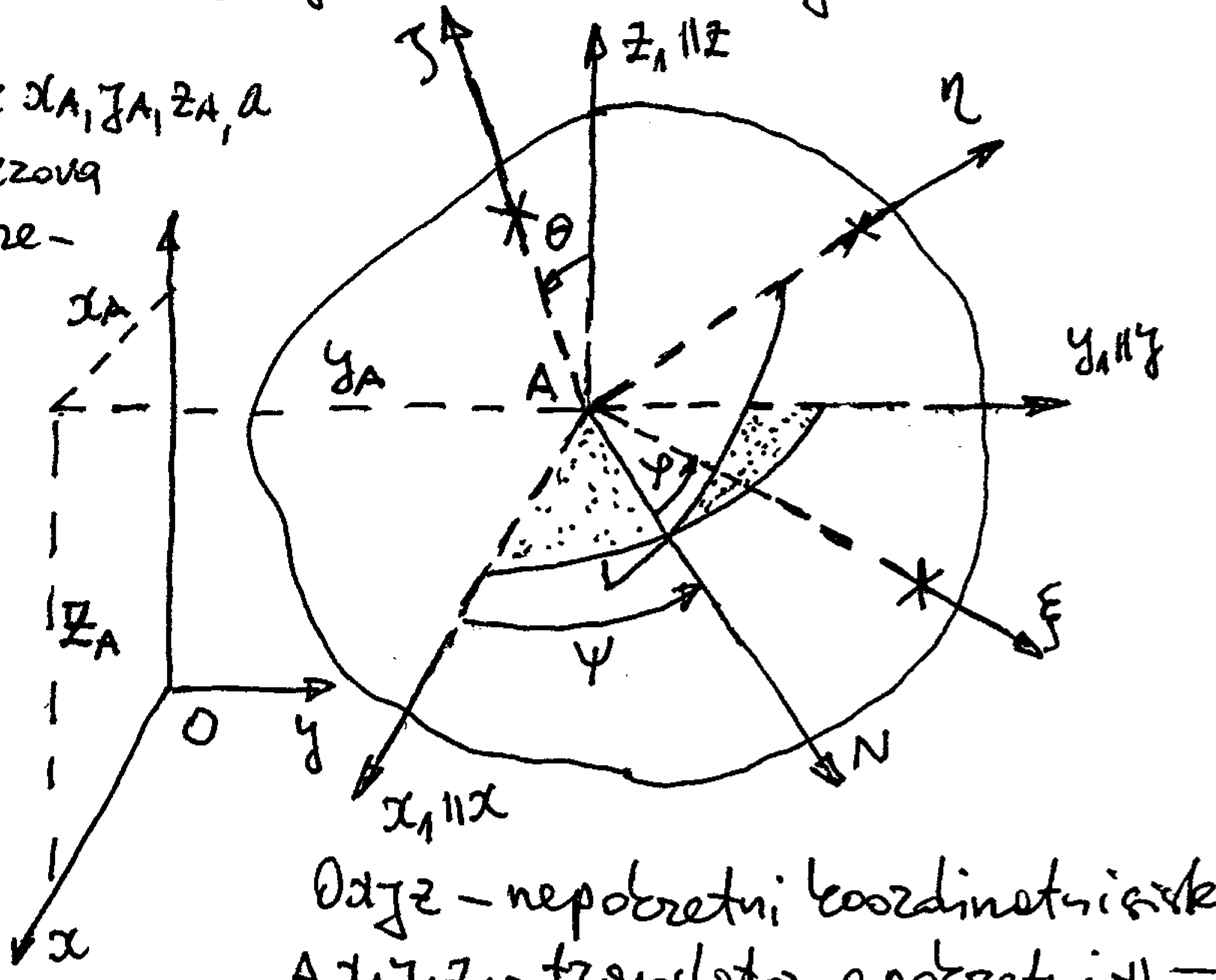
Iz prethodne analize slijedi da je položaj tijela određen položajem pola A i položajem tijela u odnosu na pol.

Položaj pola A određuju tri koordinate x_A, y_A, z_A, a položaj tijela u odnosu na pol A tri Ojlerova ugla ψ, θ i φ. Navedeni parametri predstavljaju generalisane koordinate slobodnog krutog tijela i ono, dakle, ima 6 stepeni slobode. Sa šest skalarnih funkcija vremena

$$x_A = x_A(t),\ y_A = y_A(t),\ z_A = z_A(t)$$

$$\psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t),\ \varphi = \varphi(t)$$

zadaju se konačne jednačine kretanja slobodnog krutog tijela.

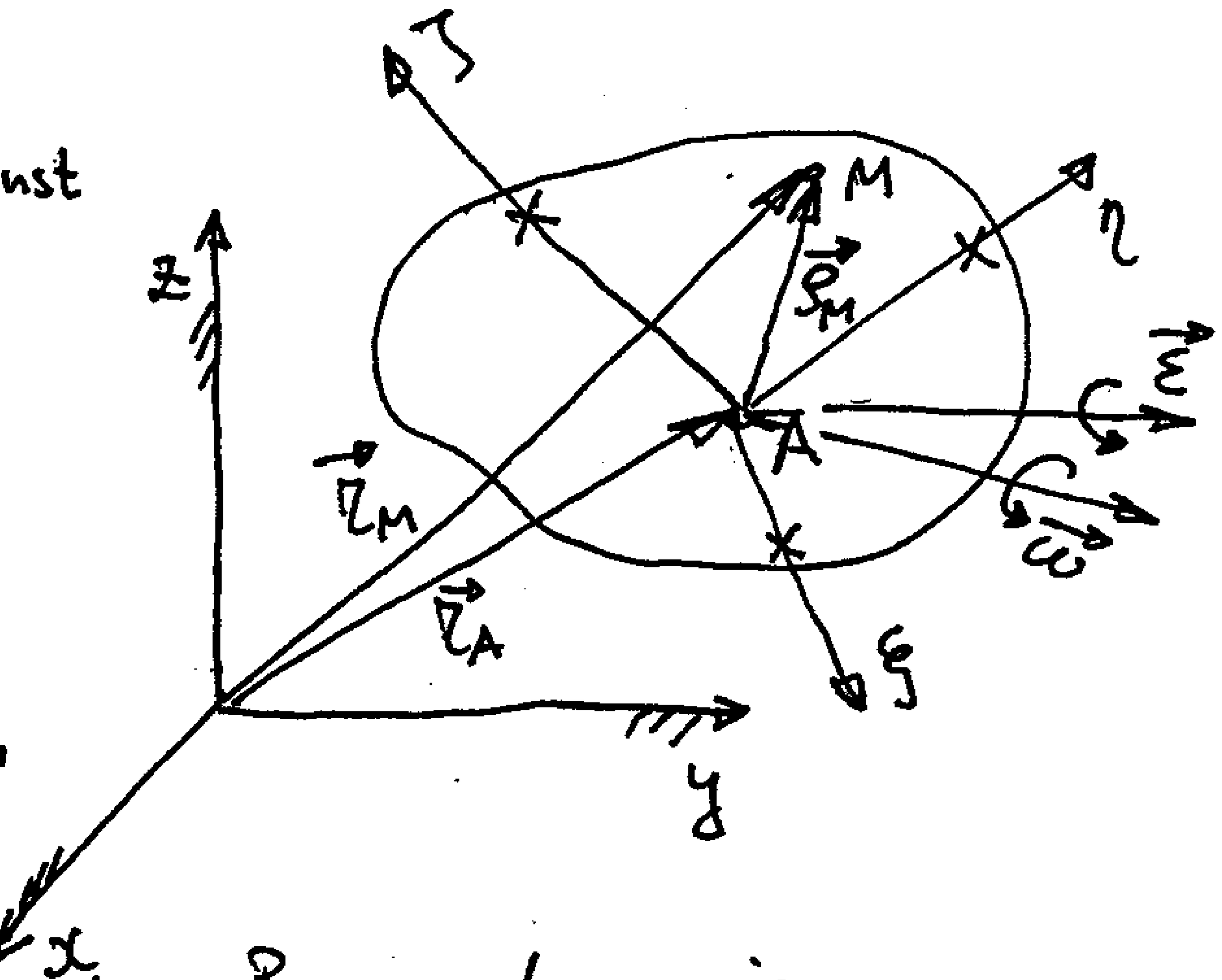


$Oxyz$ – nepokretni koordinatni sistem

$Ax_1y_1z_1$ – translatorno pokretni -II-

$A\xi\eta\zeta$ – koordinatni sistem čvrsto vezan za tijelo

5.1 Brzine i ubrzanja tačaka



$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}_M$, $\vec{\rho}_M = \overrightarrow{AM}$, $\overline{AM} = |\vec{\rho}_M| = const$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_M}{dt},$$

gdje je $\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_M$, $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$, a
$\frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{v}_M^A$ određuje promjenu u toku vremena vektora položaja tačke M u odnosu na pol A i može se odrediti na isti način kao kod bi tačka A bila nepokretna. Prema tome je, pri njegovom obrtanju oko pola A,

$$\vec{v}_M^A = \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM},$$ $\vec{\omega}$ – vektor trenutne ugaone brzine tijela,

i ova komponenta brzine zove se brzina tačke M u odnosu na pol A.

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_M^A, \quad \vec{v}_M^A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} \qquad (1)$$

Brzina proizvoljne tačke jednaka je geometrijskom zbiru brzine pola A i brzine te tačke u odnosu na pol.

$$\frac{d}{dt}(1) \Rightarrow \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \qquad (2)$$

gdje su:
$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_M$, $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – ugaono ubrzanje tijela pri njegovom obrtanju oko pola A, i $\vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM})}_{\vec{v}_M^A}$

Sada se (2) može zapisati u obliku

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A \qquad (3)$$

gdje je $\vec{a}_M^A = \vec{a}_{M\varepsilon}^A + \vec{a}_{M\omega}^A = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM}}_{\vec{a}_{M\varepsilon}^A} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM})}_{\vec{a}_{M\omega}^A}$

Prema tome, ubrzanje proizvoljne tačke jednako je geometrijskom zbiru ubrzanja pola i ubrzanja te tačke u odnosu na pol (ubrzanju te tačke pri obrtanju tijela oko pola).

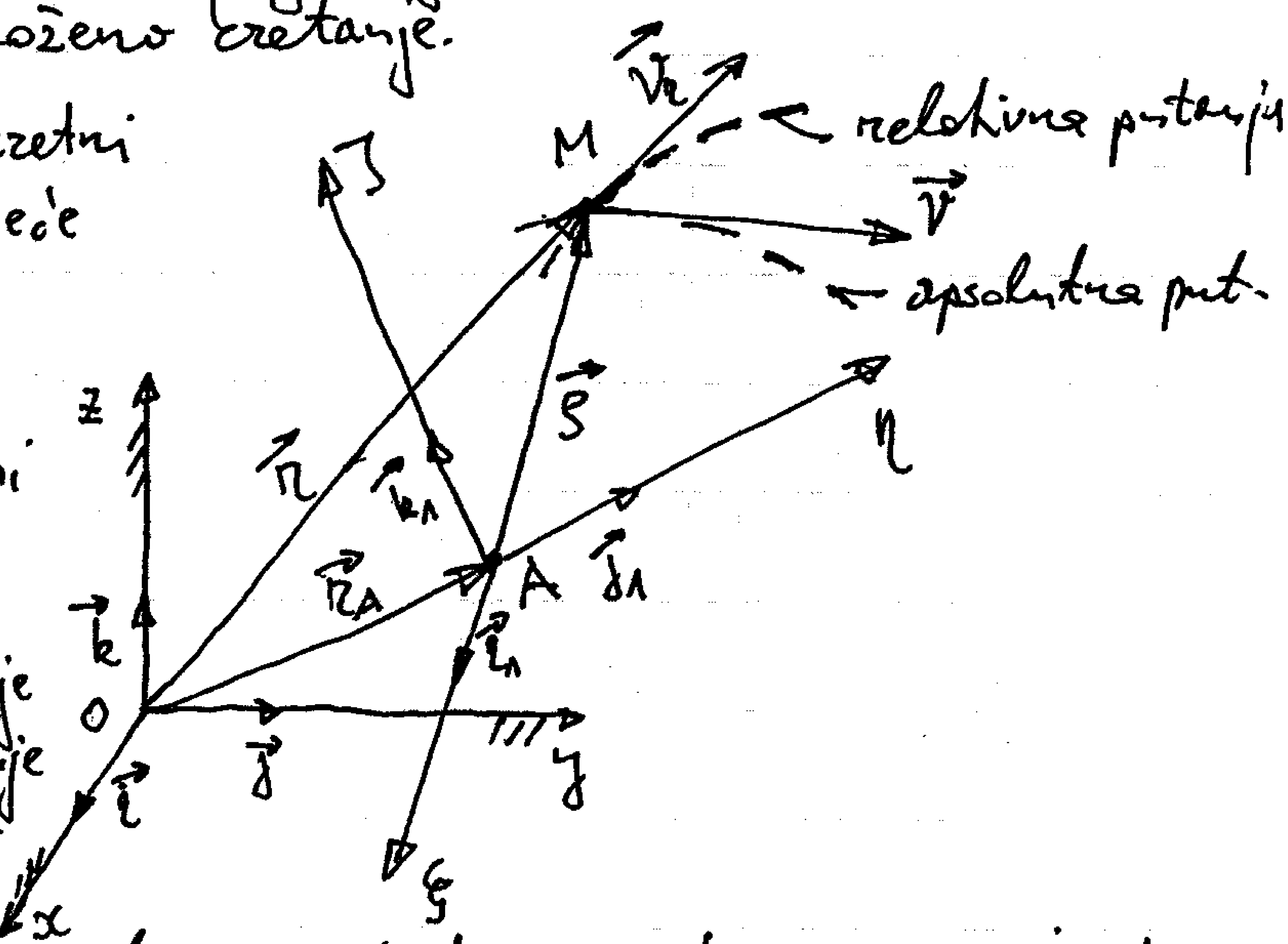
N. Vektori ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ i ugaone brzine $\vec{\omega}$ ne zavise od izbora pola A.

III Složeno kretanje tačke

1. Relativno, prenosno i apsolutno kretanje

U do sada razmatranim problemima posmatrali smo kretanje tačke u odnosu na jedan dati koordinatni sistem referencije. Međutim, često je korisno (ponekad i neophodno) da se kretanje tačke istovremeno posmatra u odnosu na dva koordinatna sistema, od kojih se jedan uslovno smatra nepokretnim, dok se drugi kreće po određenom zakonu u odnosu na prvi. Kretanje koje tom prilikom vrši tačka sastoji se iz dva kretanja i zove se složeno kretanje.

Neka se tačka M kreće u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$, koji se kreće u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$.



Kretanje tačke M u odnosu na pokretni sistem referencije $A\xi\eta\zeta$ (tj. u odnosu na tijelo za koje je vezan koor. sistem $A\xi\eta\zeta$) zove se relativno kretanje tačke. Drugim riječima, to je kretanje koje vidi posmatrač vezan za pokretni sistem $A\xi\eta\zeta$ i koji se kreće zajedno sa ovim sistemom. Brzina i ubrzanje tačke M u odnosu na ovaj sistem je njena relativna brzina $\vec{v}_r$ i relativno ubrzanje $\vec{a}_r$, a putanja koju opisuje tačka pri svom relativnom kretanju zove se relativna putanja.

Kretanje tačke M u odnosu na nepokretni sistem referencije $Oxyz$ zove se apsolutno (složeno) kretanje tačke. Brzina i ubrzanje tačke M u odnosu na ovaj sistem je njena apsolutna brzina $\vec{v}$ i apsolutno ubrzanje $\vec{a}$.

Kretanje pokretnog sistema referencije $A\xi\eta\zeta$ u odnosu na nepokretni sistem $Oxyz$ zove se prenosno kretanje za tačku M. Brzina i ubrzanje one tačke pokretnog koordinatnog sistema (tj. tačke tijela za koje je čvrsto vezan koor. sistem $A\xi\eta\zeta$) koja se u datom trenutku poklapa sa pokretnom tačkom M, predstavlja prenosnu brzinu $\vec{v}_p$ i prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ tačke M.

Zakon relativnog kretanja tačke M u odnosu na pokretni koord. sistem određen je u vektorskom obliku jednačinom

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t) = \xi(t)\,\vec{i}_1 + \eta(t)\,\vec{j}_1 + \zeta(t)\,\vec{k}_1 \qquad (1)$$

gdje su $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ - jedinični vektori osa pokretnog koordinatnog sistema.

Zakon kretanja tačke M u odnosu na nepokretni sistem (tj. zakon apsolutnog kretanja) dat je jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \qquad (2)$$

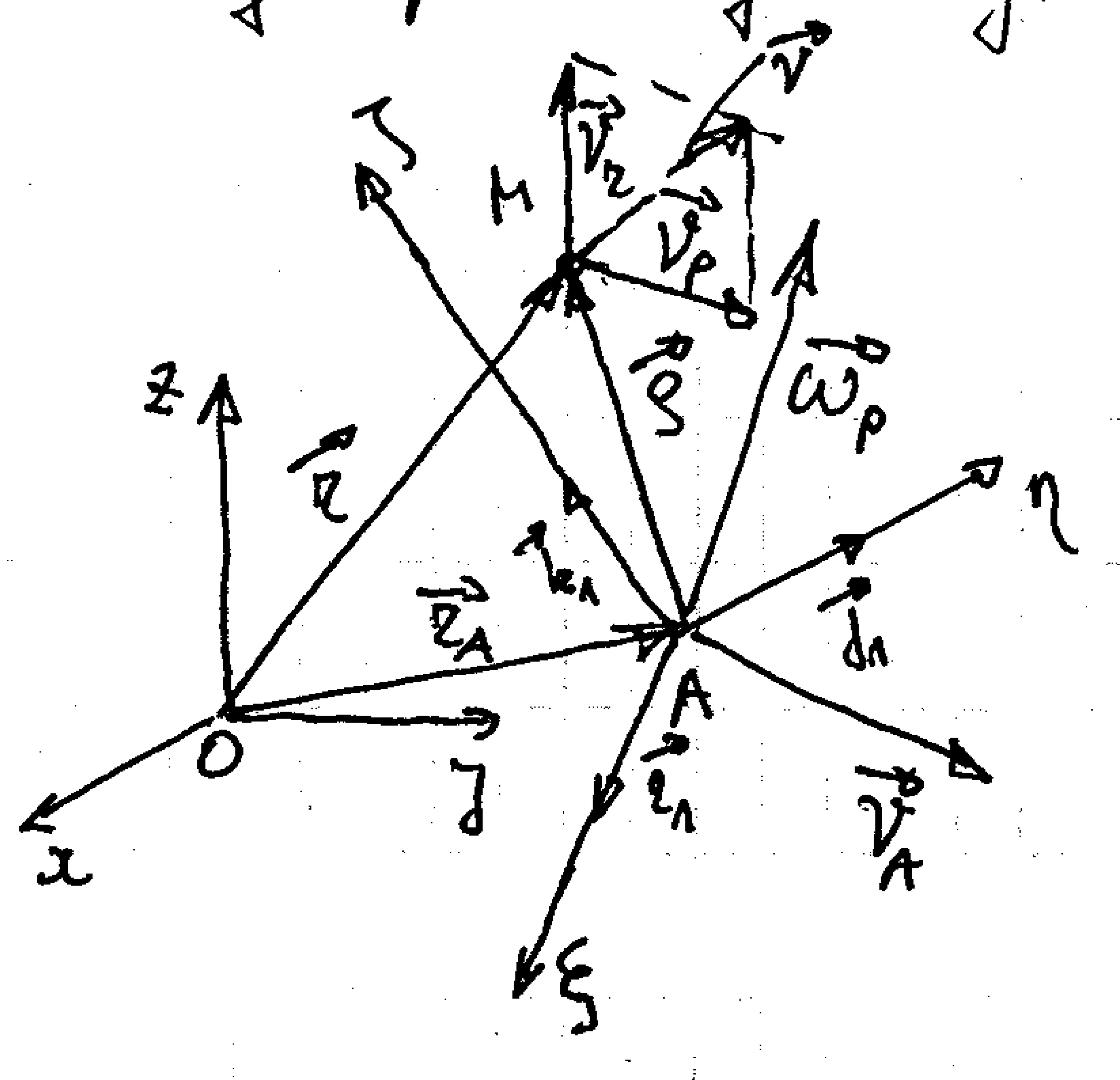
gdje su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - jedinični vektori osa nepokretnog sistema.

Očigledna je veza:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho} \qquad (3)$$

Osnovni zadatak proučavanja složenog kretanja tačke sastoji se u uspostavljanju zavisnosti između brzina i ubrzanja relativnog, prenosnog i apsolutnog kretanja.

2. Slaganje brzina



Apsolutna brzina je brzina pokretne tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$, tj.

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r} = \dot x \vec i + \dot y \vec j + \dot z \vec k \qquad (1)$$

i ona ima pravac tangente na apsolutnu putanju.

Relativna brzina, $\vec v_r$, karakteriše promjenu relativnog vektora položaja $\vec\rho$ tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ i, po analogiji sa izrazom (1), ona je

$$\vec v_r = \frac{d_r\vec\rho}{dt} = \dot\xi \vec i_1 + \dot\eta \vec j_1 + \dot\zeta \vec k_1 \qquad (2)$$

Indeks r u izvodu $\frac{d_r\vec\rho}{dt}$ uveden je da se naglasi da se diferenciranje po vremenu vrši pod pretpostavkom da nema prenosnog kretanja (tj. kao da su jedinični vektori $\vec i_1, \vec j_1, \vec k_1$ konstantni). $\vec v_r$ ima pravac tangente na relativnu putanju.
N. Izvod $\frac{d_r\vec\rho}{dt}$ zove se relativni odnosno lokalni izvod vektora $\vec\rho$.

Prenosna brzina, $\vec v_p$, pokretne tačke M je brzina tačke pokretnog koordinatnog sistema koja se u datom trenutku poklapa sa tačkom M i u slučaju kada pokretni sistem izvodi opšte kretanje biće

$$\vec v_p = \vec v_A + \vec\omega_p \times \vec\rho \qquad (3)$$

gdje su: $\vec v_A$ - brzina pola A (početka pokretnog koor. sistema), $\vec\omega_p$ - ugaona brzina pokretnog koordinatnog sistema (prenosna ugaona brzina).

Diferenciranjem po vremenu relacije (1-3) dobija se:

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r_A}{dt} + \frac{d\vec\rho}{dt} \qquad (4)$$

gdje je $\frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r} = \vec v$ i $\frac{d\vec r_A}{dt} = \vec v_A$. Nađimo $\frac{d\vec\rho}{dt} = \dot{\vec\rho}$, imajući u vidu da je

$$\vec\rho = \xi\vec i_1 + \eta\vec j_1 + \zeta\vec k_1$$

Očigledno je

$$\frac{d\vec\rho}{dt} = \underbrace{\dot\xi\vec i_1 + \dot\eta\vec j_1 + \dot\zeta\vec k_1}_{=\frac{d_r\vec\rho}{dt} = \vec v_r} + \xi\frac{d\vec i_1}{dt} + \eta\frac{d\vec j_1}{dt} + \zeta\frac{d\vec k_1}{dt}$$

pri čemu je uzeto u obzir da se pravci jediničnih vektora $\vec i_1, \vec j_1, \vec k_1$ mijenjaju u odnosu na nepokretni koor. sistem $Oxyz$. S druge strane, na osnovu Ojlerove formule, je

$$\frac{d\vec i_1}{dt} = \vec\omega_p \times \vec i_1, \quad \frac{d\vec j_1}{dt} = \vec\omega_p \times \vec j_1, \quad \frac{d\vec k_1}{dt} = \vec\omega_p \times \vec k_1$$

pa je

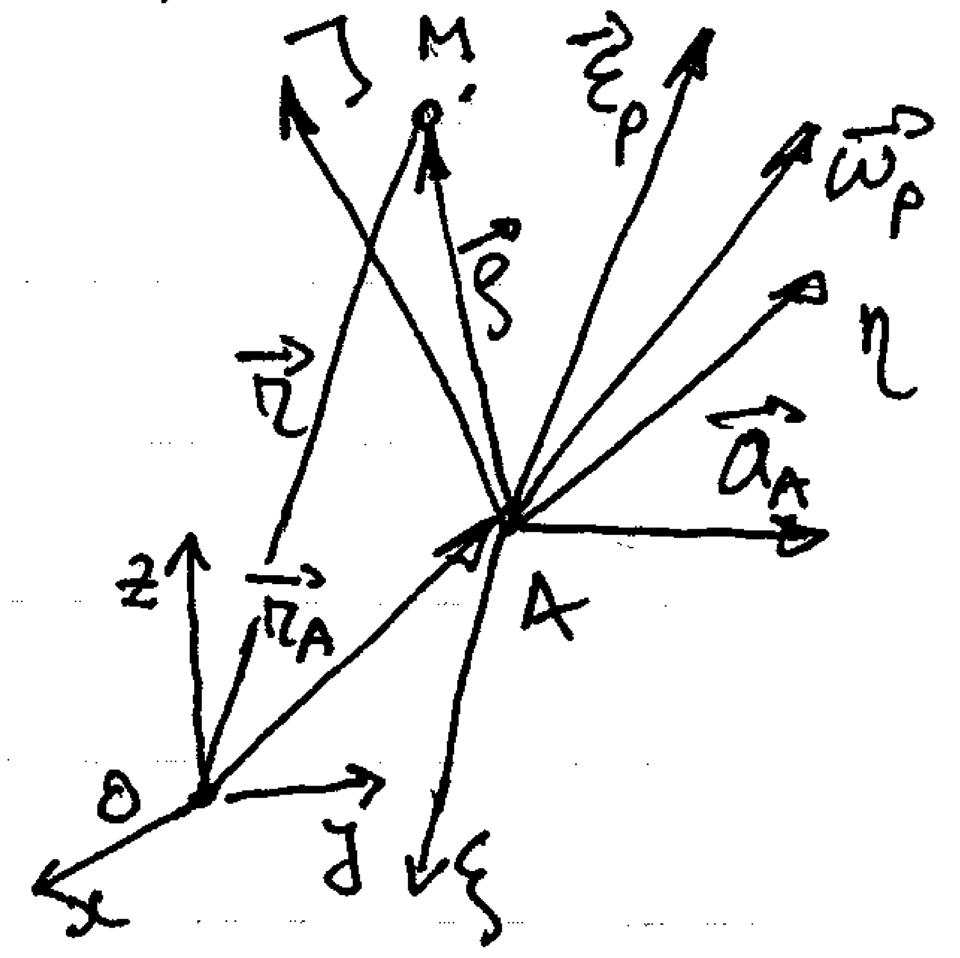
$$\xi\frac{d\vec i_1}{dt} + \eta\frac{d\vec j_1}{dt} + \zeta\frac{d\vec k_1}{dt} = \vec\omega_p \times (\xi\vec i_1 + \eta\vec j_1 + \zeta\vec k_1) = \vec\omega_p \times \vec\rho$$

Tako je
$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho} \qquad (5)$$
N. Analogno izvođenju relacije (5), pokazuje se da će apsolutni izvod (izvod u odnosu na nepokretni koordinatni sistem) bilo kojeg vektora, recimo $\vec{H}$, biti određen formulom
$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d_r\vec{H}}{dt} + \vec{\omega}_p \times \vec{H} \qquad (6)$$
gdje je $\frac{d_r\vec{H}}{dt} = \frac{dH_\xi}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dH_\eta}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dH_\zeta}{dt}\vec{k}_1$ relativni izvod (izvod u odnosu na pokretni koordinatni sistem) i $\vec{\omega}_p$ ugaona brzina pokretnog sistema. Formula (6) zove se Burova formula.

Na osnovu (4) i (5) je
$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho} + \vec{v}_r$$
odnosno, imajući u vidu da je $\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}$, konačno dobijamo
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r} \qquad (7)$$
Ova jednačina izražava teoremu o slaganju brzina: pri složenom kretanju tačke, apsolutna brzina jednaka je vektorskom zbiru prenosne i relativne brzine tačke.

3. Slaganje ubrzanja

Apsolutno ubrzanje, $\vec{a}$, tačke M je ubrzanje u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i ono je



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k} \qquad (1)$$

a karakteriše promjenu vektora apsolutne brzine.

Relativno ubrzanje, $\vec{a}_r$, je ubrzanje tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem i karakteriše promjenu relativne brzine pri relativnom kretanju:

$$\vec{a}_r = \frac{d_r\vec{v}_r}{dt} = \frac{d_r^2\vec{\rho}}{dt^2} = \ddot{\xi}\vec{i}_1+\ddot{\eta}\vec{j}_1+\ddot{\zeta}\vec{k}_1 \qquad (2)$$

Prenosno ubrzanje, $\vec{a}_p$, je jednako ubrzanju one tačke pokretnog koordinatnog sistema sa kojom se pokretna tačka M u datom trenutku poklapa:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_p\times\vec{\rho} + \vec{\omega}_p\times(\vec{\omega}_p\times\vec{\rho}) \qquad (3)$$

gdje je $\vec{a}_A$ - ubrzanje koordinatnog početka pokretnog sistema, a $\vec{\omega}_p$ i $\vec{\varepsilon}_p$ ugaona brzina i ugaono ubrzanje pokretnog sistema. Prenosno ubrzanje karakteriše promjenu prenosne brzine pri prenosnom kretanju.

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r, \quad \vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega}_p\times\vec{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_p}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}_p\times\frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

Imajući u vidu da je $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$, $\frac{d\vec{\omega}_p}{dt} = \vec{\varepsilon}_p$, $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega}_p\times\vec{\rho} = \vec{v}_r + \vec{\omega}_p\times\vec{\rho}$

i $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d_r\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}_p\times\vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega}_p\times\vec{v}_r$

dobijamo

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_p\times\vec{\rho} + \vec{\omega}_p\times(\vec{\omega}_p\times\vec{\rho}) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}_p\times\vec{v}_r$$

Prva tri člana na desnoj strani predstavljaju prenosno ubrzanje, tako da je konačno

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad (4)$$

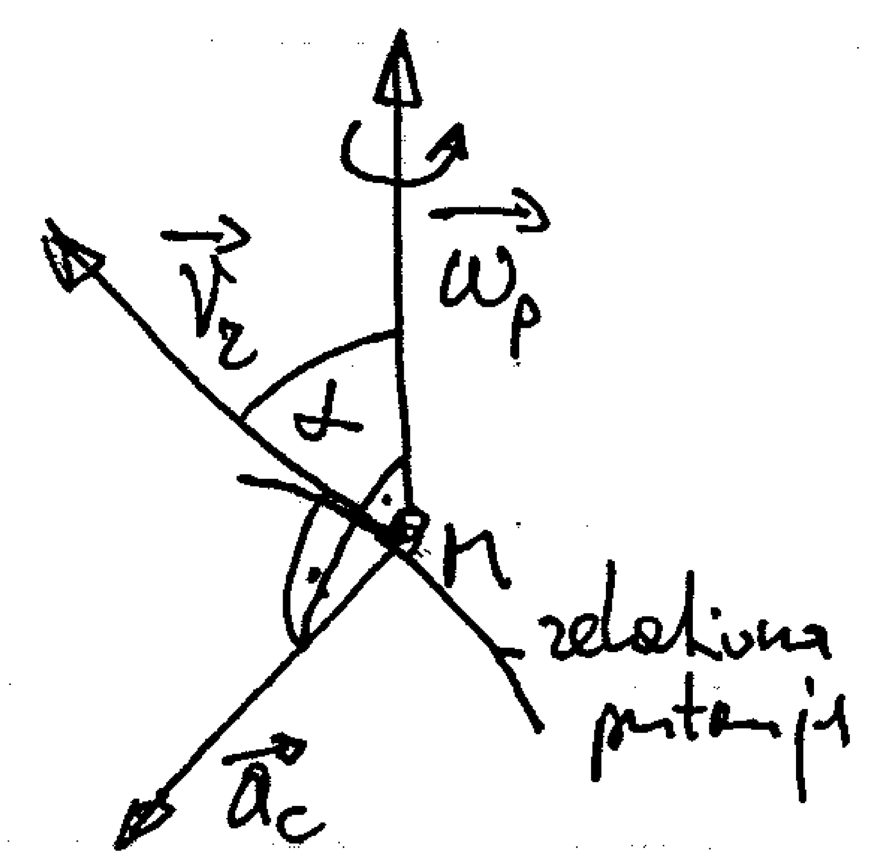
gdje se komponenta $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_p\times\vec{v}_r$ (5)

zove Koriolisovo ubrzanje.

Jednačina (4) izražava teoremu o slaganju ubrzanja (Koriolisova teorema): pri složenom kretanju tačke, apsolutno ubrzanje jednako je vektorskom zbiru prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja.

Koriolisovo ubrzanje je posledica promjene prenosne brzine usled relativnog kretanja, kao i promjene relativne brzine usled prenosnog kretanja.

Vektor $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$ upravan je na ravan koju obrazuju vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$, a usmjeren je tako da vektori $\vec{\omega}_p, \vec{v}_r$ i $\vec{a}_c$ obrazuju desni trijedar – obrtanje vektora $\vec{\omega}_p$ najkraćim putem ka vektoru $\vec{v}_r$ gledano sa vrha vektora $\vec{a}_c$ vidi se u smjeru suprotnom od smjera obrtanja kazaljke na satu.



Intenzitet Koriolisovog ubrzanja je

$$a_c = 2\omega_p v_r \sin\alpha, \quad \alpha = \sphericalangle(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r)$$

Koriolisovo ubrzanje jednako je nuli u sledećim slučajevima:

1) Ako je $\omega_p = 0$, što može biti zadovoljeno samo u nekom trenutku, ili pak na konačnom intervalu vremena kada je prenosno kretanje translacija

2) Ako je $v_r = 0$

3) Ako je $\vec{\omega}_p \parallel \vec{v}_r$

Konstrukcija Koriolisovog ubrzanja može se izvesti primjenom pravila Žukovskog koje glasi: Projekciju vektora relativne brzine $\vec{v}_r$ na ravan upravnu na vektor prenosne ugaone brzine $\vec{\omega}_p$, koja je jednaka $v_r \sin\alpha$, treba pomnožiti sa $2\omega_p$ i zaokrenuti za ugao od 90° u smjeru prenosnog obrtanja. Tako dobijeni vektor jednak je vektoru Koriolisovog ubrzanja tačke M.