Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 7. 5. 2026.

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ОПТИМИЗАЦИЈЕ У МЕХАНИЦИ КОНСТРУКЦИЈА

1. Фибоначијевом методом процијенити вриједност минимума функције

$$y = x^3 - 4x^2$$

унутар интервала $x = [0,4]$ с тачношћу до 10^{-1}. Користити се само калкулатором и задржати се на четири итерације.

2. Написати програмски код у матлаб окружењу који тражи максимум функције

$$y = x^3 - 4x^2$$

унутар интервала $x = [-2,2]$ с $\varepsilon = 10^{-6}$ користећи се методом сјечице. Дати графички приказ функције и тражене екстремне вриједности у посљедњој итерацији.

3. Одредити максимум функције

$$z = -(x^2 + y^2 + xy)$$

користећи се Пауеловом методом и калкулатором. Претрагу почети из тачке са координатама (1; 2), а у почетку се кретати по правцима дефинисаним координатним осама. Приказати само једну пуну итерацију.

4. Написати програмски код којим се тражи максимум функције

$$z = x^3 - 3x + y^3 - 3y$$

помоћу Њутнове методе. Претрагу почети из тачке (0,2; 0,5).

5. Која је кључна предност методе интерполације полиномом у односу на Њутнову методу?

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ОПТИМИЗАЦИЈЕ У МЕХАНИЦИ КОНСТРУКЦИЈА

1. Фибоначијевом методом процијенити вриједност минимума функције

$$y = x^3 - 4x^2$$

унутар интервала $x = [0,4]$ с тачношћу до 10^{-1}. Користити се само калкулатором и задржати се на четири итерације.

$$F_n \geq \frac{x_g - x_d}{\delta} \Rightarrow F_n \geq \frac{4-0}{10^{-1}} \Rightarrow F_n \geq 40$$

$\boldsymbol{F_n}$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	**55**
$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**

$$n = 10$$

<u>Прва итерација</u> $(n = 10)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_d + \frac{F_{n-2}}{F_n}(x_g - x_d) \\ x_2 &= x_d + \frac{F_{n-1}}{F_n}(x_g - x_d) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x_d + \frac{F_8}{F_{10}}(x_g - x_d) \\ x_2 &= x_d + \frac{F_9}{F_{10}}(x_g - x_d) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 0 + \frac{21}{55}4 \\ x_2 &= 0 + \frac{34}{55}4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5273 \\ x_2 &= 2{,}4727 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5273 \\ x_2 &= 2{,}4727 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= -5{,}7679 \\ y_2 &= -9{,}3383 \end{aligned}\right\}, \qquad y_1 > y_2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_d &= 1{,}5273 \\ x_g &= 4 \end{aligned}\right\}$$

<u>Друга итерација</u> $(n = 9)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_d + \frac{F_7}{F_9}(x_g - x_d) \\ x_2 &= x_d + \frac{F_8}{F_9}(x_g - x_d) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5273 + \frac{13}{34}2{,}4727 \\ x_2 &= 1{,}5273 + \frac{21}{34}2{,}4727 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 2{,}4727 \\ x_2 &= 3{,}0546 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= -9{,}3383 \\ y_2 &= -8{,}8211 \end{aligned}\right\}$$

x_2 из претходне итерације је x_1 у овој итерацији, па се дио рачуна могао избјећи.

$$y_1 < y_2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_d &= 1{,}5273 \\ x_g &= 3{,}0546 \end{aligned}\right\}$$

<u>Трећа итерација</u> $(n = 8)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_d + \frac{F_6}{F_8}(x_g - x_d) \\ x_2 &= x_d + \frac{F_7}{F_8}(x_g - x_d) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5273 + \frac{8}{21}1{,}5273 \\ x_2 &= 1{,}5273 + \frac{13}{21}1{,}5273 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 2{,}1091 \\ x_2 &= 2{,}4727 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= -8{,}4113 \\ y_2 &= -9{,}3438 \end{aligned}\right\}$$

x_1 из претходне итерације је x_2 у овој итерацији, па се дио рачуна могао избјећи.

$$y_1 > y_2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_d &= 2{,}1091 \\ x_g &= 3{,}0546 \end{aligned}\right\}$$

<u>Четврта итерација</u> $(n = 7)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2{,}4727 \\ x_2 &= x_d + \frac{F_6}{F_7}(x_g - x_d) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 2{,}4727 \\ x_2 &= 2{,}1091 + \frac{8}{13}0{,}9455 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 2{,}4727 \\ x_2 &= 2{,}6909 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= -9{,}3438 \\ y_2 &= -9{,}4791 \end{aligned}\right\}$$

Након четири итерације минимум је у тачки $\boldsymbol{x = 2,6909}$ и износи $\boldsymbol{y = -9,4791}$.

2. Написати програмски код у матлаб окружењу који тражи максимум функције

$$y = x^3 - 4x^2$$

унутар интервала $x = [-2,2]$ с $\varepsilon = 10^{-6}$ користећи се методом сјечице. Дати графички приказ функције и тражене екстремне вриједности у посљедњој итерацији.

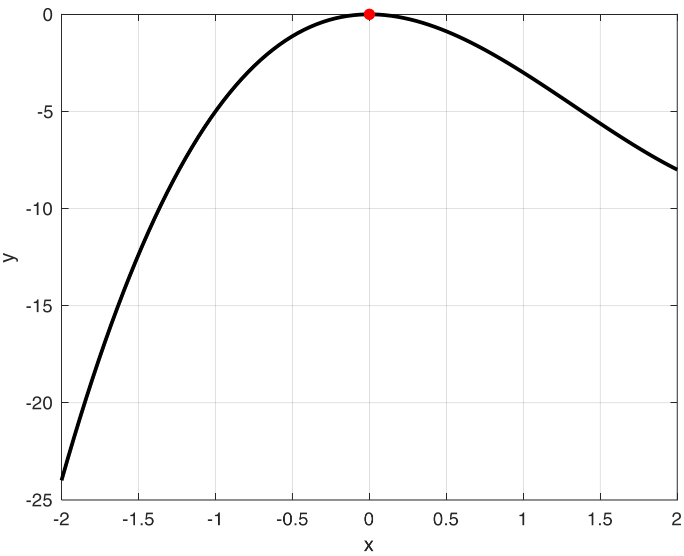
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad f(x) \approx g(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)(x - x_1)^2$$

$$g'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x_1) + f''(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} \\ f''(x_1) &= \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)(x_1 - x_0)}{f'(x_1) - f'(x_0)}$$

```
% Metoda sjecice
clear; close; clc

y = @(x) x.^3 - 4*x.^2;
yp = @(x) 3*x.^2 - 8*x;

x0 = -0.5;   x1 = -0.6;
yp0 = yp(x0);   yp1 = yp(x1);

r = 1;
i = 0;

while r > 1e-6
    i = i + 1;
    x2 = x1 - yp1*(x1 - x0)/(yp1 - yp0); y2 = y(x2); yp2 = yp(x2);
    r = abs(yp2);
    fprintf('i = %.0f; x = %.8f; y = %.8f\n', i, x2, y2)
    x0 = x1; x1 = x2; yp0 = yp1; yp1 = yp2;
end

figure;
X = linspace(-2,2,100);
Y = y(X);
plot(X,Y,'k','LineWidth',2); hold on;
scatter(x2,y2,'r','filled'); hold off;
grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
```

```
i = 1; x = -0.07964602; y = -0.02587919
i = 2; x = -0.01428068; y = -0.00081866
i = 3; x = -0.00041201; y = -0.00000068
i = 4; x = -0.00000219; y = -0.00000000
i = 5; x = -0.00000000; y = -0.00000000
```



Напомена:

Функција јесте унимодална, али само на наведеном интервалу. Хипотетички се могло десити да се направи такав избор за x_0 и x_1 који ће дати екстремну вриједност ван наведеног интервала и та екстремна вриједност не би била минимум (нпр. $x_0 = 1.9$ и $x_1 = 2$). Исправно би било кодом то предуприједити, али тај дио није одрађен у претходном коду.

3. Одредити максимум функције

$$z = -(x^2 + y^2 + xy)$$

користећи се Пауеловом методом и калкулатором. Претрагу почети из тачке са координатама (1; 2), а у почетку се кретати по правцима дефинисаним координатним осама. Приказати само једну пуну итерацију.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Правци су дефинисани координатним осама: $\vec{e}_1 = \vec{\imath}, \vec{e}_2 = \vec{\jmath}$, односно $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + p_1\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + p_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + p_1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z = -(x^2 + y^2 + xy) = -((1 + p_1)^2 + 2^2 + (1 + p_1)2) = -p_1^2 - 4p_1 - 7$$

Тражи се она вриједност параметра p_1 која ће дати екстремну вриједност функције z. Пошто поставком задатка није наглашено како треба ријешити тај проблем, имамо слободу избора. За конкретан случај најлакше је аналитички.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dp_1} &= 0 \\ \frac{dz}{dp_1} &= -2p_1 - 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2p_1 - 4 = 0 \Rightarrow p_1 = -2, \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 + p_1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + p_2\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 + p_2 \end{bmatrix}$$

$$z = -(x^2 + y^2 + xy) = -(1 + 4 + 4p_2 + p_2^2 - 2 - p_2) = -p_2^2 - 3p_2 - 3$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dp_2} &= 0 \\ \frac{dz}{dp_2} &= -2p_2 - 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2p_2 - 3 = 0 \Rightarrow p_2 = -1{,}5, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 + p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Нови правац је дефинисан вектором $\mathbf{e}_3$: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2 + p_3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} + p_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2p_3 \\ 0{,}5 - 1{,}5p_3 \end{bmatrix}$$

$$z = -(x^2 + y^2 + xy) = -(1 + 4p_3 + 4p_3^2 + 0{,}25 - 1{,}5p_3 + 2{,}25p_3^2 - 0{,}5 + 1{,}5p_3 - p_3 + 3p_3^2)$$

$$z = -9{,}25p_3^2 - 3p_3 - 0{,}75$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dp_3} &= 0 \\ \frac{dz}{dp_3} &= -18{,}5p_3 - 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -18{,}5p_3 - 3 = 0 \Rightarrow p_3 = -0{,}1622, \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} -1 - 2p_3 \\ 0{,}5 - 1{,}5p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6756 \\ 0{,}7433 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z} = -9{,}25p_3^2 - 3p_3 - 0{,}75 = -9{,}25 \cdot (-0{,}1622)^2 + 3 \cdot 0{,}1622 - 0{,}75 = \mathbf{-0,5068}$$

4. Написати програмски код којим се тражи максимум функције

$$z = x^3 - 3x + y^3 - 3y$$

помоћу Њутнове методе. Претрагу почети из тачке (0,2; 0,5).

```
% Njutnova metoda
clear; clc

f = @(X) X(1)^3 - 3*X(1) + X(2)^3 - 3*X(2);
grad = @(X) [3*X(1)^2 - 3; 3*X(2)^2 - 3];
H = @(X) [6*X(1), 0; 0 6*X(2)];

X0 = [0.2; 0.5];
X00 = X0;
m = 5; % Za m = 1 maksimum; za m = - 1 minimum; za m = 0 sedlasta tacka

while m ~= 1
    i = 0;
    e = 1;

    while e > 1e-5
        i = i + 1;
        X0 = X0 - H(X0)\grad(X0);
        e = max(abs(grad(X0)));
    end

    Hesse = H(X0); % Heseova matrica
    detH = det(Hesse); % Determinanta Heseove matrice
    if detH > 0
        if Hesse(1) > 0
            m = -1; mm = 'MINIMUM';
        else
            m = 1; mm = 'MAKSIMUM';
        end
    else
        m = 0; mm = 'SEDLASTA TACKA';
    end
    fprintf('Pocetna pretpostavka: x = %.5f i y = %.5f. Dobija se %s.\n', X00(1),
X00(2), mm);
    fprintf('i = %d, x = %.4f, y = %.4f, z = %.5f\n\n', i, X0(1), X0(2), f(X0));

    X0 = 2*rand(2,1) - 1;
    X00 = X0;
end
```

```
Pocetna pretpostavka: x = 0.20000 i y = 0.50000. Dobija se MINIMUM.
i = 6, x = 1.0000, y = 1.0000, z = -4.00000

Pocetna pretpostavka: x = -0.74753 i y = 0.96542. Dobija se SEDLASTA TACKA.
i = 3, x = -1.0000, y = 1.0000, z = -0.00000

Pocetna pretpostavka: x = 0.17329 i y = -0.19157. Dobija se SEDLASTA TACKA.
i = 6, x = 1.0000, y = -1.0000, z = 0.00000

Pocetna pretpostavka: x = -0.27231 i y = -0.53536. Dobija se MAKSIMUM.
i = 5, x = -1.0000, y = -1.0000, z = 4.00000
```

5. Која је кључна предност методе интерполације полиномом у односу на Њутнову методу?

Кључна предност методе интерполације полиномом у односу на Њутнову методу огледа се у томе што метода интерполације полиномом не зависи од тога да ли је функција која се оптимизује диференцијабилна или не.