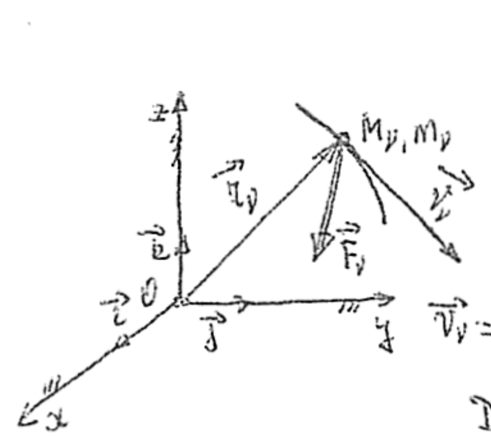
I Osnove linearne teorije ~~[illegible]~~ (oscilatornih) sistema sa konačnim brojem stepeni slobode.

1. Osnovni model. Diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama



m_ν – mase tačaka sistema, $\nu = 1, \ldots, n$

$\vec{r}_\nu = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}$

$f_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = 0, \ \alpha = 1, \ldots, r$ – idealne holonomne veze

$\vec{v}_\nu = \dot{\vec{r}}_\nu = \dfrac{d\vec{r}_\nu}{dt}$

$s = 3n - r$ – broj stepeni slobode

$q_1, \ldots, q_s$ – sistem generalisanih koordinata

Dekartove koordinate tačaka sistema mogu se izraziti kao funkcije generalisanih koordinata:

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, \ldots, q_s) \\ y_\nu &= y_\nu(q_1, \ldots, q_s) \\ z_\nu &= z_\nu(q_1, \ldots, q_s) \end{aligned}\right\} \sim \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, \ldots, q_s), \ \nu = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

$\vec{F}_\nu$ – rezultanta aktivnih sila koje dejstvuju na ν-tu tačku. One su, u opštem slučaju poznate funkcije položaja i brzina tačaka sistema i vremena, tj.

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, t), \ \nu = 1, \ldots, n$$

Diferencijalne jednačine kretanja sistema u generalisanim koordinatama (Lagranžove jednačine druge vrste) glase:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \ldots, s \qquad (2)$$

gdje su

– $E_k = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu^2$ – kinetička energija sistema;

– $Q_i = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \ (i = 1, \ldots, s)$ – generalisane sile.

Na osnovu (1) je

$$\vec{v}_\nu = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \text{ – generalisane brzine,} \qquad (3)$$

pa su: $E_k = E_k(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)$, $Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$.

Jednačine (2) predstavljaju sistem od s običnih diferencijalnih jednačina (uopštem slučaju nelinearnih) drugog reda sa nezavisnom promjenljivom t i nepoznatim funkcijama q_i $(i=1,\dots,s)$. Integraljenjem ovog sistema, uz poznate početne uslove $(q_i(t_0)=q_{i0},\ \dot{q}_i(t_0)=\dot{q}_{i0},\ i=1,\dots,s)$ određuju se jednačine kretanja sistema: $q_i=q_i(t)$, $i=1,\dots,s$. Na osnovu poznatog ~~zakona~~ kretanja u generalisanim koordinatama može se, korišćenjem jed. (1), odrediti i zakon kretanja bilo koje tačke sistema: $\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(t)$.

Ako je $q_i(t)\equiv q_i^0=\text{const}$ $(i=1,\dots,s)$ rješenje sistema dif. jed. (2) [tada je očigledno $\dot{q}_i(t)\equiv 0$], onda je sa $q_i=q_i^0$ određen ravnotežni položaj sistema. To je, dakle, onaj položaj sistema u kome on vječno ostaje (tj. za svako $t\geq t_0$), ako su u početnom trenutku brzine tačaka sistema bile jednake nuli.

Jednačine (uslovi) ravnoteže sistema su:

$$Q_i=0\ ,\ i=1,\dots,s \tag{3}$$

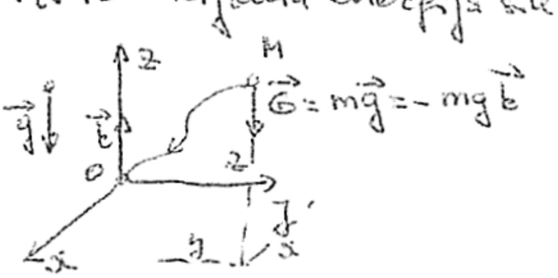
Ako je poznat ravnotežni položaj sistema, tj. rješenje jednačina (3), generalisane koordinate se uvijek mogu izabrati tako da je u ravnotežnom položaju $q_1=0,\dots,q_s=0$. Zaista, ako je u polaznom sistemu generalisanih koordinata $q_i=q_i^0$ $(i=1,\dots,s)$ ravnotežni položaj, onda uvodeći nove generalisane koordinate $\tilde{q}_i=q_i-q_i^0$ $(i=1,\dots,s)$ ostvarujemo ovaj zahtjev, tj. gen. koordinate uvodimo tako da ih mjerimo od položaja ravnoteže. U svim daljim razmatranjima usvajaćemo da u ravnotežnom položaju generalisane koord. imaju <u>nulte</u> vrijednosti.

Osnovne ~~kategorije~~ vrste sila: $\vec{F}_\nu=\vec{F}_\nu^{(k)}+\vec{F}_\nu^{(d)}+\vec{F}_\nu^{*}$

$$\vec{F}_\nu^{(k)}=-\frac{\partial E_p}{\partial x_\nu}\vec{i}-\frac{\partial E_p}{\partial y_\nu}\vec{j}-\frac{\partial E_p}{\partial z_\nu}\vec{k}\quad\text{– konzervativne sile}\qquad(4)$$

$E_p=E_p(x_1,y_1,z_1,\dots,x_n,y_n,z_n)$ – potencijalna energija

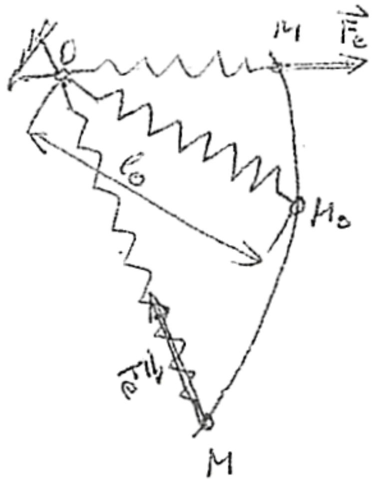
Pr. Potencijalna energija sile teže



$E_p(0)=0$

$E_p(M)=A_{(M,0)}(\vec{G})=mgz$

Pr. Potencijalna energija elastične sile cilindrične zavojne opruge.



l_0 - prirodna dužina opruge

$F_e = c\,|\overline{OM} - l_0|$

$\Delta = (\overline{OM} - l_0)$ - izduženje (skraćenje) opruge

$E_p = \frac{1}{2} c \Delta^2$, c - krutost opruge.

$$\vec{F}_\nu^{(d)} = -F_\nu^{(d)}(v_\nu)\frac{\vec{v}_\nu}{v_\nu} \quad \text{- sile otpora} \quad (5)$$

1) $F_\nu^{(d)} = const.$ — sila suvog trenja

2) $F_\nu^{(d)} = \beta_\nu v_\nu$ - viskozno trenje.

3) $F_\nu^{(d)} = \gamma_\nu v_\nu^2$ - turbulentni otpor.

$\vec{F}_\nu^* = \vec{F}_\nu^*(t)$ - prinudne sile. One su unapred zadate kao f-je vremena.

Svakoj od navedenih vrsta sila odgovaraju generalisane sile:

$$Q_i = Q_i^{(k)} + Q_i^{(d)} + Q_i^*,$$

$$Q_i^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(k)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad Q_i^{(d)} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(d)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad Q_i^* = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$$

2. Potencijalna energija u okolini ravnotežnog položaja.

Posmatrajmo konzervativni sistem, tj. neka su sve aktivne sile konzervativne.

Tada je
$$Q_i = Q_i^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(k)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \overset{(3),(4)}{=} -\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

$$Q_i^{(k)} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}, \quad E_p = E_p(q_1, \dots, q_s) \qquad (1)$$

Neka je $q_i = 0$ $(i = 1, \dots, s)$ ravnotežni položaj sistema. Tada je u skladu sa

(1.3)
$$Q_i^{(k)}(q_1 = 0, \dots, q_s = 0) = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_i}\right)_0 = 0, \quad (i = 1, \dots, s) \left[\left(\;\;\right)_0 = \left(\;\;\right)_{q_1 = 0, \dots, q_s = 0} \right.$$

Prema tome, ravnotežni položaji konzervativnog sistema su kritične (stacionarne) tačke potencijalne energije.

Napomena: Pošto se pot. ener. određuje s tačnošću do aditivne konstante može se uzeti da je $E_p(q_1=0, \dots, q_s=0)=0$

Razvijajući funkciju $E_p(q_1, \dots, q_s)$ u McLorenov red, dobijamo

$$E_p = \underbrace{\cancel{E_p(0,\dots,0)}}_{0} + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_i}\right)_0}}_{0} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + o(|q|^2)$$

tj.

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} c_{ij} q_i q_j + \underbrace{o(|q|^2)}_{\text{članovi koji sadrže gen. koor. stepena većeg od dva}}, \quad |q| = \sqrt{q_1^2 + \dots + q_s^2}$$

Koeficijenti $c_{ij} = c_{ji} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$ zovu se koeficijenti krutosti.

Sada je i

$$Q_i^{(k)} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{s} c_{ij} q_j + o(|q|)$$

3. Kinetička energija sistema

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \vec{v}_\nu \overset{(1.3)}{=} \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

gdje su $A_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = A_{ji}$, $A_{ij} = A_{ij}(q_1, \dots, q_s)$

Pošto je $E_k = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_s = 0$ i $E_k > 0$ ako je bar jedna generalisana brzina različita od nule, to kažemo da je kinetička energija sistema pozitivno definitna kvadratna forma generalisanih brzina.

U okolini ravnotežnog položaja koeficijenti inercije A_{ij} se mogu izraziti u obliku

$$A_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 q_k + o(|q|), \quad a_{ij} = A_{ij}(0,\dots,0)', \quad i,j = 1,\dots,s$$

4. Disipativna funkcija i generalisane sile otpora.

Pretpostavimo da na sistem osim konzervativnih dejstvuju i sile viskoznog trenja $\vec{F}_\nu^{(d)} = -\beta_\nu \vec{v}_\nu$, $\beta_\nu - const. > 0$.

Na osnovu koreme o promjeni kinetičke energije biće

$$dE_k = \text{đ}A^{(k)} + \text{đ}A^{(d)} \qquad (1)$$

gdje su: $\text{đ}A^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(k)} \cdot d\vec{r}_\nu = -dE_p$ - elementarni rad konzerv. sila

$\text{đ}A^{(d)} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(d)} \cdot d\vec{r}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \vec{v}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu$ - -II- disipativnih sila

$$\frac{1}{dt}(1) \rightarrow \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = \frac{\text{đ}A^{(d)}}{dt} = P^{(d)},$$

gdje je $P^{(d)} = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu v_\nu^2$ - snaga disipativnih sila

$$\Rightarrow \quad \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu v_\nu^2 \leq 0$$

Dakle, ako na sistem djeluju konzervativne i disipativne sile, ukupna mehanička energija $E = E_k + E_p$ se smanjuje tokom kretanja, tj. rasipa se. Kao mjera brzine rasipanja ukupne energije uzima se disipativna funkcija definisana izrazom

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu v_\nu^2 \qquad (1)$$

Generalisane sile otpora su:

$$Q_i^{(d)} = \sum_{\nu=1}^{n} -\beta_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$$

Pošto je na osnovu (1.3) $\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$, to je $Q_i^{(d)} = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v_\nu^2}{2}\right) =$

$$= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} \beta_\nu v_\nu^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$$

Dakle, generalisane sile otpora jednake su negativnim parcijalnim izvodima disipativne f-je po odgovarajućim generalisanim brzinama, tj.

$$Q_i^{(d)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1,\dots,s) \qquad (2)$$

gdje je $\Phi = \Phi(q_1,\dots,q_s,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_s)$.

Imajući u vidu strukturu izraza (1), analogno izvođenjima u 3., dobija se

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} B_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \geq 0 \qquad (3)$$

gdje su $B_{ij} = B_{ji} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}$ – generalisani koeficijenti otpora (prigušenja)

Sada je

$$Q_i^{(d)} = -\sum_{j=1}^{s} B_{ij}\,\dot{q}_j \quad (i=1,\dots,s) \qquad (4)$$

U okolini ravnotežnog položaja $q_1=\dots=q_s=0$ je

$$B_{ij} = b_{ij} + \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 q_k + o(|q|),$$

gdje je $b_{ij} = B_{ij}(0,\dots,0)$.

5. Linearizacija diferencijalnih jednačina kretanja u okolini ravnotežnog položaja.

Diferenc. jed. (1.2), smatrajući da na sistem djeluju konzervativne, disipativne i prinudne sile, ~~imaju~~ dobijaju oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{*} \quad (i=1,\dots,s) \qquad (1)$$

i one, kao što je već rečeno, predstavljaju sistem od s običnih nelinearnih dif. jed. drugog reda. Smatrajući da se sistem kreće u maloj okolini ravnotežnog položaja $q_1=0,\dots,q_s=0$ (kada na sistem djeluju konzervativne sile), cilj nam je da prethodni sistem jednačina aproksimiramo linearnim sistemom dif. jed. sa konstantnim koeficijentima.

U opštem slučaju, nehomogeni sistem od s ~~ob.~~ linearnih dif. jed. drugog reda ima oblik

$$\sum_{j=1}^{s}\alpha_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}q_j = \delta_i(t) \quad (i=1,\dots,s) \qquad (2)$$

gdje su α_{ij}, β_{ij} i γ_{ij} konstante.

Na osnovu (1), (2) i analize sprovedene u odjeljcima 2, 3 i 4, lako se zaključuje da treba uzeti da je

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,,\quad E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} c_{ij}q_iq_j\,,\quad \bar{\Phi} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,,$$

tj. E_k i $\bar{\Phi}$ treba predstaviti kao kvadratne forme generalisanih brzina sa konstantnim koeficijentima, a E_p kao kvadratnu formu generalisanih koordinata.

Generalisane prinudne sile određene su izrazima

$$Q_i^* = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^*(t)\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}$$

pa kako one mogu biti funkcije samo vremena, to treba uzeti da je u okolini rav. pl.

$$Q_i^* \approx \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^*(t)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\right)_0$$

Pošto se izvrše pomenute aproksimacije, linearne diferencijalne jednačine kretanja sistema imaju oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_i} + \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i^*(t) \qquad (i=1,\dots,s)$$

ili

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_j = Q_i^*(t) \qquad (i=1,\dots,s)$$

One se mogu zapisati u matričnom obliku

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{Q^*(t)\}$$

gdje su:

$$\{q\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix},\ \{\dot{q}\} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix},\ \{\ddot{q}\} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_s \end{pmatrix},\ \{Q^*\} = \begin{pmatrix} Q_1^* \\ \vdots \\ Q_s^* \end{pmatrix}$$

– matrice kolone generalisanih koordinata, brzina, ubrzanja i generalisanih prinud. sila

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ - & - & - & \\ - & - & - & - \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}$$ – inercijska matrica;

$$[B] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}$$ – matrica prigušenja

$$[C] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}$$ – matrica krutosti