6. Stabilnost ravnoteže dinamičkog sistema

6.1. Definicije stabilnosti po Ljapunovu.

Posmatrajmo neki dinamički sistem opisan sistemom dif. jednačina

$$\ddot{q}_i = f_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) \quad (i = 1, \dots, s) \qquad (1)$$

i pretpostavimo da je $q_1 = 0, \dots, q_s = 0$ ravnotežni položaj sistema, tj. $f_i(q_1 = 0, \dots, q_s = 0, \dot{q}_1 = 0, \dots, \dot{q}_s = 0) = 0$ $(i = 1, \dots, s)$.

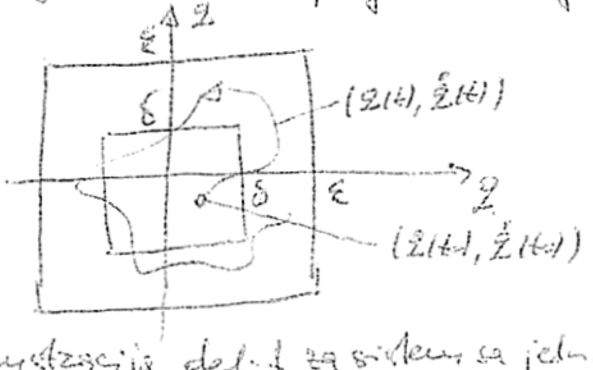
Def. 1. Ravnotežni položaj $q_1 = 0, \dots, q_s = 0$ sistema (1) je stabilan ako se ~~za~~ svaki dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$ može naći takav broj $\delta = \delta(\varepsilon)$ da je

$$|q_i(t)| < \varepsilon \text{ i } |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, s)$$

kada je

$$|q_i(t_0)| < \delta, \ |\dot{q}_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1, \dots, s).$$

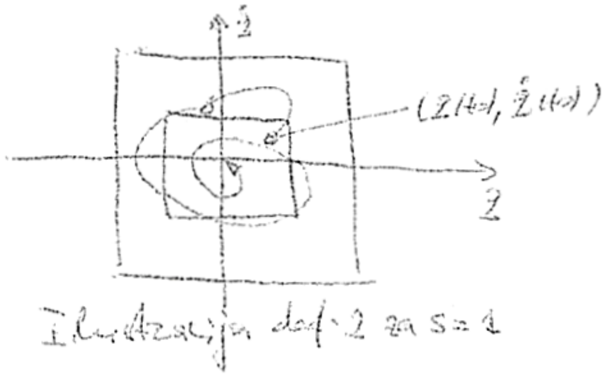
Drugim riječima, ravnotežni položaj je stabilan ako se mogu naći dovoljno mala početna odstupanja od ravnotežnog položaja i dovoljno male početne brzine takvi da tokom kretanja odstupanja sistema od ravnotežnog položaja i brzine ostaju unutar unaprijed datih granica ma kako one bile male.



Ilustracija def. 1 za sistem sa jednim stepenom slobode

Def. 2. Ravnotežni položaj $q_1 = 0, \dots, q_s = 0$ je asimptotski stabilan ako je on stabilan (tj. ispunjeni uslovi def. 1.) i

$$\lim_{t \to \infty} q_i(t) = 0, \ \lim_{t \to \infty} \dot{q}_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, s).$$



Ilustracija def. 2 za $s = 1$

6.2. Stabilnost ravnoteže konzervativnog sistema.

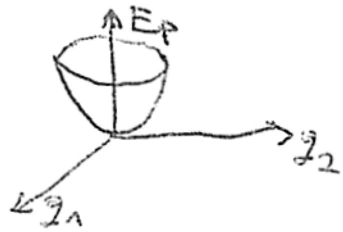
Pretpostavimo da tako mjerimo generalisane koordinate da su sve u položaju ravnoteže sistema, na koji dejstvuju samo konzervativne sile, jednake nuli. Takođe, kao što smo ranije napomenuli, možemo uzeti da je $E_p(0,\dots,0)=0$. Uslovi ravnoteže su

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad (i=1,\dots,s),$$

tj. $q_1=0,\dots,q_s=0$ je kritična (stacionarna) tačka potencijalne energije. Dovoljan uslov stabilnosti ravnoteže datog sistema daje sljedeća

<u>Lagranž-Dirihleova teorema.</u> Ako u položaju ravnoteže $q_1=0,\dots,q_s=0$, potencijalna energija E_p ima strogi minimum, onda je ta ravnoteža stabilna.

Napomena: E_p će imati strogi minimum u tački $q_1=0,\dots,q_s=0$, ako je $E_p>0$ u nekoj okolini te tačke i $E_p=0$ samo kada je $q_1=0,\dots,q_s=0$ (v. sl.). Za funkciju koja ima strogi minimum u nekoj tački kaže se i da je pozitivno definitna u okolini te tačke



<u>Slučaj kada je $s=1$.</u>

Tada je $q_1=q$ i $E_p=E(q)$, $\left(\frac{dE_p}{dq}\right)_0=0$

Dovoljan uslov strogog minimuma funkcije $E(q)$, tj. uslov stabilnosti ravnoteže $q=0$, je

$$c_{11}=\left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_0>0$$

<u>Slučaj kada je $s>1$.</u>

Tada je (v. odjeljak 2)

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} c_{ij}\,q_i q_j + o(|q|^2), \quad c_{ij}=\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)_0 \qquad (1)$$

Da bi f-ja E_p imala strogi minimum u ravnotežnom položaju $q_1=\dots=q_s=0$, dovoljno je da kvadratna forma potencijalne energije

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} c_{ij}\, q_i\, q_j \qquad (2)$$

ima strogi minimum, odnosno da bude pozitivno definitna. Uslove pozitivne definitnosti kvadratne forme daje kriterijum Silvestra. Primijenjen na kvadratnu formu (2) on daje dovoljne uslove stabilnosti ravnoteže datog sistema. Ti uslovi su:

$$1)\ c_{11}>0;\quad 2)\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}>0,\ \dots,\quad s)\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ - & - & - & \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}>0.$$

Drugim riječima, ako su svi glavni minori matrice krutosti sistema $[C]$ pozitivni onda je ravnoteža stabilna.

Za sistem sa dva stepena slobode je

$$[C]=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

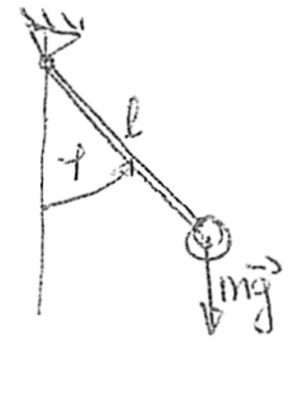
pa su $c_{11}>0$ i $c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0$ dovoljni uslovi stabilnosti ravnoteže.

Prirodno je pitanje: šta je u slučaju kada potencijalna energija nema minimum u ravnotežnom položaju? Odgovor daje sljedeća

<u>Teorema</u>. Ako u ravnotežnom položaju potencijalna energija nema minimum i odsustvo minimuma se zaključuje na osnovu kvadratne forme potencijalne energije, onda je ravnoteža nestabilna.

Specijalno, za $s=1$ ako je $c_{11}=\left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_0<0$ ravnoteža je nestabilna.

Pr. Matematičko klatno.



$E_p=-mgl\cos\varphi$

$\frac{dE_p}{d\varphi}=mgl\sin\varphi=0 \to \varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi$ - ravnot. položaji

$c_{11}=\left(\frac{d^2E_p}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_1=0}=mgl>0 \to \varphi_1=0$ - stabilni rav. pol.

$c_{11}=\left(\frac{d^2E_p}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_2=\pi}=-mgl<0 \to \varphi_2=\pi$ - nestabilan -"-.

6.3. Uticaj disipativnih sila na stabilnost ravnoteže.

Pretpostavimo da na sistem djeluju konzervativne i disipativne sile. Tada je

$$Q_i = Q_i^{(k)} + Q_i^{(d)} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

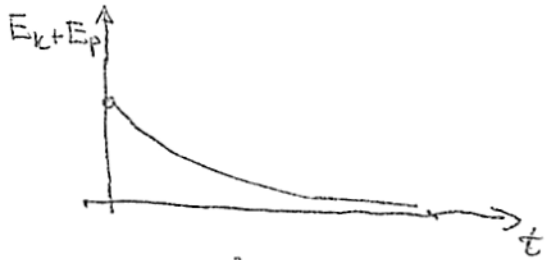
Teorema. 1) Ako u položaju ravnoteže $q_1 = 0, \ldots, q_s = 0$ potencijalna energija $E_p(q_1, \ldots, q_s)$ ima strogi minimum, onda je ravnoteža stabilna.

2) Ako je ispunjen uslov 1) i ako je disipacija potpuna, onda je ravnoteža asimptotski stabilna.

Disipacija je potpuna kada je disipativna f-ja $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ pozitivno definitna kvadratna forma generalisanih brzina ($\Phi = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_1 = \cdots = \dot{q}_s = 0$)

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} c_{ij} q_i q_j + o(|q|^2)$$

$$\frac{d(E_k + E_p)}{dt} = -2\Phi \overset{2)}{<} 0$$



$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}(E_k + E_p) = 0 \overset{2)}{\Longrightarrow} \lim_{t\to\infty} E_k = 0, \quad \lim_{t\to\infty} E_p = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, s$$