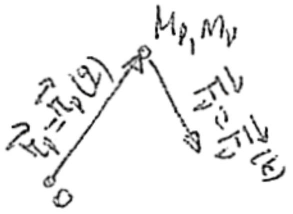
II Linearne oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode

1. Slobodne neprigušene oscilacije



M_ν, m_ν, $\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu^{(t)}$ – konzervativne sile; $\nu = 1, \dots, N$

$s = 1$, q – generalisana koordinata

$q = 0$ – položaj stabilne ravnoteže sistema

$E_p = E_p(q)$

$$E_p \approx \frac{1}{2} c_{11} q^2; \quad c_{11} = \frac{d^2 E_p}{dq^2}\Big|_{q=0} > 0; \quad E_k \approx \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2, \quad a_{11} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\vec{r}_\nu}{dq}\right)^2_{q=0} > 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0 \rightarrow a_{11}\ddot{q} + c_{11} q = 0 \,\Big|:a_{11}$$

$\rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$ (1) – dif. jed. slobodnih neprigušenih oscilacija

(1) $\xrightarrow{q = e^{\lambda t}}$ $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ – karakteristična jednačina dif. jed. (1), čija su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, pa je opšte rješenje

$$q = C_1' e^{i\omega t} + C_2' e^{-i\omega t} = \overbrace{(C_1' + C_2')}^{C_1}\cos\omega t + \overbrace{i(C_1' - C_2')}^{C_2}\sin\omega t,$$ odnosno

$$q = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \qquad (2)$$

Transformacijom integracionih konstanti C_1 i C_2:

$$\begin{matrix} C_1 = A\sin\alpha \\ C_2 = A\cos\alpha \end{matrix} \Longleftrightarrow A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \ \sin\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \ \cos\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \qquad (3)$$

opšte rješenje (2) se može napisati u obliku

$$q = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (4)$$

Integracione konstante C_1 i C_2 (odnosno A i α) određuju se iz početnih uslova:

$$t_0 = 0: \ q(t_0) = q_0, \ \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \qquad (5)$$

$$(2) \xrightarrow{(5)} C_1 = q_0, \ C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega} \xrightarrow{(3)} A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}, \ \sin\alpha = \frac{q_0}{A}, \ \cos\alpha = \frac{\dot{q}_0}{A\omega}, \ \alpha \in [0, 2\pi)$$

pa je konačna jednačina kretanja

$$q = q_0 \cos\omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad (6)$$

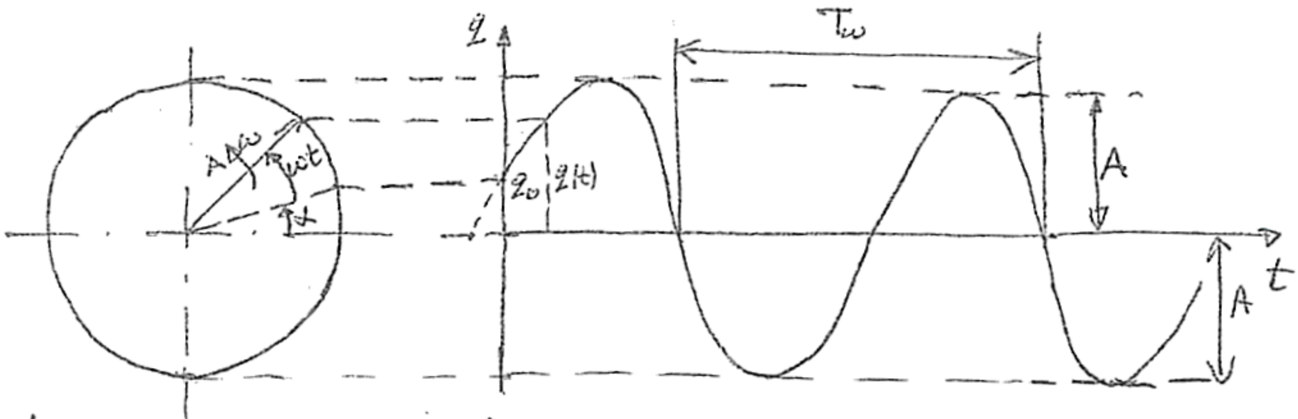
odnosno

$$q = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}\sin(\omega t + \alpha), \qquad (7)$$

što je grafički prikazano na slici. Dakle, kretanje je oscilatorno i periodično sa osnovnim periodom

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a_{11}}{c_{11}}} \qquad (q(t + T_\omega) = q(t), \ \forall t)$$

koji se zove period oscilovanja. Broj perioda oscilovanja u jednoj sekundi $f = \frac{1}{T_\omega}$ zove se učestanost ili frekvencija oscilovanja.



Veličina ω zove se kružna frekvencija (v. sliku), a maksimalno odstupanje sistema od ravnotežnog položaja naziva se amplituda oscilovanja i ona je

$$A = |q_{max}(t)| = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}$$

$(\omega t + \alpha)$ je faza oscilovanja, a α je početna faza ili ugao faznog pomjeranja.
Dakle, tri konstante: ω (ili T_ω), A i α u potpunosti određuju zakon slobodnog oscilovanja. Pri tome, amplituda i početna faza zavise od početnih uslova, dok je kružna frekvencija (odnosno period) fizička konstanta datog sistema.
Primijetimo, na kraju, da je ukupna mehanička energija sistema

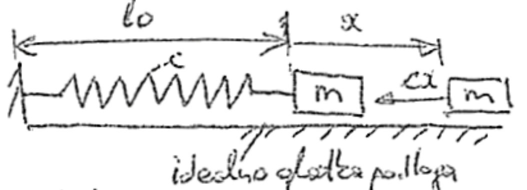
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} a_n \dot{q}^2 + \frac{1}{2} c_n q^2 \overset{(7)}{=} \frac{1}{2} c_n A^2 = const,$$

konstantna i proporcionalna kvadratu amplitude oscilovanja.

1.1 Osnovni primjeri

a) Opružni oscilator sa pravolinijskim kretanjem

a.1) Horizontalni oscilator

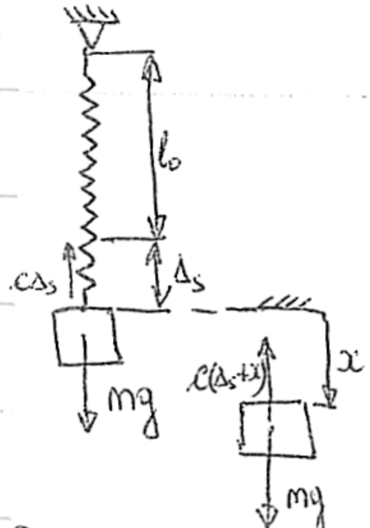


$$m\ddot{x} = -cx \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Ili $E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rightarrow a_{11} = m$, $E_p = \frac{1}{2} c\delta^2 = \frac{1}{2} c x^2 \rightarrow c_{11} = c$

$$\rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c}{m}$$

a.2) Oscilator sa vertikalnim kretanjem (uticaj konstantne sile na oscilatorno kretanje)



$mg = c\Delta_s$ (*) – uslov ravnoteže

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta_s + x) \overset{(*)}{=} -cx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Napomena!

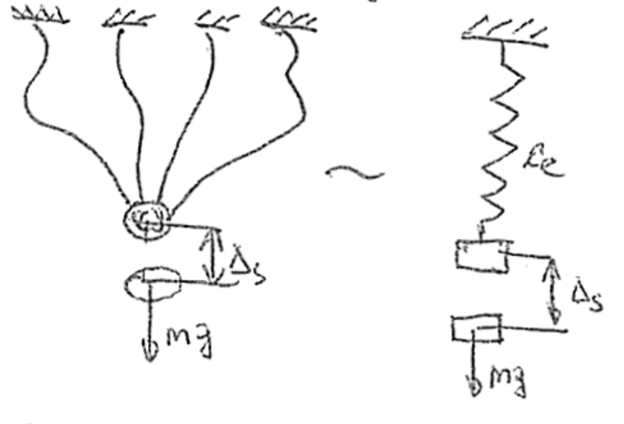
$$E_p = -mgx + \frac{1}{2}c(\Delta_s + x)^2 - \frac{1}{2}c\Delta_s^2 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}cx^2$$

Konstantna sila mg ne mijenja karakter oscilovanja koje nastaje usled dejstva elastične sile opruge, već samo pomjera centar oscilovanja (ravnotežni položaj) u smjeru dejstva sile za veličinu statičkog pomjeranja (deformacije opruge) Δ_s.

$$(*) \rightarrow c = \frac{mg}{\Delta_s} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\Delta_s} \quad (**)$$

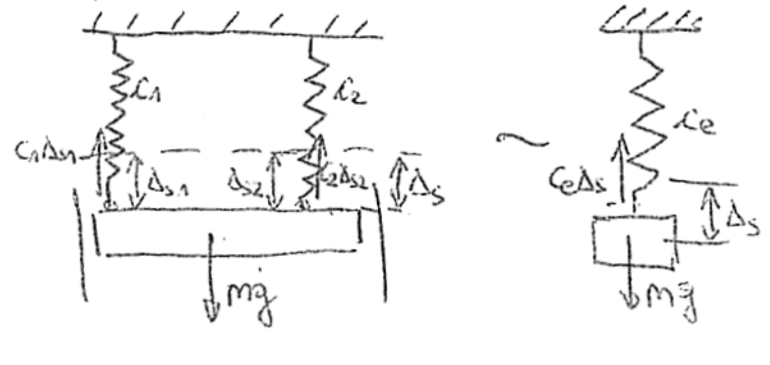
Formula (**) koristi se za eksperimentalno određivanje kružne frekvencije na osnovu izmjerenog statičkog pomjeranja Δ_s.

Prethodna analiza, takođe pokazuje da će koncentrisana masa, vezana za neku elastičnu konstrukciju zanemarljive mase, koja izvodi pravolinijske oscilacije oscilovati na isti način kao kada bi bila vezana za jednu elastičnu oprugu ekvivalentne krutosti c_e određene iz uslova jednakosti statičkih pomjeranja.



a.2-1) Ekvivalentne krutosti spregnutih opruga

– paralelna veza



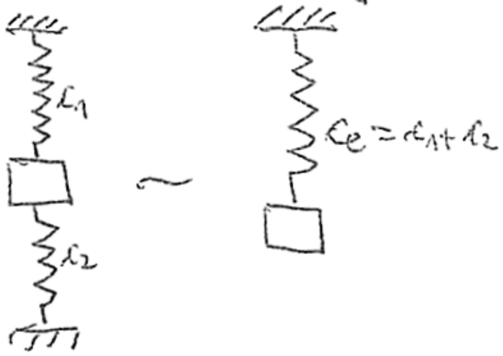
$$mg = c_1\Delta_{s1} + c_2\Delta_{s2}$$

$$mg = c_e\Delta_s$$

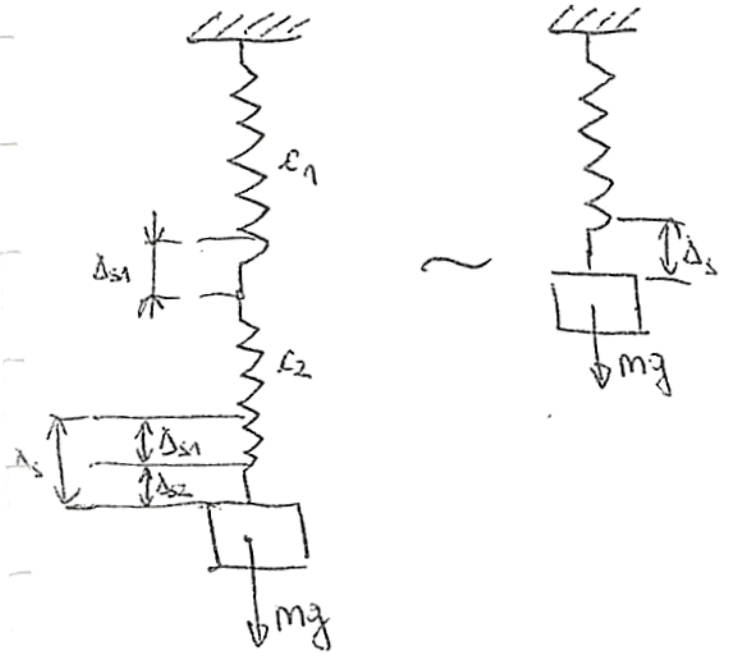
$$\Delta_{s1} = \Delta_{s2} = \Delta_s$$

$$\Rightarrow \boxed{c_e = c_1 + c_2}$$

Veza ostvarena na slijedeći način je također paralelna, tj $c_e = c_1 + c_2$



– Redna (serijska) veza



$$\Delta_s = \Delta_{s1} + \Delta_{s2}$$

$$mg = c_1 \Delta_{s1}$$

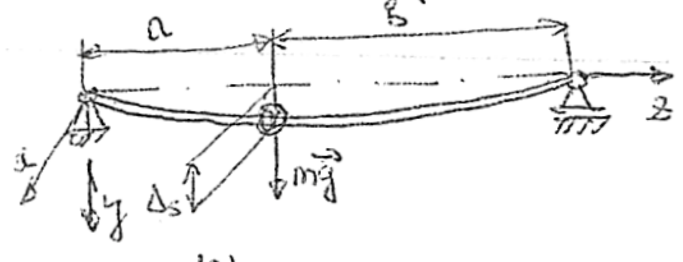
$$mg = c_2 \Delta_{s2}$$

$$mg = c_e \Delta_s$$

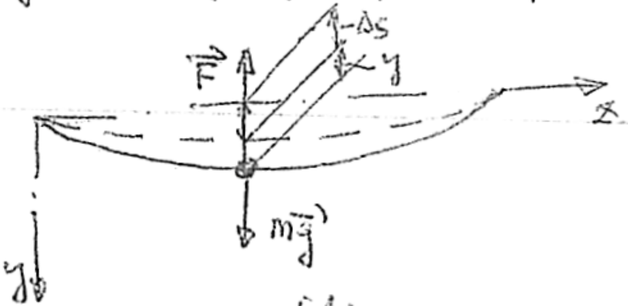
$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

b) Poprečne slobodne oscilacije elastične grede sa jednom koncentrisanom masom

Posmatrajmo gredu (pravolinijski puni nosač), čije su dimenzije poprečnog presjeka mnogo manje od dužine, na kojem se nalazi koncentrisani teret (materijalna tačka) mase m čvrsto vezana za nosač. Pretpostavlja se da je masa materijalne tačke mnogo veća od mase grede, tako da masu grede zanemarujemo. Smatra se da se pri deformaciji grede njeni djelići pomjeraju u pravcu upravnom na osu nedeformisane grede.



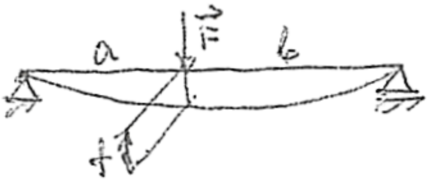
(a)



(b)

Položaj ravnoteže prikazan je na slici (a) i tada je Δ_s statičko pomjeranje grede. Ako se mat. tačka izvede iz ravnotežnog položaja ili joj se saopšti početna brzina u pravcu upravnom na osu z grede doći će do približno pravolinijskih vertikalnih oscilacija tačke (sl. (b)).

Iz Otpornosti materijala je poznato da ako na gredni nosač djeluje poprečna sila F, tako da izaziva malo poprečno pomjeranje ose grede (ugib) f, tada je $f = \alpha_{11} F$, gdje je $\alpha_{11} = const$ Maksvelov uticajni koeficijent. Za slučaj proste grede konstantnog poprečnog presjeka je



$$\alpha_{11} = \frac{1}{3EI_x}\frac{a^2b^2}{l},$$ gdje je E - Jungov modul elastičnosti, I_x - moment inercije površine poprečnog presjeka za osu x, $l = a+b$ - dužina nosača. Veličina $B = EI_x$ zove se savojna krutost.

Prema tome, u proizvoljnom položaju pri oscilovanju tačke je $f = \Delta_s + y$ (sl. (b)) i greda djeluje na tačku silom $F = \frac{1}{\alpha_{11}}(\Delta_s + y) \equiv \beta_{11}(\Delta_s + y)$, gdje je $\beta_{11} = \frac{1}{\alpha_{11}}$ dualni Maksvelov uticajni koeficijent (y mjerimo od ravnotežnog položaja).

Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja tačke je

$$m\ddot{y} = mg - \beta_{11}(\Delta_s + y)$$

Pošto je u ravnotežnom položaju

$$mg = \beta_{11}\Delta_s$$

biće

$$m\ddot{y} = -\beta_{11} y$$

ili

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{\beta_{11}}{m} = \frac{1}{m\alpha_{11}}$$

Do diferencijalne jednačine poprečnih oscilacija tačke može se doći i primjenom Lagrangeove jednačine druge vrste.

Kinetička energija tačke je $E_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

Uzimajući da je potencijalna energija u položaju ravnoteže jednaka nuli, biće

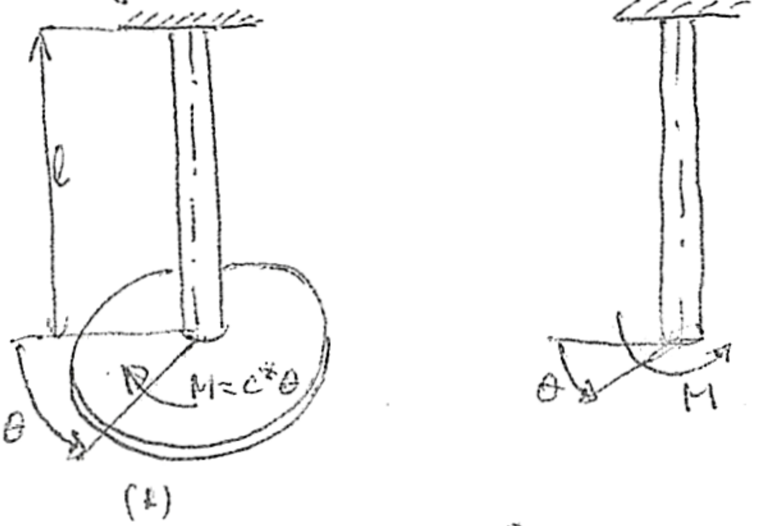
$$E_p = -mgy + \int_{\delta_{st}+y}^{0} -\gamma_{11}(\delta_{st}+y)\,dy = \frac{1}{2}\gamma_{11} y^2$$

Na taj način dolazimo do zaključka da su opružni i gredni oscilator ekvivalentni pri čemu je krutost grede kao elastičnog elementa

$$c = \gamma_{11} = \frac{1}{\alpha_{11}}$$

c) Torzijski oscilator.

Posmatrajmo prizmatično pravolinijsko elastično vratilo koje je na jednom kraju uklješteno a na drugom nosi osno simetrični kruti disk čija se osa simetrije poklapa sa osom vratila. Pretpostavlja se da je jedino kretanje koje disk izvodi obrtanje oko nepomične ose vratila. Masa vratila se zanemaruje u odnosu na masu diska.



(1)

Iz Otpornosti materijala je poznato da ~~...~~ je veza između ugla uvijanja θ i momenta data sa

$$M = \frac{G I_o}{l}\theta \equiv c^*\theta,$$

G – modul smicanja (klizanja)

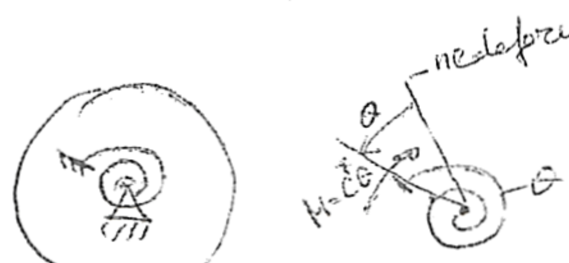
I_o – polarni moment inercije površine poprečnog presjeka vratila za njegovo težište

l – dužina vratila

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2, \quad E_p = \int_{\theta}^{0} -c^*\theta\, d\theta = \frac{1}{2} c^* \theta^2$$

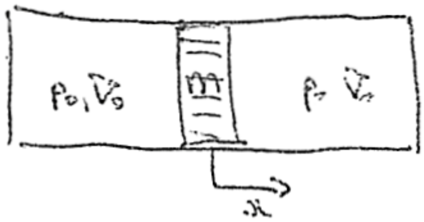
$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{c^*}{J}$$

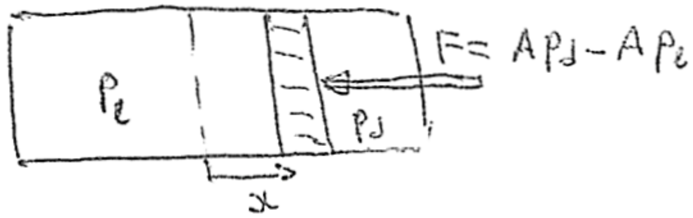
spiralni oscilator:



$$E_p = \frac{1}{2} c^* \theta^2$$

d) Gasni oscilator. U zatvorenom cilindru poprečnog presjeka A [cm^2] nalazi se klip mase m. Kada je klip na sredini cilindra ($x=0$) pritisak na obje strane klipa je p_0, tj. ovaj položaj je ravnotežni. Gas (vazduh) se pokorava Bojl-Mariotovom zakonu (idealni gas), tj. $pV = p_0 V_0 = const.$, V_0 - zapremina polovine cilindra.





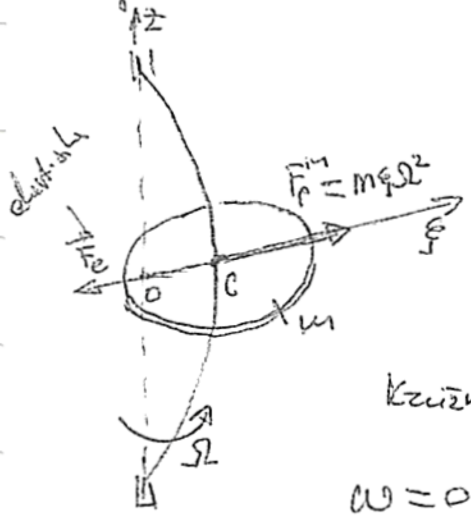
$$p_l = \frac{p_0 V_0}{V_l} = \frac{p_0 V_0}{V_0 + Ax}, \quad p_d = \frac{p_0 V_0}{V_0 - Ax}$$

$$m\ddot{x} = -F; \quad F = p_0 V_0 A \left(\frac{1}{V_0 - Ax} - \frac{1}{V_0 + Ax} \right) = \frac{2 p_0 V_0 A^2 x}{V_0^2 - A^2 x^2}$$

$$F \simeq \frac{2 p_0 A^2}{V_0} x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{2A^2 p_0}{m V_0}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e) Poprečne oscilacije diska na elastičnom vratilu koje se obrće konstantnom ugaonom brzinom (kritična ugaona brzina)



prenosno kretanje: obrtanje oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom Ω

relativno kretanje: poprečno (pravolinijsko) kretanje tačke C

$F_e = c\xi = \frac{1}{\alpha_{11}}\xi$, $c = \frac{1}{\alpha_{11}}$ - krutost pri savijanju vratila silom na mjestu diska

- relativna ravnoteža odgovara vertikalnom položaju vratila ($\xi = 0$);

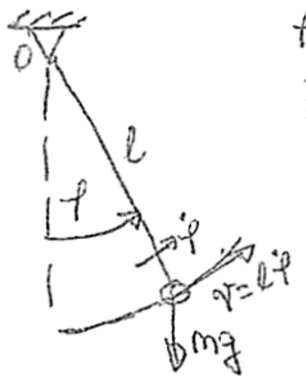
$$m\ddot{\xi} = -c\xi + m\Omega^2 \xi$$

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \omega^2 = -\Omega^2 + \frac{c}{m}$$

Kružna frekvencija tih oscilacija je $\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \Omega^2}$

$$\omega = 0 \Longleftrightarrow \Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$ - kritična ugaona brzina

f) Matematičko klatno



$\varphi = 0$ – stabilni ravnotežni položaj

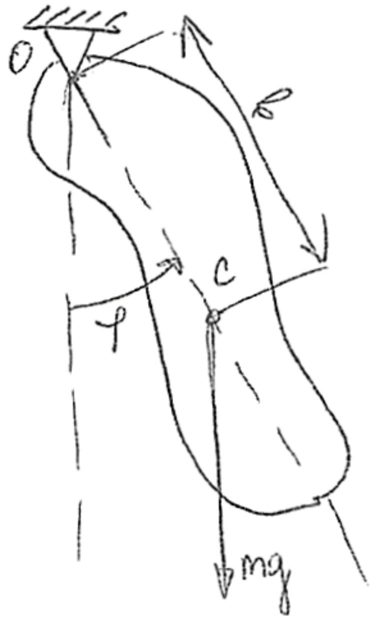
$E_k = \frac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2 \rightarrow a_{11} = ml^2$

$E_p = -mgl\cos\varphi$

$\rightarrow c_{11} = \left. \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = mgl$

$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{g}{l}$

g) Fizičko klatno



$\varphi = 0$ – stabilni ravnotežni položaj

$E_k = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 \longrightarrow a_{11} = J_O$

$E_p = -mgb\cos\varphi$

$c_{11} = \left. \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = mgb$

$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{mgb}{J_O}$

2. Slobodne prigušene oscilacije

Na sistem osim konzervativnih sila djeluju i sile otpora $\vec{F}_\nu^{(d)} = -g_\nu \vec{v}_\nu$, $\nu = 1, \dots, N$

U okolini stabilnog ravnotežnog položaja $q=0$ je $E_k = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2$, $E_p = \frac{1}{2} c_{11} q^2$ i

$\Phi = \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}$, gdje je $b_{11} = \sum_{\nu=1}^{N} g_\nu \left(\frac{d\vec{r}_\nu}{dq}\right)_0^2$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 0 \longrightarrow a_{11}\ddot{q} + b_{11}\dot{q} + c_{11} q = 0 \;\Big|\; : a_{11}$$

$$\rightarrow \ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = 0, \; n = \frac{b_{11}}{2a_{11}}, \; \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} \qquad (1)$$

$$(1) \xrightarrow{q = e^{\lambda t}} \lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0 \qquad (2)$$ – karakteristična jednačina sistema

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

Karakter kretanja je određen prirodom korijena $\lambda_{1,2}$ karakteristične jednačine

a) Slučaj malog prigušenja (oscilatorno kvaziperiodično kretanje): $n < \omega$

U ovom slučaju korijeni karak. jednačine su konjugovano kompleksni brojevi sa negativnim realnim dijelovima, tj.

$$\lambda_{1,2} = -n \pm ip, \quad p = \sqrt{\omega^2 - n^2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Opšte rješenje dif. jed. (1) je

$$q = C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t} = \dots = e^{-nt}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt), \qquad (3)$$

odnosno, poslije transformacije

$C_1 = R \sin\alpha$

$C_2 = R \cos\alpha$,

$$q = R e^{-nt} \sin(pt + \alpha); \; R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \; \sin\alpha = \frac{C_1}{R}, \; \cos\alpha = \frac{C_2}{R} \qquad (4)$$

Za početne uslove: $t_0 = 0$, $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$ dobijamo

$$C_1 = q_0, \; C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{p}$$

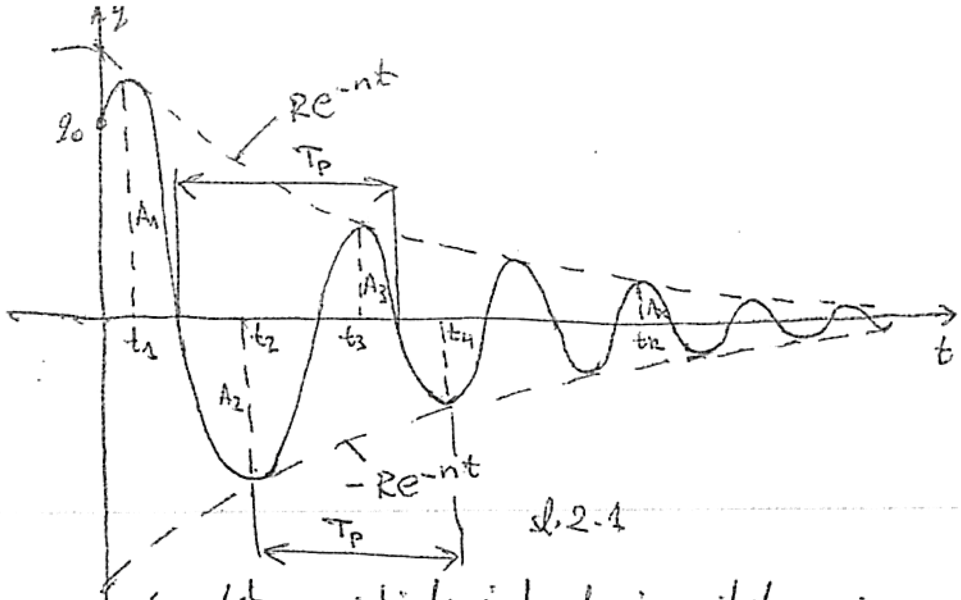
pa je konačna jednačina kretanja

$$q = e^{-nt}\left(q_0 \cos pt + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{p} \sin pt\right), \qquad (5)$$

odnosno

$$q = R e^{-nt} \sin(pt + \alpha), \; R = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + nq_0}{p}\right)^2}, \; \sin\alpha = \frac{q_0}{R}, \; \cos\alpha = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{pR}. \qquad (6)$$

Grafički prikaz jednačine kretanja dat je na slici 2.1.



sl. 2-1

Sa slike se vidi da je kretanje oscilatorno i nije periodično, ali se trenuci prolaska sistema kroz položaj ravnoteže (nule f-je $\sin(pt+\alpha)$) periodično ponavljaju pa se kaže da je kretanje kvaziperiodično (prividno periodično). Kao period prigušenih oscilacija T_p definiše se vremenski interval između dva uzastopna prolaska sistema kroz ravnotežni položaj sa iste strane, tj.

$$T_p = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-n^2}} \rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}, \quad \frac{2\pi}{\omega} = T_\omega$$ – period odgovarajućih neprigušenih oscilacija

$\psi = \frac{n}{\omega}$ – bezdimenzijski koeficijent prigušenja ($0<\psi\leq 1$)

$$\rightarrow \frac{T_p}{T_\omega} = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}} > 1$$ → za mali koeficijent prigušenja ψ, $T_p \approx T_\omega$

Trenuci dostizanja amplituda određuju se iz jednačine

$$\dot{q}(t) = Re^{-nt}[p\cos(pt+\alpha) - n\sin(pt+\alpha)] = 0,$$

odakle slijedi

$$t_k = \frac{1}{p}\left[\text{arctg}\frac{p}{n} - \alpha + (k-1)\pi\right], \quad k = 1, 2, 3, \dots ; \quad A_k = |q(t_k)|$$

$\rightarrow t_{k+1} = t_k + \frac{\pi}{p} = t_k + \frac{T_p}{2}$ → vremenski razmak između dvije susjedne amplitude jednak je polovini perioda prigušenih oscilacija

Kao kvantitativna mjera uticaja prigušenja uzima se odnos dvije uzastopne amplitude, tj

$$d = \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{|q(t_k)|}{|q(t_{k+1})|} \overset{(6)}{=} e^{\frac{\pi n}{p}} = e^{\frac{n T_p}{2}}$$ – dekrement prigušenja

Znači, amplitude se smanjuju po zakonu geometrijske progresije.
Obično se kao mjera uticaja prigušenja umjesto d uzima tzv. logaritamski dekrement:

$$\Theta \overset{def}{=} \ln d = \pi\frac{n}{p}$$

Na kraju, primijetimo da je $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$, tj pod dejstvom otpora stabilni ravnotežni položaj postaje asimptotski stabilan.

b) Slučaj velikog prigušenja (neoscilatorno aperiodično kretanje): $n > \omega$

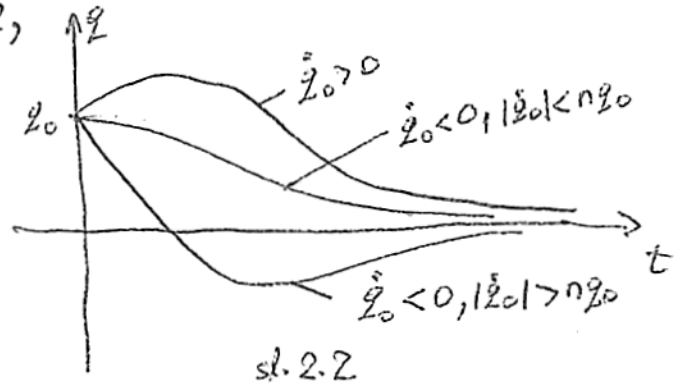
U ovom slučaju korijeni karakteristične jednačine (2) su realni i negativni, tj.

$$\lambda_{1,2} = -n \pm r, \quad r = \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

pa je opšte rješenje dif. jed. (1) oblika

$$q = e^{-nt}\left(C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}\right)$$

Jednačina kretanja dobija se određivanjem integracionih konstanti C_1 i C_2 saglasno početnim uslovima. Grafik kretanja, zavisno od početnih uslova, izgleda kao na sl. 2.2,



sl. 2.2

i kao što se vidi kretanje je neoscilatorno i potpuno neperiodično (aperiodično).

c) Granični slučaj (kritično prigušenje): $n = \omega$

U ovom slučaju korijeni karakteristične jednačine (2) su realni, negativni i jednaki, tj.

$$\lambda_{1,2} = -n$$

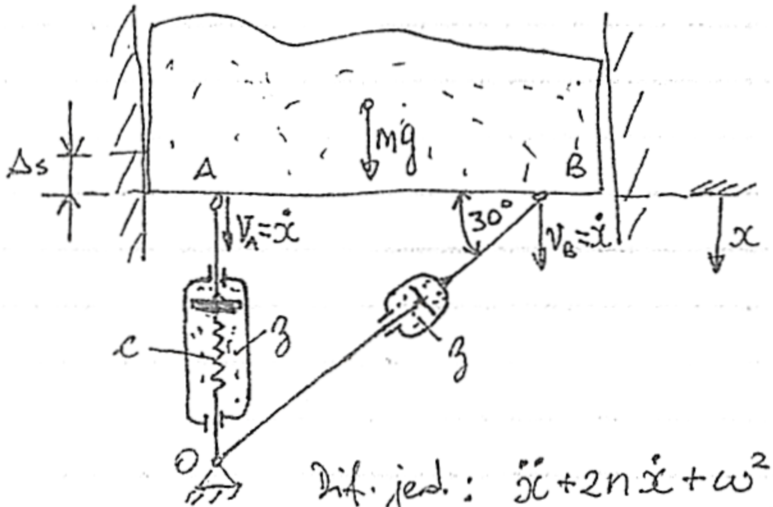
pa je, u skladu sa teorijom linearnih diferencijalnih jednačina, opšte rješenje

$$q = (C_1 t + C_2)\, e^{-nt}$$

Grafici kretanja su sličnog oblika kao na sl. 2.2, te se može zaključiti da je i u ovom slučaju kretanje neoscilatorno i aperiodično.

Zadaci: Slobodne prigušene oscilacije

1. Mašina mase m, koja može da se pomjera u vertikalnom pravcu, vezana je zglobno za prigušivače zanemarljivih masa. Položaj ravnoteže prikazan na slici održava opruga krutosti c koja se nalazi u prigušivaču OA. Ako je sila otpora prigušivača srazmjerna brzini klipa u odnosu na cilindar, odrediti koji uslov treba da zadovoljava koeficijent proporcionalnosti β da bi mašina izvodila kvaziperiodično oscilatorno kretanje.



$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \rightarrow a_{11}=m$$

$$E_p=\frac{1}{2}c(\Delta_s+x)^2-mgx$$

$$c_{11}=\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=0}=c$$

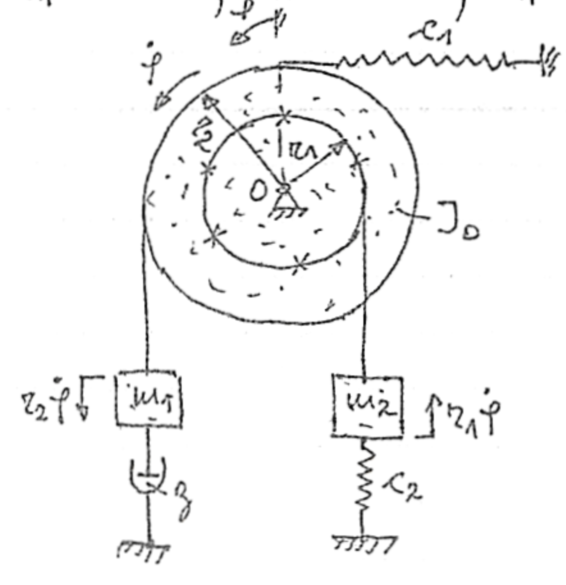
$$\Phi=\frac{1}{2}\beta v_A^2+\frac{1}{2}\beta(v_B\cos 60^\circ)^2$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\beta\dot{x}^2 \rightarrow b_{11}=\frac{5}{4}\beta$$

Dif. jed.: $\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega^2x=0$, $2n=\frac{b_{11}}{a_{11}}=\frac{5}{4}\frac{\beta}{m}$; $\omega^2=\frac{c_{11}}{a_{11}}=\frac{c}{m}$

uslov zadatka: $n<\omega \Rightarrow \boxed{\beta<\frac{8}{5}\sqrt{cm}}$

2. U oscilatornom sistemu prikazanom na slici bezdimenzioni koeficijent prigušenja je $\psi=1,25$. Koliki je koeficijent prigušenja β u prigušivaču, ako su: $m_1=10$ kg; $m_2=20$ kg; $J_O=1,1$ kgm^2; $r_1=10$ cm; $r_2=30$ cm; $c_1=10^4$ N/m; $c_2=10^5$ N/m.



$$\psi=\frac{n}{\omega};\quad n=\frac{b_{11}}{2a_{11}};\quad \omega=\sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$$

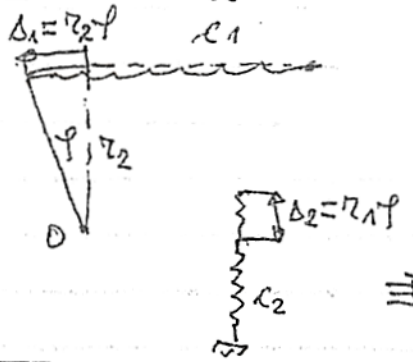
$$\Rightarrow a_{11},\ b_{11},\ c_{11}\ ?$$

$$E_k=\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_1(r_2\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}m_2(r_1\dot{\varphi})^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(J_O+m_1r_2^2+m_2r_1^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow a_{11}=J_O+m_1r_2^2+m_2r_1^2$$

$\Phi = \frac{1}{2}\beta(r_2\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}\beta r_2^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow b_{11} = \beta r_2^2$



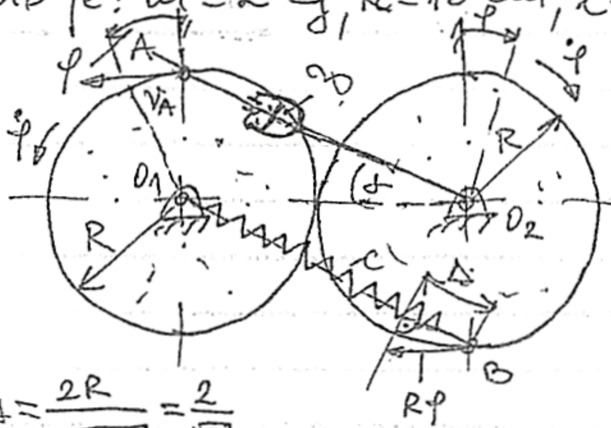
$$E_p = \frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_2^2 = \frac{1}{2}(c_1 r_2^2 + c_2 r_1^2)\varphi^2$$

$$\Rightarrow c_{11} = c_1 r_2^2 + c_2 r_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{\beta r_2^2}{2(J_0 + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2)} = \psi\sqrt{\frac{c_1 r_2^2 + c_2 r_1^2}{J_0 + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 1820\ \frac{Ns}{m}}$$

3. Sistem se sastoji od dva spregnuta zupčanika jednakih masa m i poluprečnika R. Zupčanici su vezani oprugom krutosti c i viskoznim prigušivačem sa koeficijentom prigušenja β. Zupčanike smatrati homogenim kružnim diskovima. Ako je u početnom trenutku sistem bio u miru a zupčanici okrenuti za mali ugao φ_0 u odnosu na ravnotežni položaj prikazan na slici, odrediti konačne jednačine oscilovanja sistema.
Dato je: $m = 2$ kg; $R = 10$ cm; $c = 250$ N/m; $\beta = 30$ Ns/m; $\varphi_0 = 0{,}08$ rad.



$$E_k = \frac{1}{2}J_{O_1}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_{O_2}\dot{\varphi}^2$$

$$J_{O_1} = J_{O_2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 \rightarrow a_{11} = mR^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta(v_A\cos\alpha)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\beta R^2\dot{\varphi}^2 \rightarrow b_{11} = \frac{4}{5}\beta R^2$$

$$\cos\alpha = \frac{2R}{\sqrt{(2R)^2 + R^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$v_A = R\dot{\varphi}$

$\Delta = R\varphi\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}R\varphi$

$$E_p = \frac{1}{2}c\Delta^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}cR^2\varphi^2 \Rightarrow c_{11} = \frac{4}{5}cR^2$$

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0;\quad n = \frac{2\beta}{5m},\ \omega^2 = \frac{4c}{5m}$$

$n = 6\ s^{-1}$; $\omega = 10\ s^{-1}$ $\Rightarrow$ $n < \omega$ – slučaj malog prigušenja

$$p = \sqrt{\omega^2 - n^2} = 8\ s^{-1}$$

$$\varphi = e^{-nt}\left(\varphi_0\cos pt + \frac{\cancel{\dot{\varphi}_0} + n\varphi_0}{p}\sin pt\right)$$

$$\boxed{\varphi = e^{-6t}[0{,}08\cos 8t + 0{,}06\sin 8t]}$$

3. Prinudne oscilacije

Pretpostavimo da na materijalni sistem pored konzervativnih sila $\vec{F}_\nu^{(k)}$ i sila otpora $\vec{F}_\nu^{(d)} = -\beta_\nu \vec{v}_\nu$ djeluju i tzv. prinudne (poremećajne) sile $\vec{F}_\nu^{*} = \vec{F}_\nu^{*}(t)$, koje se u toku vremena mijenjaju po poznatom zakonu. Diferencijalne jednačine malih kretanja u okolini položaja $q=0$, koji predstavlja stabilni ravnotežni položaj sistema kada se on nalazi pod dejstvom samo konzervativnih sila, biće

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = Q^*(t) \qquad (1)$$

gdje su: $E_k = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2$, $\Phi = \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}^2$, $E_p = \frac{1}{2} c_{11} q^2$ i $Q^*(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^*(t) \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q}\right)_{q=0}$ – generalisana prinudna sila.

$$(1) \rightarrow a_{11}\ddot{q} + b_{11}\dot{q} + c_{11} q = Q^*(t) \qquad (2)$$ – dif. jed. prinudnih prigušenih oscilacija

Zakon generalisane prinudne sile $Q^*(t)$ može biti periodičan ili neperiodičan.

3.1. Prosta neprigušena prinudna oscilacija

$b_{11} = 0$ (zanemareno prigušenje), $Q^* = Q_0 \sin \Omega t$, $Q_0 = const$ – amplituda prinudne sile, Ω – const – kružna frekvencija prinudne sile

$$(3.2) \rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = h \sin \Omega t, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \; h = \frac{Q_0}{a_{11}} \qquad (1)$$

Opšte rješenje jed. (1), koja predstavlja diferencijalnu jednačinu prostih neprigušenih prinudnih oscilacija, je

$$q = q_h + q_p \qquad (2)$$

gdje je

$$q_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad (3)$$

opšte rješenje homogene jednačine $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, a q_p partikularno rješenje jednačine (1). Partikularno rješenje se traži u obliku

$$q_p = C \sin \Omega t \qquad (4)$$

gdje se konstanta C bira tako da funkcija (4) zadovoljava jed. (1).

$$(4) \text{ u } (1) \Rightarrow C(\omega^2 - \Omega^2) \sin \Omega t = h \sin \Omega t$$

$$\Rightarrow C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}, \; \omega \neq \Omega \qquad (5)$$

$$\Rightarrow q_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (6)$$

$$(2) \xrightarrow{(3),(6)} q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (7)$$ – opšte rješ. jed. (1)

Iz početnih uslova: $t_0=0$, $q(t_0)=q_0$, $\dot q(t_0)=\dot q_0$, nalazi se

$$C_1 = q_0,\quad C_2 = \frac{\dot q_0}{\omega} - \frac{\Omega}{\omega}\frac{h}{\omega^2-\Omega^2}$$

pa je

$$q = q_0\cos\omega t + \frac{\dot q_0}{\omega}\sin\omega t - \frac{\Omega}{\omega}\frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t \qquad (8)$$

jednačina kretanja sistema.

Prva dva sabirka na desnoj strani izraza (8) određuju slobodne neprigušene oscilacije, izazvane početnim uslovima, koje bi vršio sistem u odsustvu prinudne sile. Treći član u (8) je mješovitog tipa i on određuje harmonijsku oscilaciju čija je kružna frekvencija jednaka kružnoj frekvenciji slobodnih oscilacija, ali je izazvana dejstvom prinudne sile i ne zavisi od početnih uslova. Četvrti član

$$q_p = \frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t \qquad (6)$$

određuje oscilacije koje su isključivo posledica dejstva prinudne sile i one se zovu prinudne oscilacije. Prinudna oscilacija (6) ne zavisi od početnih uslova, ima istu kružnu frekvenciju Ω kao i prinudna sila, a amplituda je

$$P = \frac{h}{|\omega^2-\Omega^2|} \qquad (9)$$

Izraz (6) se može napisati u obliku

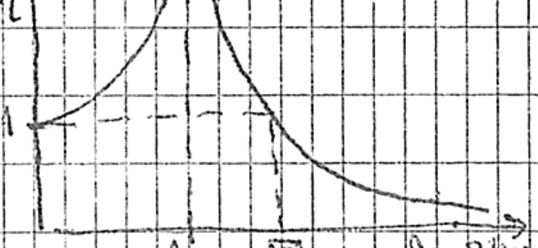
$$q_p = \begin{cases} P\sin\Omega t, & \Omega<\omega \ (\text{pomjeranje } q_p \text{ i prinudna sila su u istoj fazi}) \\ -P\sin\Omega t = P\sin(\Omega t \pm \pi), & \Omega>\omega \ (q_p \text{ i prinudna sila su u antifazi -- razlikuju se u fazi za } \pi) \end{cases}$$

Razmotrimo tok promjene amplitude prinudnih oscilacija sa promjenom kružne frekvencije prinudne sile.

$$(9) \Rightarrow \quad P = \frac{h/\omega^2}{|1-(\Omega/\omega)^2|} = \frac{P_s}{|1-\lambda^2|}$$

gdje je $\lambda = \Omega/\omega$ koeficijent poremećaja, a $P_s = h/\omega^2 \overset{(1)}{=} Q_0/c_{11} = q_{st}$ – pomjeranje rav. položaja prouzrokovano dejstvom konstantne sile Q_0 (statičko pomjeranje ili "statička amplituda"). Odnos amplitude prinudnih oscilacija i statičke amplitude naziva se koeficijent dinamičnosti ili dinamički faktor pojačavanja

$$\eta = \frac{P}{P_s} = \frac{1}{|1-\lambda^2|} \qquad (10)$$



$0<\lambda<1 \rightarrow \eta>1 \ (P>P_s)$

$1<\lambda\le\sqrt{2} \rightarrow \eta\ge 1 \ (P\ge P_s)$

$\sqrt{2}<\lambda \rightarrow \eta<1 \ (P<P_s)$

Kada je $\lambda=1$ $(\Omega=\omega)$ amplituda prinudnih oscilacija ima neograničenu veličinu vrijednost. Ova pojava se zove rezonancija.

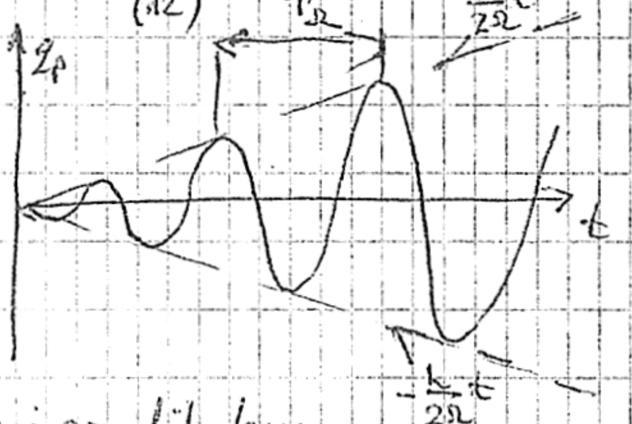
Rezonancija

Rezonancija nastaje kada je kružna frekvencija slobodnih oscilacija ω jednaka kružnoj frekvenciji prinudne sile Ω. Tada partikularno rješenje (6'), koje određuje prinudnu oscilaciju, gubi smisao pa se ono traži u drugom obliku

$$q_p = C\,t\cos\Omega t \qquad (11)$$

gdje je C konstanta koja se određuje tako da (11) zadovoljava jednačinu

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = h\sin\Omega t \qquad (12)$$



$$(11),(12) \longrightarrow C = -h/2\Omega$$

$$\longrightarrow q_p = -\frac{h}{2\Omega}t\cos\Omega t = \frac{h}{2\Omega}t\sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Prinudna oscilacija, u slučaju rezonancije, predstavlja kvaziperiodično oscilatorno kretanje sa ustaljenim periodom jednakim $T_\Omega = 2\pi/\Omega$, fazom koja zaostaje za fazom poremećajne sile za $\pi/2$ i amplitudama koje u toku vremena rastu po linearnom zakonu.

Podrhtavanje (bijenje)

Podrhtavanje je pojava koja nastaje kada se kružne frekvencije slobodnih oscilacija i prinudne sile malo razlikuju.

$$\frac{\omega-\Omega}{\omega} = \frac{2\Delta}{\omega} \ll 1 \qquad (13)$$

Neka je $q_0=0$, $\dot{q}_0=0$

$$(8) \rightarrow q = \frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega}\sin\omega t\right) \qquad (14)$$

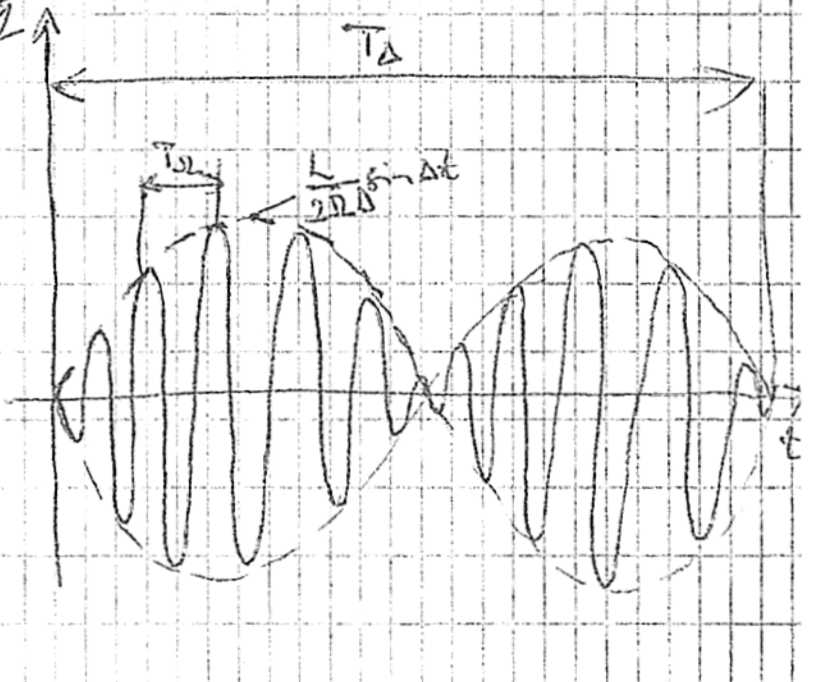
$$(13) \rightarrow \frac{\Omega}{\omega}\approx 1,\ \omega-\Omega = 2\Delta,\ \omega+\Omega\approx 2\Omega \qquad (15)$$

$$(14)\xrightarrow{(13)} q \approx \frac{h}{4\Omega\Delta}(\sin\Omega t - \sin\omega t)$$

$$\left[\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$\rightarrow q \approx \frac{-h}{2\Delta\Omega}\sin\Delta t\cos\Omega t$$

$$q \approx \frac{h}{2\Omega\Delta}\sin\Delta t\cdot\sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Amplituda ~~neperiodično~~ periodično raste i opada sa periodom $T_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$, $T_\Omega \ll T_\Delta$.

3.2. Prosta prinudna prigušena oscilacija

$Q^*(t) = Q_0 \sin \Omega t$

$(3.2) \rightarrow \quad \ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = h \sin \Omega t, \; n = \frac{b_{11}}{2a_{11}}, \; \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \; h = \frac{Q_0}{a_{11}} \quad (1)$

$q = q_h + q_p$

$$q_h = \begin{cases} Re^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \alpha), & n < \omega \\ e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-\omega^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-\omega^2}\, t}), & n > \omega \\ (C_1 t + C_2) e^{-nt}, & n = \omega \end{cases} \quad (2) \text{ - opšte rješenje homogene jednačine}$$

Partikularno rješenje jednačine (1) traži se u obliku

$$q_p = P \sin(\Omega t - \gamma) \quad (3)$$

$(3) \text{ u } (1) \rightarrow \; P(\omega^2 - \Omega^2)\sin(\Omega t - \gamma) + 2n\Omega P \cos(\Omega t - \gamma) = h \sin(\Omega t - \gamma + \gamma)$
$= h\cos\gamma \sin(\Omega t - \gamma) + h \sin\gamma \cos(\Omega t - \gamma)$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} P(\omega^2 - \Omega^2) = h\cos\gamma \\ 2n\Omega P = h \sin\gamma \end{array}\right\} \rightarrow P = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}}, \; tg\gamma = \frac{2n\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (4)$$

Dakle, partikularno rješenje, koje inače, određuje prinudnu oscilaciju je

$$q_p = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \sin(\Omega t - \gamma) \quad (5)$$

gdje je γ određena formulom (4).

Kretanje koje odgovara opštem rješenju q_h odgovarajuće homogene dif. jednačine, kao što je pokazano odjeljku 2, prilično brzo iščezava tako da poslije određenog vremenskog intervala t_1 (vrijeme ustaljivanja) može se smatrati da je $q_h(t) \approx 0$, odnosno da se kretanje svodi samo na prinudnu oscilaciju (5) $(q(t) \approx q_p(t), t > t_1)$.

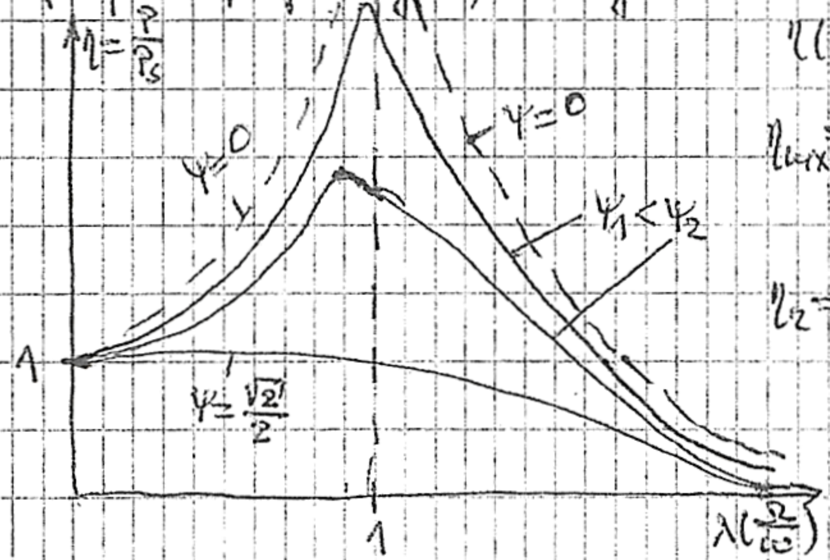
Amplituda prinudnih oscilacija može se napisati u obliku

$$P = \frac{h}{\omega^2 \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\psi^2}}, \; \lambda = \frac{\Omega}{\omega}, \; \psi = \frac{n}{\omega}$$

odakle, imajući u vidu da je $\frac{h}{\omega^2} = \frac{Q_0}{c_{11}} = P_s = q_{st}$ - statička amplituda, nalazimo dinamički faktor pojačanja

$$\eta = \frac{P}{P_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2\psi^2}}$$

Zavisnost koeficijenta η od koeficijenta poremećaja λ, za neke vrijednosti koeficijenta prigušenja ψ, data je na slici



$\eta(\lambda=0)=1$

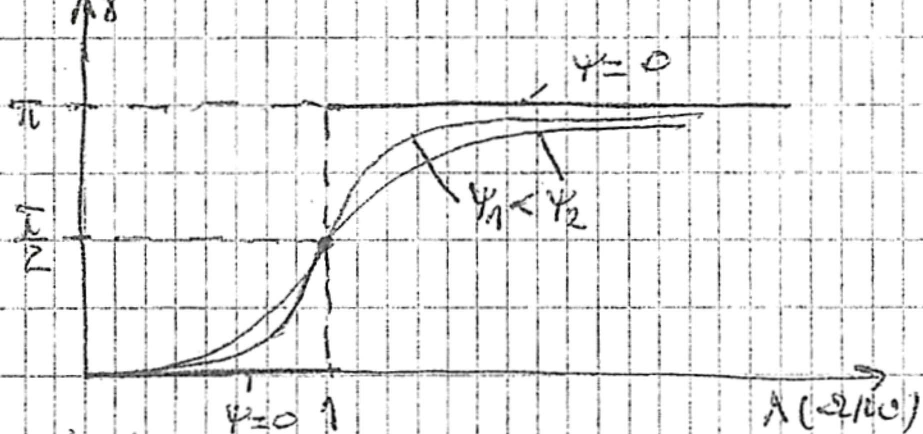
$$\eta_{max} = \begin{cases} \eta(\lambda=\sqrt{1-2\psi^2}) = \dfrac{1}{2\psi\sqrt{1-\psi^2}}, & \psi<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta(\lambda=0)=1, & \psi \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\eta_r = \eta(\lambda=1) = \dfrac{1}{2\psi}, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\eta = 0$

$$P = \eta P_s$$

Također, ugao fazne razlike γ prinudnih oscilacija u odnosu na prinudnu silu, određen izrazom (4), možemo napisati u funkciji koeficijenata λ i ψ,

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{2\lambda\psi}{1-\lambda^2}$$



$\gamma(\lambda=0)=0$

$\gamma(\lambda=1)=\dfrac{\pi}{2}$

$\lim_{\lambda\to\infty}\gamma = \pi$

Iz ovih dijagrama, ili odgovarajućih izraza, može se zaključiti:

1) Ako je λ vrlo malo ($\lambda \ll 1$, $\Omega \ll \omega$), onda je $P \approx P_s$ i $\gamma \approx 0$ – oscilacije se vrše sa amplitudom koja je jednaka statičkoj i sa faznom razlikom $\gamma \approx 0$.

2) Ako je $\lambda \gg 1$ ($\Omega \gg \omega$), onda je $P \approx 0$, tj. prinudne oscilacije u ovom slučaju praktično ne postoje.

3) Kada je ψ malo i kada je λ blizu jedinice, amplitude imaju velike vrijednosti. U slučaju rezonancije ($\lambda=1$) je $P_r = P_s/2\psi$, $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ i

amplituda prinudne oscilacije je konačna, ali pri malom otporu veoma velika, a fazna razlika je $\gamma = \pi/2$.

Iz prethodnih razmatranja proističe da prinudne oscilacije posjeduju određena važna svojstva koja se razlikuju od sličnih karakteristika slobodnih oscilacija. Ta svojstva su:

a) Amplituda prinudnih oscilacija ne zavisi od početnih uslova.

b) Prinudne oscilacije se ne amortizuju (prigušuju) tokom vremena pri postojanju otpora.

c) Frekvencija prinudnih oscilacija jednaka je frekvenciji prinudne sile.

d) Pri maloj prinudnoj sili (Q_0 - malo) mogu da nastanu velike prinudne oscilacije, ako je otpor mali, a frekvencija prinudne sile bliska frekvenciji slobodnih oscilacija.

e) Pri velikoj prinudnoj sili, prinudne oscilacije mogu da budu vrlo male (ako je Ω mnogo veće od ω_0)

3.3 Složena prinudna prigušena oscilacija

a) Slučaj višefrekventne prinudne sile

$$Q^*(t) = \sum_{i=1}^{n} Q_{oi} \sin(\Omega_i t + \varepsilon_i) \qquad (1)$$

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = \sum_{i=1}^{n} h_i \sin(\Omega_i t + \varepsilon_i), \quad h_i = \frac{Q_{oi}}{a_{11}} \qquad (2)$$

Partikularno rješenje jed. (2) (prinudna oscilacija) je oblika

$$q_{(p)} = \sum_{i=1}^{n} q_{(i)}$$

gdje su $q_{(i)}$ partikularna rješenja jednačina

$$\ddot{q}_{(i)} + 2n\dot{q}_{(i)} + \omega^2 q_{(i)} = h_i \sin(\Omega_i t + \varepsilon_i), \quad i = 1, \dots, n$$

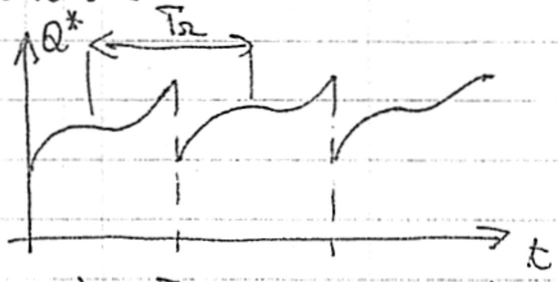
tj., na osnovu 3.2-5,

$$q_{(i)} = P_i \sin(\Omega_i t + \varepsilon_i - \gamma_i), \quad P_i = \frac{h_i}{\sqrt{(-\Omega_i^2 + \omega^2)^2 + 4n^2\Omega_i^2}}, \quad \operatorname{tg}\gamma_i = \frac{2n\Omega_i}{\omega^2 - \Omega_i^2}$$

pa je zakon prinudne oscilacije

$$q_{(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 + 4n^2\Omega_i^2}} \sin(\Omega_i t + \varepsilon_i - \gamma_i)$$

b) Slučaj proizvoljne <u>periodične</u> prinudne sile



$$Q^* = Q^*(t), \quad Q^*(t + T_\Omega) = Q^*(t), \ \forall t$$

T_Ω – osnovni period f-je $Q^*(t)$

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$Q^*(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(D_k \cos(k\Omega t) + E_k \sin(k\Omega t)\right)}_{k\text{-ti harmonik f-je } Q^*(t)} \text{ – Furijeov red f-je } Q^*(t)$$

$$D_0 = \frac{1}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} Q^*(t)\,dt \text{ – srednja vrijednost f-je } Q^*$$

$$D_k = \frac{2}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} Q^*(t) \cos(k\Omega t)\,dt, \quad E_k = \frac{2}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} Q^*(t) \sin(k\Omega t)\,dt$$

N: Ako je $Q^*(-t) = Q^*(t)$, onda je $E_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$
Ako je $Q^*(-t) = -Q^*(t)$, onda je $D_0 = 0$, $D_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$

Alternativni prikaz Furijeovog reda:

$$D_k = H_k \sin\varepsilon_k,\quad E_k = H_k \cos\varepsilon_k \Rightarrow H_k = \sqrt{D_k^2+E_k^2},\quad tg\,\varepsilon_k = \frac{D_k}{E_k}$$

$$\Rightarrow Q^*(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} H_k \sin(k\Omega t+\varepsilon_k)$$

Dif. jed. prinudnih oscilacija biće

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin(k\Omega t+\varepsilon_k),\quad h_0 = \frac{D_0}{a_{11}},\quad h_k = \frac{H_k}{a_{11}}$$

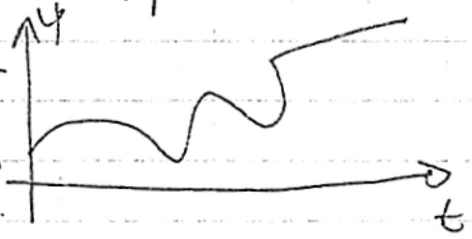
a partikularno rješenje (prinudna oscilacija):

$$q_{(p)} = \frac{h_0}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\sqrt{(\omega^2-k^2\Omega^2)^2+4n^2k^2\Omega^2}} \sin(k\Omega t+\varepsilon_k-\delta_k),\quad tg\,\delta_k = \frac{2nk\Omega}{\omega^2-k^2\Omega^2}$$

Obično se, sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti, prinudna oscilacija približno predstavlja zbirom prvih nekoliko harmonika.

3.4. Prinudne oscilacije sa aperiodičnom prinudnom silom

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = \Psi(t) \quad (1),\quad \Psi(t) = \frac{Q^*(t)}{a_{11}}$$ – neperiodična f-ja



Neka je $n<\omega$ (malo prigušenje)

Metodom varijacije konstanti, tj pretpostavljajući opšte rješenje dif. jed. (1) u obliku

$$q = e^{-nt}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt),\quad p = \sqrt{\omega^2-n^2},$$

gdje se C_1 i C_2 smatraju nepoznatim f-jama vremena, ako se iskoristi dopunski uslov $\dot{C}_1 \cos pt + \dot{C}_2 \sin pt = 0$, dolazi se do opšteg rješenja

$$q = e^{-nt}(A_1 \cos pt + A_2 \sin pt) + \underbrace{\frac{1}{p}\int_0^t \Psi(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau)\,d\tau}_{\text{Duhamelov integral}}$$

$$t_0=0:\ q(t_0)=q_0;\ \dot{q}(t_0)=\dot{q}_0 \Rightarrow A_1 = q_0,\quad A_2 = \frac{\dot{q}_0+nq_0}{p}$$

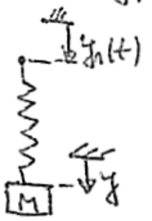
$$\Rightarrow q = e^{-nt}\left(q_0 \cos pt + \frac{\dot{q}_0+nq_0}{p}\sin pt\right) + \frac{1}{p}\int_0^t \Psi(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau)\,d\tau$$ – jednačina kretanja

za $n=0$, biće ($\omega=p$)

$$q = q_0 \cos\omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t \Psi(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

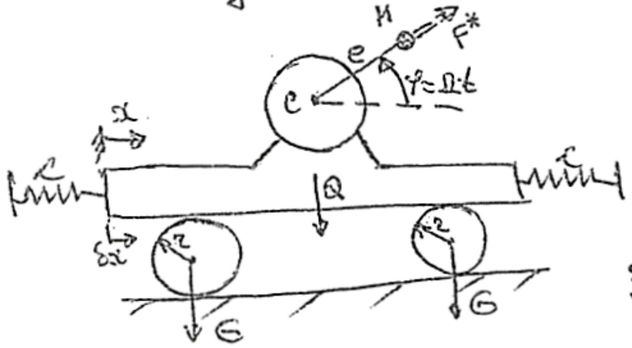
— Prinudne oscilacije —

1. Teret M učvršćen je za donji kraj elastične opruge čiji gornji kraj izvodi vertikalne oscilacije po zakonu $y_1 = b\sin(\Omega t)$. Odrediti prinudnu oscilaciju tereta M, ako je masa tereta $m = 400\,g$, $b = 2\,cm$, $\Omega = 7\,s^{-1}$, a sila od 39,2 N rasteže oprugu za 1 cm.



R: $y = 2\sin 7t$ [cm]

2. Na dasku AB, za koju su vezane dvije opruge istih krutosti c, postavljen je elektromotor sa ekscentrom dužine e na čijem je kraju učvršćena kuglica mase m, koja rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω. Daska je postavljena na dva šuplja cilindra tankih zidova koji leže na horizontalnoj ravni. Težina daske sa elektromotorom (bez ekscentrično postavljene mase) je Q, a svakog cilindra G. Smatrajući da nema klizanja između daske i cilindara, a takođe između cilindara i podloge, naći amplitudu horizontalnih prinudnih oscilacija sistema. Težinu ekscentrične poluge zanemariti.



R: $a_{Mrel.} = e\Omega^2$, $F^* = F^{in}_{Mrel} = me\Omega^2$

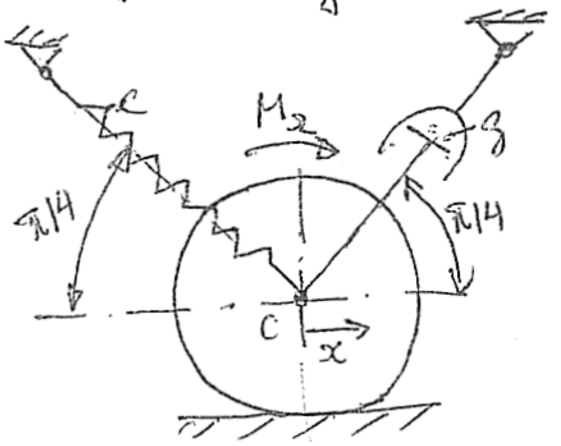
$\delta A^* = F^* \cos\Omega t\, \delta x = Q^*_x\, \delta x$

$\rightarrow Q^*_x = me\Omega^2 \cos\Omega t$

$a_{11} = \dfrac{Q+G+mg}{g}$, $c_{11} = 2c$

$\ddot{x} + \omega^2 x = h\cos\Omega t$, $\omega^2 = \dfrac{2cg}{Q+G+mg}$, $h = \dfrac{mge\Omega^2}{Q+G+mg}$, $P = \dfrac{h}{|\omega^2 - \Omega^2|}$

3. Za središte točka (homogeni disk), mase m i poluprečnika R, vezana je opruga krutosti c i prigušnica sa koeficijentom prigušenja β, kao što je na slici prikazano. Ako na točak djeluje spreg sila momenta $M_\Omega = M_0 \sin\Omega t$ dolazi do njegovog prinudnog oscilovanja pri čemu se točak kotrlja bez klizanja. Odrediti zakon prinudnog oscilovanja središta diska.



$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h\sin\Omega t$

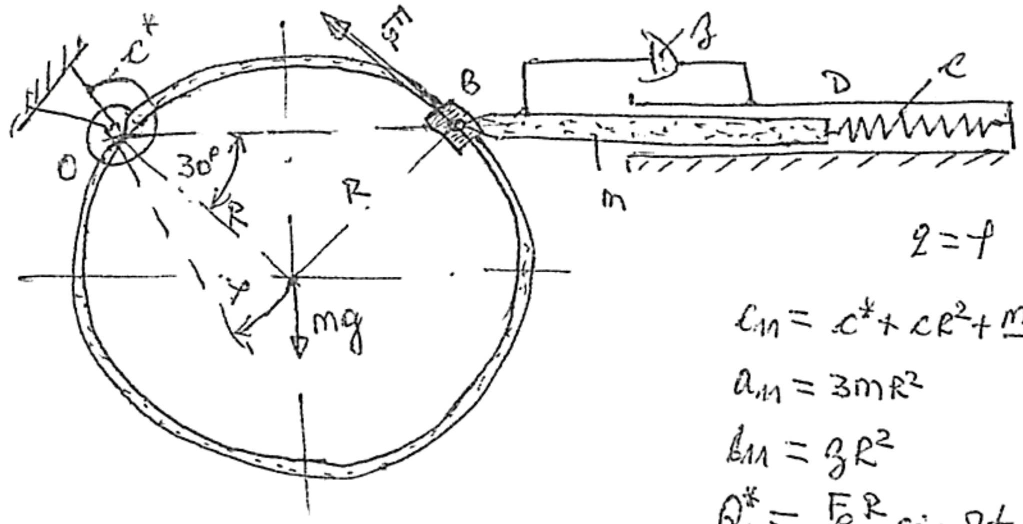
$n = \dfrac{\beta}{6m}$, $\omega^2 = \dfrac{c}{3m}$, $h = \dfrac{2M_0}{3mR}$

$x_{(p)} = 1{,}21 \sin(20t - 69{,}3°)$ [cm]

$c = 200\,N/cm$; $m = 10\,kg$, $R = 10\,cm$;

$M_0 = 10\,Nm$; $\Omega = 20\,s^{-1}$, $\beta = 720\,Ns/m$

4. Homogeni obruč mase m i poluprečnika R može da se obrće oko nepokretne horizontalne ose O. Posredstvom klizača B, zanemarljive mase, obruč je vezan zglobno za štap BD, mase m, koji je vezan za oprugu krutosti c i prigušnicom sa ~~[illegible]~~ koeficijentom prigušenja β. Ravnotežni položaj prikazan na slici održava spiralna opruga krutosti c^*, a pri tom je cilindrična opruga nedeformisana. Ako na klizač u pravcu tangente na obruč djeluje prinudna sila $F_R = F_0 \sin \Omega t$, napisati diferencijalnu jednačinu prinudnih oscilacija sistema.



$$q = \varphi$$

$$c_{11} = c^* + cR^2 + \frac{mgR}{2}$$

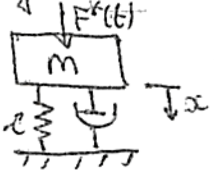
$$a_{11} = 3mR^2$$

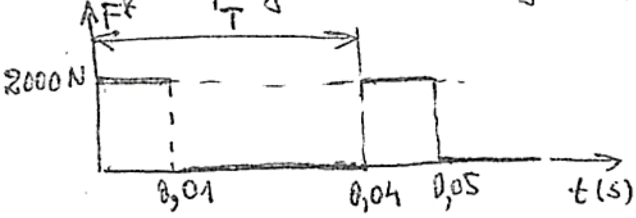
$$b_{11} = \beta R^2$$

$$Q_\varphi^* = \frac{F_0 R}{2} \sin \Omega t$$

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = h \sin \Omega t, \quad 2n = \frac{b_{11}}{a_{11}}, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad h = \frac{F_0 R}{2a_{11}}$$

1. Mašina mase $m = 200$ kg postavljena je na elastični temelj krutosti $c = 1{,}8 \times 10^7$ N/m, a bezdimenzioni koeficijent prigušenja je $\psi = 0{,}06$. Mašina je izložena dejstvu prinudne sile sa osnovnim periodom $T = 0{,}04$ s i zakonom promjene datim na slici. Napisati Furijeov red prinudne sile. Odrediti prinudne vertikalne oscilacije mašine i na osnovu prvih 8 harmonika procijeniti maksimalno odstupanje od ravnotežnog položaja.





$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 50\pi$$

$$D_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F^*(t)\,dt = \frac{1}{0{,}04}\left[\int_0^{0{,}01}(2000)\,dt + \int_{0{,}01}^{0{,}004}(0)\,dt\right] = 500\text{ N}$$

$$D_k = \frac{2}{T}\int_0^T F^*(t)\cos(k\Omega t)\,dt = \frac{2}{0{,}04}\left[\int_0^{0{,}01}(2000)\cos(50k\pi t)\,dt + \int_{0{,}01}^{0{,}04}(0)\,dt\right] = \frac{2000}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}, \quad k = 1,2,3,\dots$$

$$E_k = \frac{2}{T}\int_0^T F^*(t)\sin(k\Omega t)\,dt = \frac{2}{0{,}04}\left[\int_0^{0{,}01}(2000)\sin(50k\pi t)\,dt + \int_{0{,}01}^{0{,}04}(0)\,dt\right] = \frac{2000}{k\pi}\left(1-\cos\frac{k\pi}{2}\right);$$

$$H_k = \sqrt{D_k^2 + E_k^2} = \frac{4000}{k\pi}\left|\sin\frac{k\pi}{4}\right|; \quad tg\,\varepsilon_k = \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{1-\cos\frac{k\pi}{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{F^*(t) = 500 + \frac{4000}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\sin\frac{k\pi}{4}\right|\sin(50k\pi t + \varepsilon_k)} \qquad \psi = \frac{n}{\omega} \rightarrow n = 18\text{ s}^{-1}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin(50k\pi t + \varepsilon_k); \quad h_0 = \frac{D_0}{m}, \; h_k = \frac{H_k}{m}, \; \omega^2 = \frac{c}{m} = 9\times 10^4\text{ s}^{-2}$$

$$x_{(p)} = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \sin(50k\pi t + \varepsilon_k - \gamma_k), \text{ gdje su: } P_0 = \frac{h_0}{\omega^2} = \frac{D_0}{c} = \frac{500}{1{,}8\times 10^7};$$

$$P_k = \frac{h_k}{\sqrt{(\omega^2 - k^2\Omega^2)^2 + 4n^2k^2\Omega^2}} = \frac{H_k}{m\underbrace{\left(\frac{c}{m}\right)}_{\omega^2}\sqrt{(1-k^2\lambda^2)^2 + 4\psi^2k^2\lambda^2}}, \quad \lambda = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\pi}{6}$$

$$tg\,\gamma_k = \frac{2nk\Omega}{\omega^2 - k^2\Omega^2} = \frac{2\psi k\lambda}{1-k^2\lambda^2};$$

$$x_{(p)} = \frac{1}{1{,}8\times 10^7}\left[500 + \frac{4000}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\sin\frac{k\pi}{4}\right|\frac{1}{\sqrt{(1-k^2\lambda^2)^2+4\psi^2k^2\lambda^2}}\sin(50k\pi t + \varepsilon_k - \gamma_k)\right]$$

$$x_{(p)} \approx \frac{1}{1{,}8\times 10^7}\Big[500 + 1233\sin(50\pi t + 0{,}699) + 4017\sin(100\pi t + 0{,}915) +$$

$$+ 202{,}7\sin(150\pi t - 0{,}65) + 30{,}7\sin(250\pi t + 0{,}839) + 23{,}9\sin(300\pi t + 0{,}042)$$

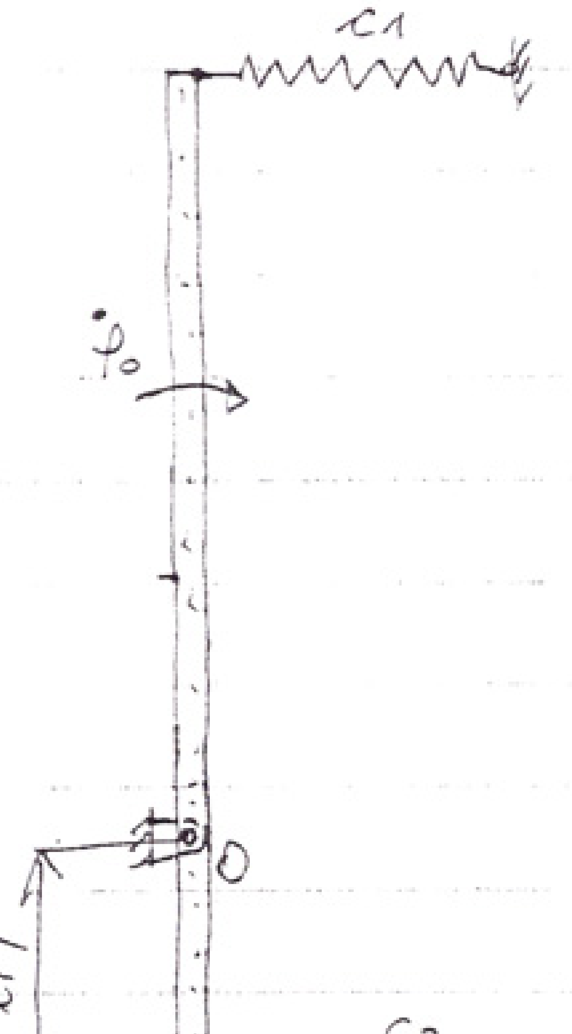
$$+ 10{,}3\sin(350\pi t - 0{,}82)\Big]$$

$$|x_{(p)}| < 3{,}34\times 10^{-4}\text{ m}$$

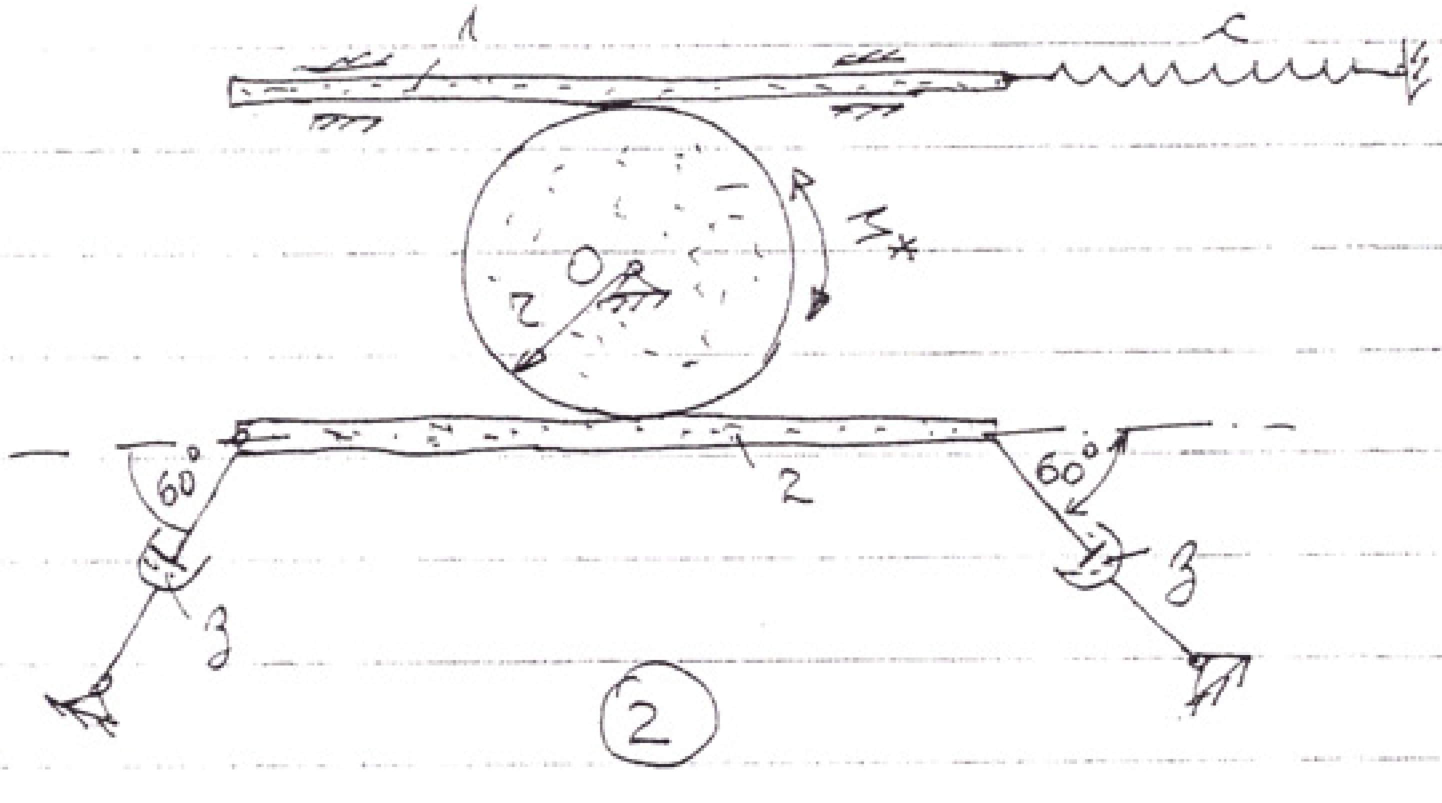
Oscilacije u mašinstvu, I KOLOKVIJUM, 2015.

1. Homogeni štap, mase m i dužine l, koji može da se obrće u vertikalnoj ravni oko nepokretne tačke O vezan je za elastične opruge krutosti $c_1 = c$ i $c_2 = 2c$, kao što je na slici prikazano. Ako je $c = mg/l$, $m = 10$ kg, $l = 2$ m, odrediti:
   a) kružnu frekvenciju i period oscilovanja štapa oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici;
   b) konačnu jednačinu oscilovanja štapa ako mu se u ravnotežnom položaju saopšti ugaona brzina $\dot{\varphi}_0 = 1$ rad/s.

2. Horizontalne zupčaste letve 1 i 2, jednakih masa $m_1 = m_2 = m$, spregnute su sa zupčanikom 3 (homogeni kružni disk mase $m_3 = 2m$ i poluprečnika r) koji može da se obrće oko nepokretne horizontalne ose O. Letva 1 vezana je za horizontalnu oprugu krutosti c, a letva 2 za prigušnice sa koeficijentom prigušenja β, a koje u ravnotežnom položaju zauzimaju položaj prikazan na slici. Ako na zupčanik djeluje prinudni moment $M^* = M_0 \sin \Omega t$, odrediti amplitudu prinudne oscilacije letve 1. Dato je $m = 2$ kg, $c = 54$ N/cm, $\beta = 48$ Ns/m, $\Omega = 10\ s^{-1}$, $M_0 = 60$ Nm, $r = 20$ cm.



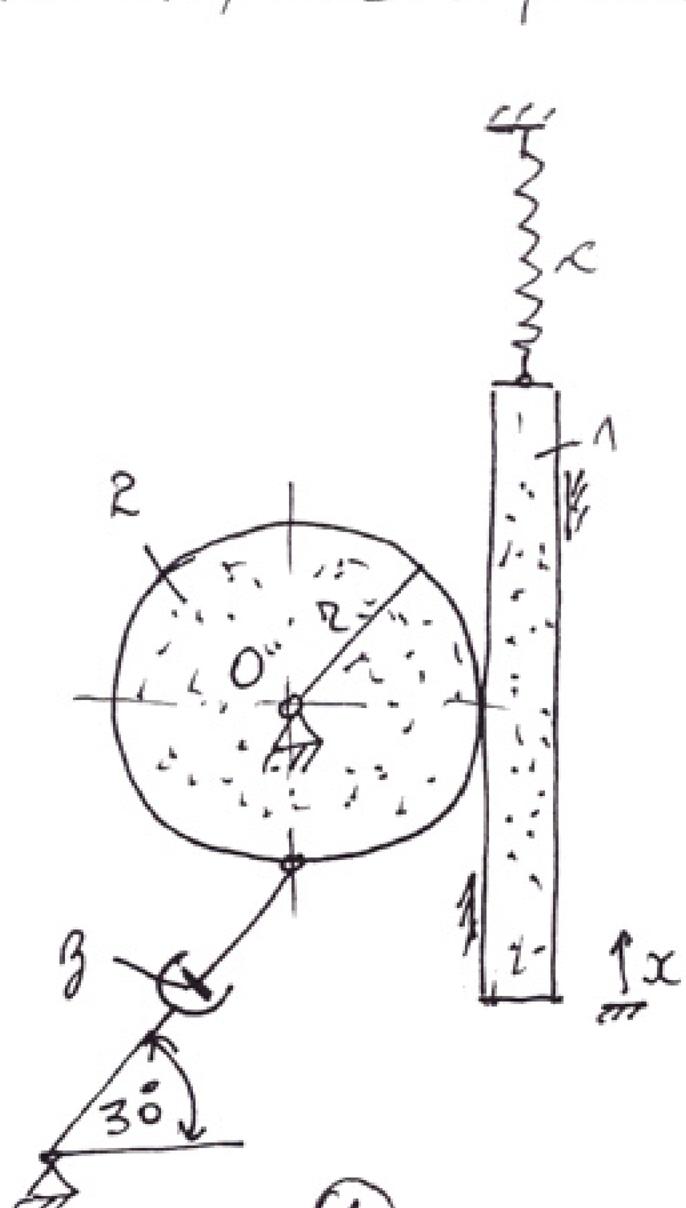
1



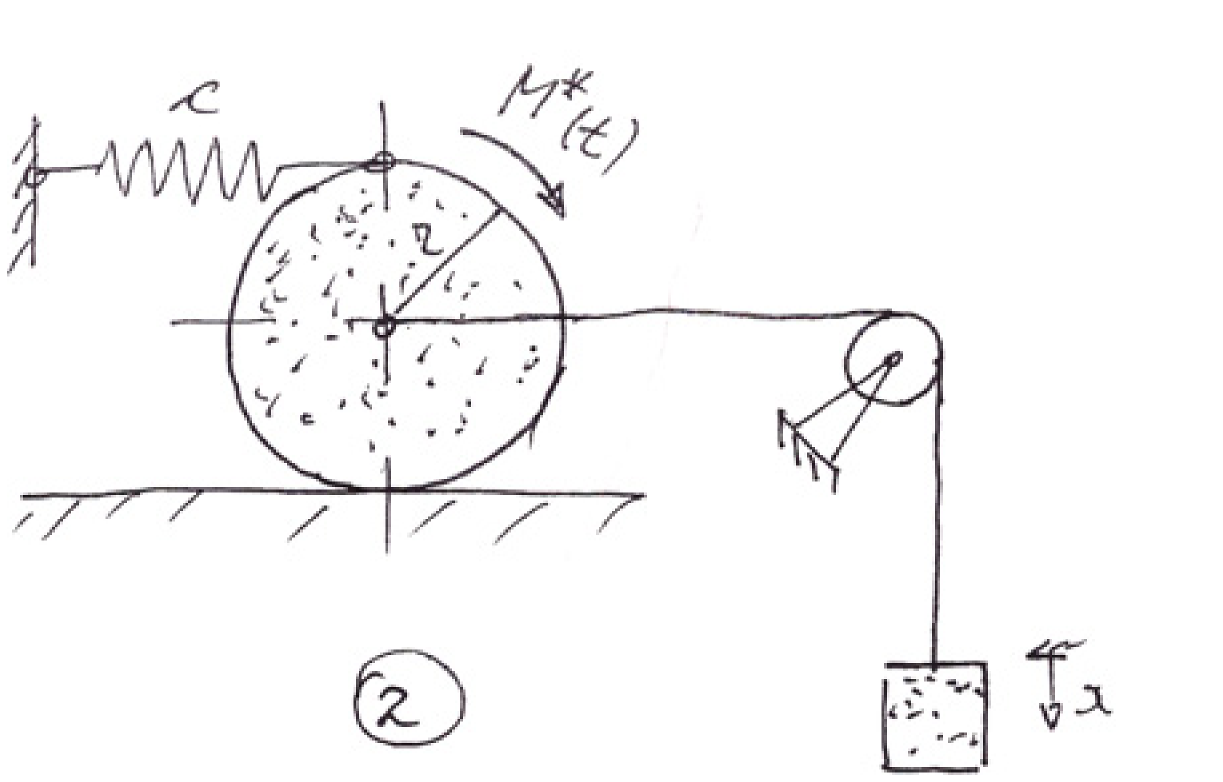
Oscilacije u mašinstvu, I KOLOKVIJUM, 2014.

1. Vertikalna zupčasta letva 1, mase $m_1 = 2$ kg, spregnuta je sa zupčanikom 2 (homogeni kružni disk mase $M_2 = 4$ kg) koji može da se obrće oko nepokretne horizontalne ose O. Zupčasta letva je vezana za vertikalnu oprugu krutosti $c = 784$ N/m, a zupčanik za prigušnicu sa koeficijentom prigušenja $\beta = 89{,}6$ Ns/m. a) Napisati diferencijalnu jednačinu slobodnih oscilacija sistema oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici. b) Odrediti period odgovarajućih neprigušenih oscilacija, kao i period prigušenih oscilacija. c) Napisati konačnu jednačinu oscilovanja ako je u početnom trenutku $t_0 = 0$, letva pomjerena iz ravnotežnog položaja nadolje za 2 cm i saopštena joj početna brzina od 0,5 m/s usmjerena nadolje.

2. Teg mase $m_1 = 3{,}8$ kg, posredstvom nerastegljivog užeta prebačenog preko kotura zanemarljive mase, vezan je za centar homogenog kružnog diska mase $m_2 = 4$ kg i poluprečnika $r = 10$ cm, koji se može kotrljati bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Horizontalna opruga krutosti $c = 981$ N/m održava sistem u ravnotežnom položaju prikazanom na slici. Ako na disk djeluje prinudni moment $M^* = M_0 \sin \Omega t$, $M_0 = 3$ Nm, $\Omega = 10$ rad/s, odrediti prinudnu oscilaciju tega.



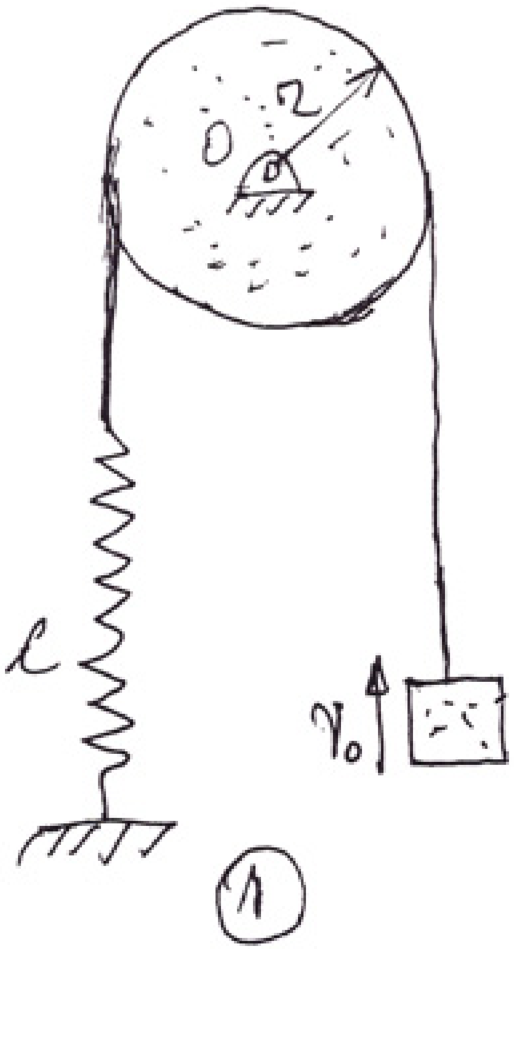
1

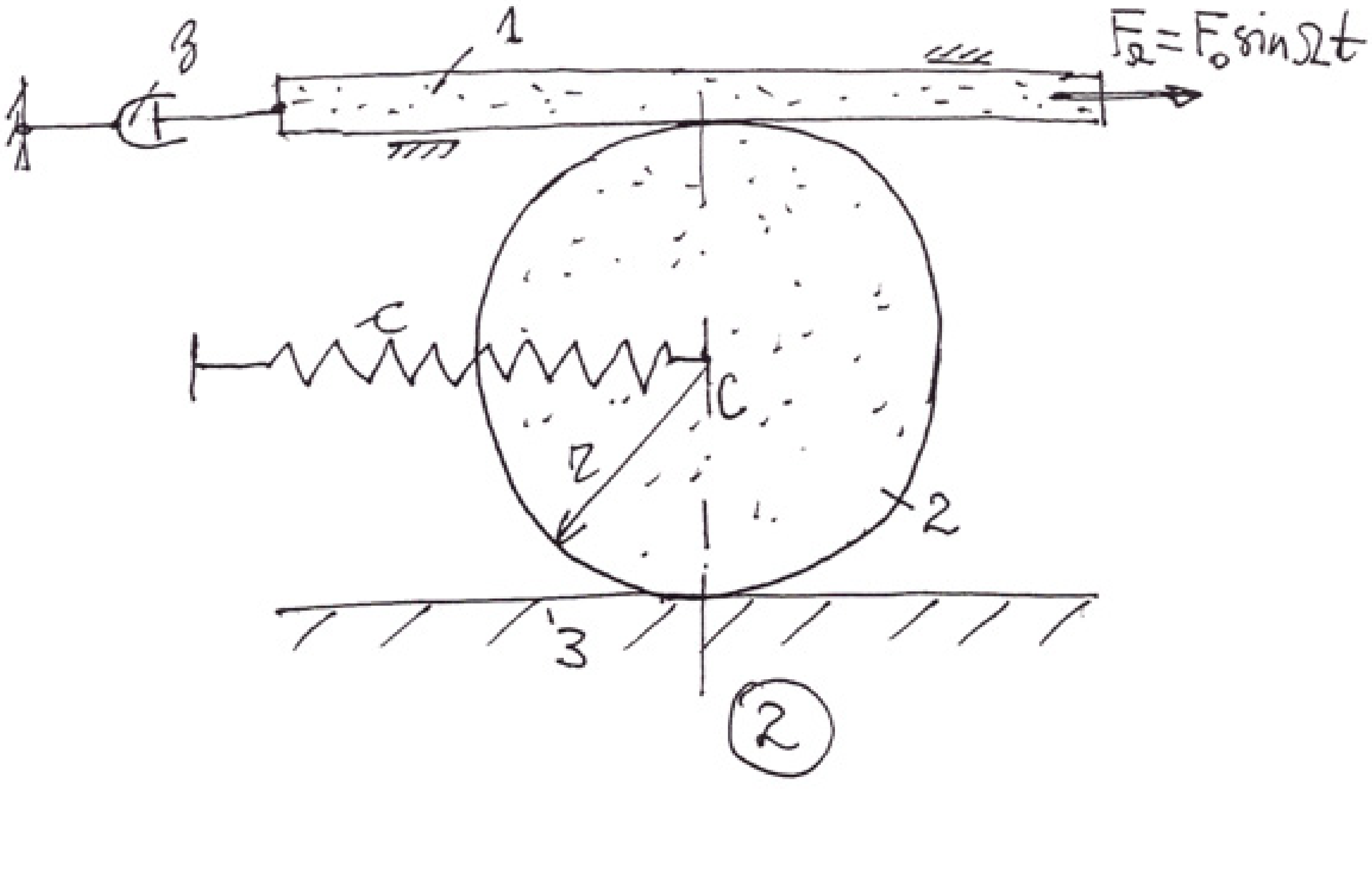


2

Oscilacije u mašinstvu, I KOLOKVIJUM, 2013.

1. Preko kotura (homogeni kružni disk mase $m_1 = 10$ kg i poluprečnika $r = 20$ cm) koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O, prebačeno je neistegljivo uže čiji je jedan kraj vezan za vertikalni elastični opruga krutosti $c = 4000$ N/m, a za drugi njegov kraj je obješen teg mase $m_2 = 5$ kg. Ako se tegu u položaju ravnoteže saopšti početna brzina $v_0 = 0{,}5$ m/s vertikalno naviše, odrediti konačnu jednačinu vertikalnih oscilacija tega. Koliki je period oscilovanja?
2. Horizontalna zupčasta letva 1, mase $m_1 = m$, spregnuta je sa zupčanikom 2, mase $m_2 = 8m$ i poluprečnika r, koji može da se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj zupčastoj letvi 3. Centar zupčanika je vezan za nepokretnu tačku horizontalnom oprugom krutosti c, a letva 1 za prigušnicu sa koeficijentom prigušenja β. Ako na letvu 1 djeluje prinudna sila $F_\Omega = F_0 \sin \Omega t$, odrediti amplitudu prinudne oscilacije letve. Zupčanik smatrati homogenim kružnim diskom. Dato je: $m = 2$ kg; $c = 32$ N/cm; $\beta = 80$ Ns/m; $\Omega = 10\ s^{-1}$; $F_0 = 16$ N.





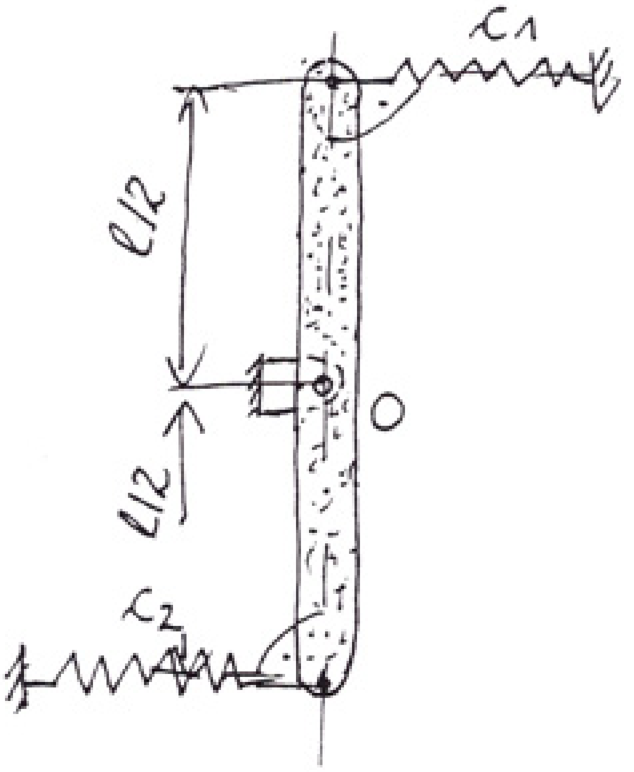
Oscilacije u mašinstvu (I KOLOKVIJUM), 2012

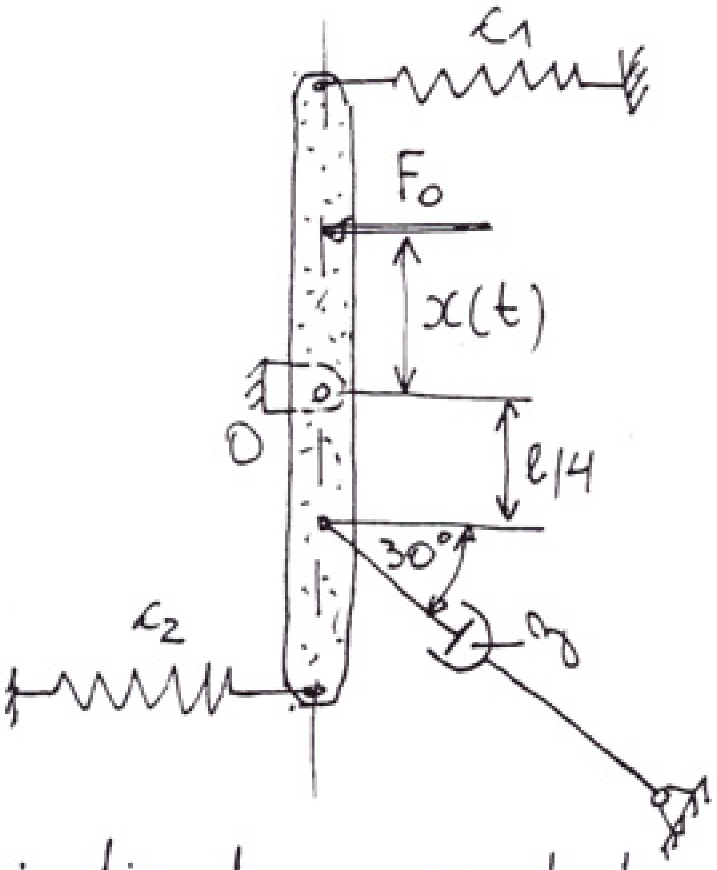
1. Homogeni štap, mase $m = 30$ kg i dužine $l = 2$ m, koji može da se obrće u ravni oko nepokretne tačke O, održavaju u stabilnom ravnotežnom položaju, prikazanom na slici, dvije opruge krutosti $c_1 = 6$ N/cm i $c_2 = 4$ N/cm.

a) Odrediti kružnu frekvenciju i period oscilovanja štapa.

b) Ako se štap pomjeri iz ravnotežnog položaja za ugao $\varphi_0 = 0,1$ rad i saopšti mu se ugaona brzina $\dot{\varphi}_0 = 1$ rad/s, napisati konačnu jednačinu oscilovanja štapa i izračunati njenu amplitudu.

2. Ako se za štap, opisan u prethodnom zadatku, veže prigušnica sa koeficijentom prigušenja $b = 640$ Ns/m (v. sl.) i ako upravno na osu štapa djeluje sila konstantnog intenziteta $F_0 = 100$ N čija se napadna linija pomjera po zakonu $x = x_0 \sin \Omega t$, $x_0 = 0,2$ m, $\Omega = 5$ rad/s, odrediti amplitudu prinudnih oscilacija štapa.





~~3. Definisati rezonanciju i napisati zakon prinudnih neprigušenih oscilacija u slučaju rezonancije.~~