III DIO: Male oscilacije sistema sa dva stepena slobode

1. Slobodne neprigušene oscilacije

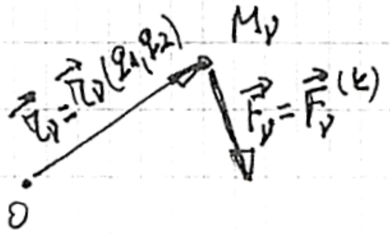
1.1. Diferencijalne jednačine kretanja

M_ν, m_ν, $\nu=1,\dots,n$ – sistem od n materijalnih tačaka čije kretanje ograničavaju idealne stacionarne holonomne veze, tako da on ima $s=2$ stepeni slobode.

$\vec{F}_\nu^{(k)}$ – konzervativne (elastične) sile

q_1, q_2 – generalisane koordinate

$q_1=0,\ q_2=0$ – stabilni ravnotežni položaj



Aproksimativni izrazi za kinetičku energiju $E_k=E_k(q_1,q_2,\dot q_1,\dot q_2)$ i potencijalnu energiju $E_p=E_p(q_1,q_2)$ sistema su:

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\,\dot q_i\,\dot q_j=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot q_1^2+2a_{12}\dot q_1\dot q_2+a_{22}\dot q_2^2\right), \qquad (1)$$

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}c_{ij}\,q_i\,q_j=\frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2+2c_{12}q_1q_2+c_{22}q_2^2\right), \qquad (2)$$

u kojima su koeficijenti inercije $a_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\left(\frac{\partial\vec r_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j}\right)_0$, kao i koeficijenti krutosti $c_{ij}=\left(\frac{\partial^2E_p}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0$ konstantne veličine $\left((*)_0=(*)_{q_1=0,\,q_2=0}\right)$.

Kako je pri brzinama različitim od nule kinetička energija sistema pozitivna, to kvadratna forma generalisanih brzina (1) zadovoljava uslovi Silvestrovog kriterijuma:

$$a_{11}>0,\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0. \qquad (3)$$

Takođe, u položaju stabilne ravnoteže kvadratna forma generalisanih koordinata (2), u <u>tipičnim</u> slučajevima, je pozitivno definitna pa zadovoljava Silvestrov kriterijum

$$c_{11}>0,\quad c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0. \qquad (4)$$

N. Koeficijenti inercije i krutosti su simetrični, tj. $a_{ij}=a_{ji}$, $c_{ij}=c_{ji}$; $i,j=1,2$.

Diferencijalne jednačine kretanja formiramo pomoću Lagra-
vih jednačina II vrste

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=0,\ i=1,2,$$

što daje

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0\\ a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=0\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Jednačine (5) predstavljaju diferencijalne jednačine malih oscilacija konzervativnog sistema oko položaja stabilne ravnoteže (slobodnih neprigušenih oscilacija). One su sistem od dvije linearne homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima, spregnute, u opštem slučaju kako po generalisanim koordinatama q_i, tako i po generalisanim ubrzanjima $\ddot{q}_i$, $i=1,2$.

Specijalno ako je $a_{12}=a_{21}=0$ i $c_{12}=c_{21}=0$, one su raspregnute, tj. svode se na dva podsistema sa po jednim stepenom slobode

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1+c_{11}q_1=0\\ a_{22}\ddot{q}_2+c_{22}q_2=0\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Dif. jednačine (5) mogu se zapisati u matričnom obliku

$$[A]\{\ddot{q}\}+[C]\{q\}=\{0\}\qquad(5')$$

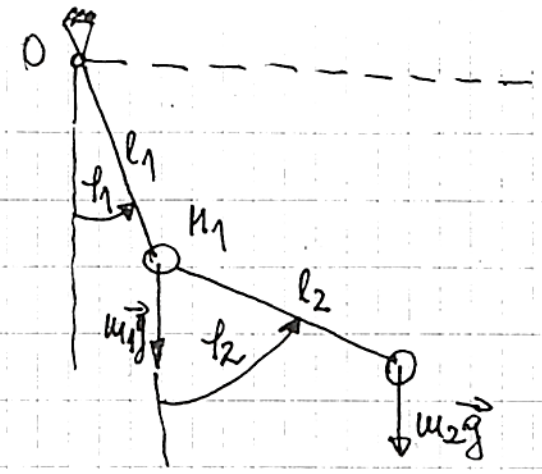
gdje su:

$$[A]=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$ - matrica inercije

$$[C]=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$$ - matrica krutosti

$$\{q\}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix},\ \{\ddot{q}\}=\begin{pmatrix}\ddot{q}_1\\\ddot{q}_2\end{pmatrix}$$ - matrice kolone (vektori) generalisanih koordinata i ubrzanja.

Primjer 1. Dvojno matematičko klatno masa m_1 i m_2 i dužina l_1 i l_2. Napisati dif. jed. malih oscilacija oko donjeg ravnotežnog položaja.



φ_1, φ_2 – gen. koord.

$$E_p = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = (m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1 \,; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = m_2 g l_2 \sin\varphi_2$$

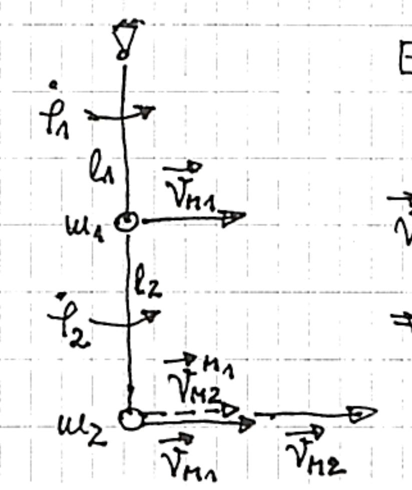
$$\underbrace{\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0 \text{ – ravnotežni položaj}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2}\right)_0 = 0$$

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_1^2}\right)_0 = (m_1+m_2) g l_1 \,; \quad c_{12} = c_{21} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1}\right)_0 = 0 \,; \quad c_{22} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_2^2}\right)_0 = m_2 g l_2$$

Aproksimativni izraz za kinetičku energiju (1) iz kojeg nalazimo koeficijente inercije, direktno dobijamo kada odredimo E_k pri prolasku sistema kroz ravnotežni položaj.



$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_{M_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{M_2}^2$$

$$v_{M_1} = l_1 \dot\varphi_1 \,; \quad \vec{v}_{M_2} = \vec{v}_{M_1} + \vec{v}_{M_2}^{M_1}\,, \quad v_{M_2}^{M_1} = l_2 \dot\varphi_2$$

$$\vec{v}_{M_2}^{M_1} \parallel \vec{v}_{M_1} \Rightarrow v_{M_2} = l_1 \dot\varphi_1 + l_2 \dot\varphi_2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}\left((m_1+m_2) l_1^2 \dot\varphi_1^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 + m_2 l_2^2 \dot\varphi_2^2\right)$$

$$\Rightarrow a_{11} = (m_1+m_2) l_1^2 \,; \quad a_{12} = a_{21} = m_2 l_1 l_2 \,; \quad a_{22} = m_2 l_2^2$$

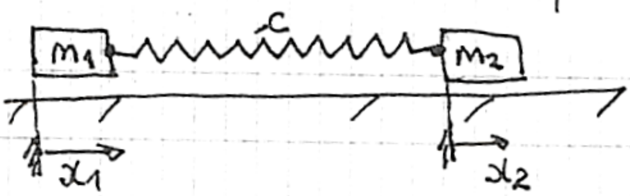
$$(5) \Longrightarrow \left.\begin{aligned} &(m_1+m_2) l_1^2 \ddot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\varphi_2 + (m_1+m_2) g l_1 \varphi_1 = 0 \\ &m_2 l_1 l_2 \ddot\varphi_1 + m_2 l_2^2 \ddot\varphi_2 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

odnosno, u matričnom obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (m_1+m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}}_{\substack{[A] \\ \text{matrica inercije}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot\varphi_1 \\ \ddot\varphi_2 \end{pmatrix}}_{\{\ddot\varphi\}} + \underbrace{\begin{pmatrix} (m_1+m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix}}_{\substack{[C] \\ \text{matrica krutosti}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}}_{\{\varphi\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\{0\}} \quad (7$$

1.2. Linijski lančani i torzioni sistemi sa dva stepena slobode

a) slobodni lanac:



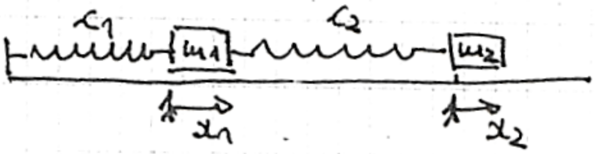
$$E_k=\frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2\right);\quad E_p=\frac{1}{2}c\left(x_2-x_1\right)^2=\frac{1}{2}\left(cx_1^2-2cx_1x_2+cx_2^2\right)$$

$\rightarrow a_{11}=m_1,\ a_{12}=0,\ a_{22}=m_2;\ c_{11}=c,\ c_{12}=-c;\ c_{22}=c$

Dif. jed. slobodnih oscilacija:

$$m_1\ddot{x}_1+cx_1-cx_2=0$$
$$m_2\ddot{x}_2-cx_1+cx_2=0$$

b) jednostrano vezani lanac:



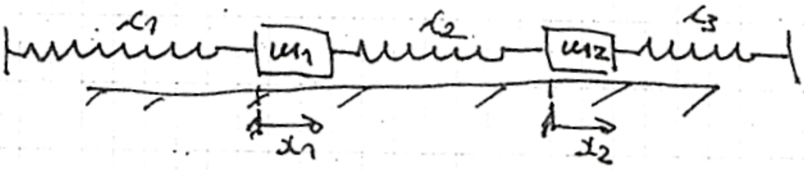
$$E_k=\frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2\right)$$

$$E_p=\frac{1}{2}c_1x_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(x_2-x_1\right)^2=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{(c_1+c_2)}_{c_{11}}x_1^2\underbrace{-2c_2}_{2c_{12}}x_1x_2+\underbrace{c_2}_{c_{22}}x_2^2\Big).$$

Dif. jed.:

$$m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)x_1-c_2x_2=0.$$
$$m_2\ddot{x}_2-c_2x_1+c_2x_2=0$$

c) obostrano vezani lanac:



$$E_k=\frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2\right)$$

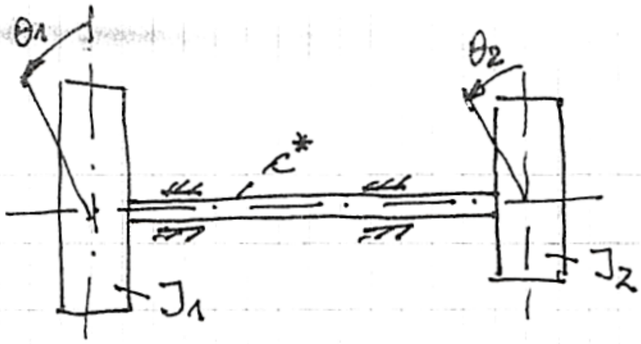
$$E_p=\frac{1}{2}c_1x_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(x_2-x_1\right)^2+\frac{1}{2}c_3x_2^2=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{(c_1+c_2)}_{c_{11}}x_1^2\underbrace{-2c_2}_{2c_{12}}x_1x_2+\underbrace{(c_2+c_3)}_{c_{22}}x_2^2\Big]$$

Dif. jed.:

$$m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)x_1-c_2x_2=0$$
$$m_2\ddot{x}_2-c_2x_1+(c_2+c_3)x_2=0$$

Analogno se formiraju dif. jednačine slobodnih oscilacija torzionih sistema koje čine dva masivna diska, momenata inercije za obrtnu osu J_1 i J_2, a koji su nasađeni na elastično vratilo čija je masa zanemarljiva, a njihova elastična svojstva su izražena krutostima c_i^* pri uvijanju.

a)



$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\theta}_1^2 + J_2\dot{\theta}_2^2\right)$$

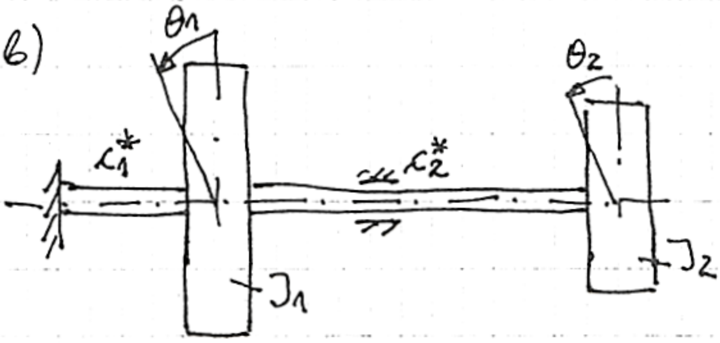
$$E_p = \frac{1}{2}c^*(\theta_2 - \theta_1)^2$$

Dif. jed.:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + c^*\theta_1 - c^*\theta_2 = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - c^*\theta_1 + c^*\theta_2 = 0$$

b)



$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\theta}_1^2 + J_2\dot{\theta}_2^2\right)$$

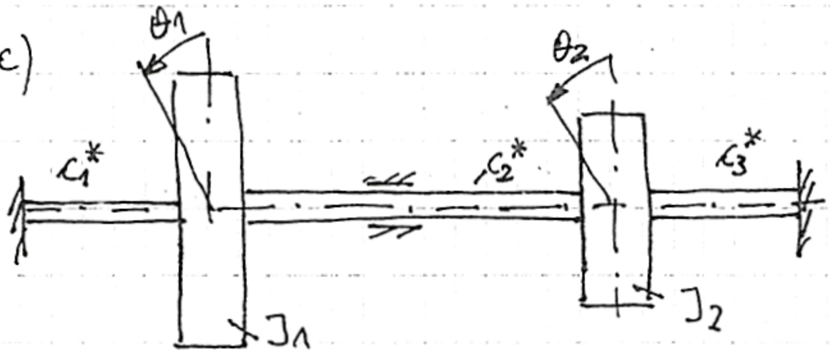
$$E_p = \frac{1}{2}c_1^*\theta_1^2 + \frac{1}{2}c_2^*(\theta_2 - \theta_1)^2$$

Dif. jed.:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (c_1^* + c_2^*)\theta_1 - c_2^*\theta_2 = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - c_2^*\theta_1 + c_2^*\theta_2 = 0$$

c)



$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\theta}_1^2 + J_2\dot{\theta}_2^2\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2}c_1^*\theta_1^2 + \frac{1}{2}c_2^*(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}c_3^*\theta_2^2$$

Dif. jed.:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (c_1^* + c_2^*)\theta_1 - c_2^*\theta_2 = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - c_2^*\theta_1 + (c_2^* + c_3^*)\theta_2 = 0$$

1.3. Integracija diferencijalnih jednačina kretanja. Frekventna jednačina. Glavne oscilacije.

Partikularna rješenja sistema diferencijalnih jednačina (5) traže se u obliku

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \; q_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha), \qquad (8)$$

gdje su A_1, A_2, ω i α nepoznate konstante. Diferenciranjem funkcija (8) po vremenu t dva puta imamo

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \alpha), \; \ddot{q}_2 = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \alpha). \qquad (9)$$

Pošto (8) i (9) uvrstimo u polazne jednačine (5) dobijamo

$$\left.\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}\omega^2)A_1 + (c_{12} - a_{12}\omega^2)A_2 = 0 \\ (c_{21} - a_{21}\omega^2)A_1 + (c_{22} - a_{22}\omega^2)A_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

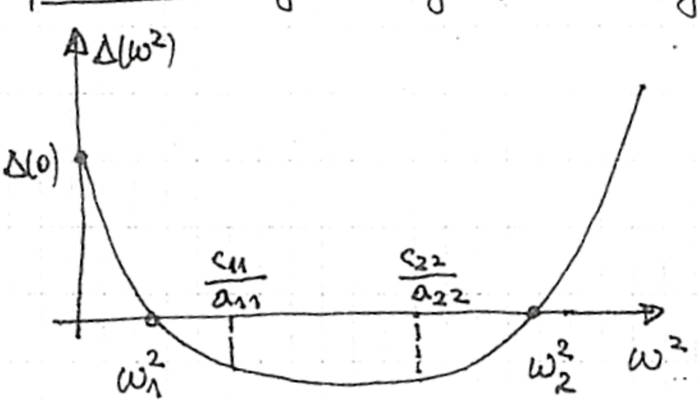
Da bi ovaj sistem linearnih homogenih algebarskih jednačina po A_1 i A_2 imao netrivijalno (različito od nule) rješenje mora determinanta koeficijenata uz A_1 i A_2 biti jednaka nuli:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (11)$$

tj. u razvijenom obliku,

$$\Delta(\omega^2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})\omega^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0 \quad (12)$$

Jednačina (11), odnosno (12), zove se <u>frekventna</u> (vjekovna) jednačina. Ona je bikvadratna i ima dva korijena ω_1^2 i ω_2^2. Ovi korijeni su <u>realni pozitivni</u> brojevi (v. grafik funkcije $\Delta(\omega^2)$)



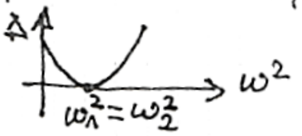
$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \overset{(4)}{>} 0$

$\lim\limits_{\omega^2 \to \infty} \Delta(\omega^2) = \infty$ jer je $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \overset{(3}{>}$

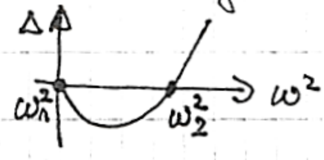
$\Delta\left(\dfrac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\dfrac{(a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12})^2}{a_{11}^2} \leq 0$

$\Delta\left(\dfrac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\dfrac{(a_{22}c_{12} - c_{22}a_{12})^2}{a_{22}^2} \leq$

N1. Ako su $a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12} = 0$ i $a_{22}c_{12} - c_{22}a_{12} = 0$, tada je $\omega_1^2 = c_{11}/a_{11} = c_{22}/a_{22}$, tj. korijeni frekventne jednačine su jednaki.



N2. Dopustimo da je $c_{11}c_{22}-c_{12}^2=0$, tj. da je potencijalna energija (2) pozitivno semidefinitna kvadratna forma generalisanih koordinata ($E_p \geq 0$). Tada je $\Delta(0)=0$, tj. $\omega_1^2=0$



Veličine $\omega_1=\sqrt{\omega_1^2}$ i $\omega_2=\sqrt{\omega_2^2}$ su kružne frekvencije sistema. One su fizičke konstante za dati sistem (zavise samo od fizičkih parametara sistema) i često se zovu sopstvene frekvencije. Manja kružna frekvencija ω_1 zove se osnovna frekvencija.

Frekvencijama ω_1 i ω_2 odgovaraće po jedno partikularno rješenje oblika (8) pri čemu svakoj od frekvencija odgovaraju svoje vrijednosti konstanti A_1, A_2 i α:

I parcijalno rješenje

$$q_1^{(1)}=A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1), \qquad q_2^{(1)}=A_2^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)$$

II parcijalno rješenje

$$q_1^{(2)}=A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2), \qquad q_2^{(2)}=A_2^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

Iz bilo koje jednačine sistema (10), recimo prve, određujemo odnos konstanti (amplituda) $A_2^{(j)}$ i $A_1^{(j)}$, $(j=1,2)$

$$\left.\begin{aligned} \eta_{21}^{(1)}&=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=-\frac{c_{11}-a_{11}\omega_1^2}{c_{12}-a_{12}\omega_1^2},\\ \eta_{21}^{(2)}&=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=-\frac{c_{11}-a_{11}\omega_2^2}{c_{12}-a_{12}\omega_2^2}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

pa je

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(1)}&=A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)\\ q_2^{(1)}&=\eta_{21}^{(1)}A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

i

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(2)}&=A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\\ q_2^{(2)}&=\eta_{21}^{(2)}A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

gdje su $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \alpha_1$ i α_2 proizvoljne konstante.

Partikularna rješenja (14) i (15) zovu se prva i druga glavna oscilacija sistema (glavni oblici oscilacija ili modovi), a koeficijenti $\eta_{21}^{(j)}$ $(j=1,2)$, koji su fizičke konstante za sistem, zovu se koeficijenti glavnih oblika oscilacija (modalni koeficijenti). Ovi koeficijenti pokazuju koliko je puta amplituda, odgovarajuće glavne oscilacije, druge koordinate veća od amplitude prve koordinate za istu glavnu oscilaciju.

Prema tome, ako sistem vrši jednu od glavnih oscilacija obje koordinate se mijenjaju po harmonijskim zakonima sa istom kružnom frekvencijom i istim fazama oscilovanja, a koordinate se nalaze u konstantnom odnosu ($q_2^{(i)}/q_1^{(i)} = A_2^{(i)}/A_1^{(i)} = \eta_{21}^{(i)}$). Ovo znači da obje koordinate osciluju sinhrono, tj. jednovremeno su jednake nuli i istovremeno dostižu ekstremne vrijednosti.

Opšte rješenje polaznih diferencijalnih jednačina (5) dobija se zbirom partikularnih rješenja (14) i (15) (superpozicijom glavnih oscilacija):

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \eta_{21}^{(1)} A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \eta_{21}^{(2)} A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Opšte rješenje (16) sadrži četiri proizvoljne konstante: $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, α_1 i α_2, koje kada se odrede iz zadatih početnih uslova:

$$t_0 = 0,\ q_1(t_0) = q_{10},\ q_2(t_0) = q_{20},\ \dot{q}_1(t_0) = \dot{q}_{10},\ \dot{q}_2(t_0) = \dot{q}_{20} \qquad (17)$$

dovode do konačnih jednačina kretanja (oscilovanja) sistema.

Iz rješenja (16) slijedi da slobodne neprigušene oscilacije sistema sa dva stepena slobode predstavljaju rezultat slaganja dvije glavne oscilacije pri čemu su kružne frekvencije ω_1 i ω_2 u opštem slučaju nesrazmjerne pa kretanje nije periodično, ali je oscilatornog karaktera.

<u>Vektorsko-matrični zapis</u>

partikularno rješenje (8): $\{q\} = \{A\}\sin(\omega t + \alpha)$, $\{A\} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ — amplitudni vektor $\quad (8')$

sistem (10): $([C] - \omega^2[A])\{A\} = \{0\} \quad (10')$

frekventna jednačina: $\Delta(\omega^2) = \det([C] - \omega^2[A]) = 0 \quad (11')$

glavne oscilacije: $\{q^{(1)}\} = A_1^{(1)}\{K^{(1)}\}\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$ – prva gl. osc.

$\{q^{(2)}\} = A_1^{(2)}\{K^{(2)}\}\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$ – druga gl. osc.

gdje su $\{q^{(1)}\} = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \end{pmatrix}$, $\{q^{(2)}\} = \begin{pmatrix} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \end{pmatrix}$, a matrice kolone $\{K^{(1)}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{21}^{(1)} \end{pmatrix}$

i $\{K^{(2)}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{21}^{(2)} \end{pmatrix}$ su takozvani modalni vektori.

Modalni vektori $\{K^{(1)}\}$ i $\{K^{(2)}\}$ imaju svojstvo ortogonalnosti u odnosu na matrice inercije $[A]$ i krutosti $[C]$:

$$\{K^{(2)}\}^T [A] \{K^{(1)}\} = 0, \ \{K^{(2)}\}^T [C] \{K^{(1)}\} = 0 \quad ({}^T\text{- transponovanje}) \tag{16'}$$

Opšte rješenje (16): $\{q\} = \{q^{(1)}\} + \{q^{(2)}\} = A_1^{(1)} \{K^{(1)}\} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \{K^{(2)}\} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

što se može napisati u obliku

$$\{q\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_{21}^{(1)} & \eta_{21}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{pmatrix},$$

pri čemu se matrica

$$[K] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_{21}^{(1)} & \eta_{21}^{(2)} \end{pmatrix}$$

čije su kolone modalni vektori, zove modalna matrica sistema.

Primjer 2. Za dvojno matematičko klatno (primjer 1), uzimajući da je $l_1=l_2=l$, $m_1=3m$ i $m_2=m$ odrediti: a) kružne frekvencije i glavne oscilacije sistema; b) konačne jednačine oscilovanja za početne uslove: $t_0=0$, $\varphi_1(t_0)=\varphi_0$, $\varphi_2(t_0)=\varphi_0/2$, $\dot\varphi_1(t_0)=0$ i $\dot\varphi_2(t_0)=0$.

$$(7) \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4l\ddot\varphi_1 + l\ddot\varphi_2 + 4g\varphi_1 &= 0 \\ l\ddot\varphi_1 + l\ddot\varphi_2 + g\varphi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$\varphi_1 = A_1\sin(\omega t+\alpha),\ \varphi_2 = A_2\sin(\omega t+\alpha) \quad (b)$$

$$(b)\ u\ (a) \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4(g-l\omega^2)A_1 - l\omega^2 A_2 &= 0 \\ -l\omega^2 A_1 + (g-l\omega^2)A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 4(g-l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & (g-l\omega^2) \end{vmatrix} = 4(g-l\omega^2)^2 - (l\omega^2)^2 = 0 \quad (d)$$

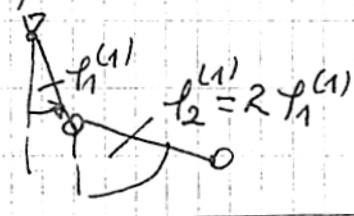
$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{l},\ \omega_2^2 = 2\frac{g}{l}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{3l}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$ – kružne frekvencije $[\omega_i]=s^{-1}$

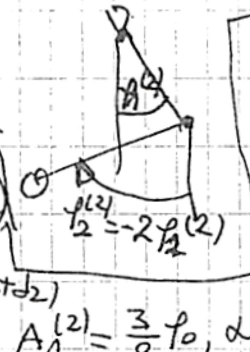
$$\eta_{21}(\omega^2) = \frac{A_2}{A_1} \overset{(c)_1}{=} \frac{4(g-l\omega^2)}{l\omega^2}$$

$$\eta_{21}^{(1)} = \eta_{21}(\omega^2=\omega_1^2) = 2,\quad \eta_{21}^{(2)} = \eta_{21}(\omega^2=\omega_2^2) = -2$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1) \\ \varphi_2^{(1)} &= 2A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1) \end{aligned}\right\} \text{I glavne oscilacije}$$



$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(2)} &= A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2) \\ \varphi_2^{(2)} &= -2A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2) \end{aligned}\right\} \text{II glavne oscilacije}$$



b) $\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} = A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1) + A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$

$\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = 2A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1) - 2A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$

Iz početnih uslova slijedi: $A_1^{(1)} = \frac{5}{8}\varphi_0$, $A_1^{(2)} = \frac{3}{8}\varphi_0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ pa je

$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{8}(5\cos\omega_1 t + 3\cos\omega_2 t)$; $\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{4}(5\cos\omega_1 t - 3\cos\omega_2 t)$ – konačne jednačine oscilovanja.

1.4. Glavne koordinate sistema

U opštem slučaju, za izabrane generalisane koordinate q_1 i q_2, kvadratne forme kinetičke energije (1) i potencijalne energije (2) sadrže proizvode generalisanih brzina ($a_{12} \neq 0$), odnosno generalisanih koordinata ($c_{12} \neq 0$), što dovodi do spregnutih diferencijalnih jednačina (5), kako po generalisanim ubrzanjima tako i po generalisanim koordinatama. Međutim, može se pokazati da linearna zamjena koordinata

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 + \xi_2 \\ q_2 &= \eta_{21}^{(1)} \xi_1 + \eta_{21}^{(2)} \xi_2 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

gdje su ξ_1, ξ_2 nove generalisane koordinate, a $\eta_{21}^{(1)}$ i $\eta_{21}^{(2)}$ koeficijenti glavnih oblika oscilacija (13), transformiše kinetičku energiju (1) i potencijalnu energiju (2) na oblike koji sadrže "čiste" ~~samo~~ kvadratne članove:

$$E_k = \frac{1}{2}\left(a_1 \dot{\xi}_1^2 + a_2 \dot{\xi}_2^2\right), \quad E_p = \frac{1}{2}\left(c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2\right)$$

pa diferencijalne jednačine kretanja imaju oblik

$$a_1 \ddot{\xi}_1 + c_1 \xi_1 = 0$$

$$a_2 \ddot{\xi}_2 + c_2 \xi_2 = 0 \;)$$

odnosno

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{c_1}{a_1} \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{c_2}{a_2} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

slobodnih neprigušenih oscilacija,

Svaka od ovih jednačina odgovara dif. jed. nekog sistema sa jednim stepenom slobode čija su rješenja

$$\xi_1 = A \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \xi_2 = B \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

gdje A, B, α_1, α_2 određujemo iz početnih uslova.

Prema tome, uvođenjem ~~glavnih~~ koordinata ξ_1 i ξ_2, a koje se zovu glavne koordinate sistema, sistem se "razbija" na dva podsistema, svaki sa po jednim stepenom slobode.

Primjer 3. Za dvojno matematičko klatno dato primjerom 2, odrediti E_k i E_p u glavnim koordinatama, kao i odgovarajuće diferencijalne jednačine oscilovanja.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \xi_1 + \xi_2 \\ \varphi_2 &= \ell_{21}^{(1)}\xi_1 + \ell_{21}^{(2)}\xi_2, \quad \ell_{21}^{(1)} = 2,\ \ell_{21}^{(2)} = -2 \end{aligned}\right\} (a)$$

$$(a) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot\varphi_1 &= \dot\xi_1 + \dot\xi_2 \\ \dot\varphi_2 &= 2\dot\xi_1 - 2\dot\xi_2 \end{aligned}\right\} (b)$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(4ml^2\dot\varphi_1^2 + 2ml^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + ml^2\dot\varphi_2^2\right), \text{ (v. primjer 1)}$$

$$\boxed{E_k \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}\left(12ml^2\dot\xi_1^2 + 4ml^2\dot\xi_2^2\right)}, \quad a_1 = 12ml^2, \ a_2 = 4ml^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left(c_{11}\varphi_1^2 + 2c_{12}\varphi_1\varphi_2 + c_{22}\varphi_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(4mgl\varphi_1^2 + mgl\varphi_2^2\right)$$

$$\boxed{E_p \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\left(8mgl\xi_1^2 + 8mgl\xi_2^2\right)} \quad c_1 = 8mgl, \ c_2 = 8mgl$$

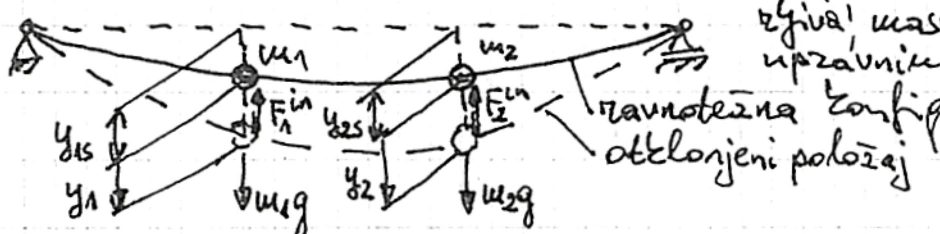
Dif. jed: $\ddot\xi_1 + \omega_1^2\xi_1 = 0, \quad \omega_1^2 = \dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{2g}{3l}$

$\ddot\xi_2 + \omega_2^2\xi_2 = 0, \quad \omega_2^2 = \dfrac{c_2}{a_2} = 2\dfrac{g}{l}$

1.5. Primjena uticajnih koeficijenata na formiranje diferencijalnih jednačina oscilacija koncentrisanih masa na elastičnim nosačima.

Posmatrajmo elastični nosač, npr. prostu gredu, na kome se nalaze dvije koncentrisane mase m_1 i m_2.

Pretpostavke: – masa nosača je zanemarljiva; mase osciluju u pravcima upravnim na osu grede nakon narušavanja ravnoteže.

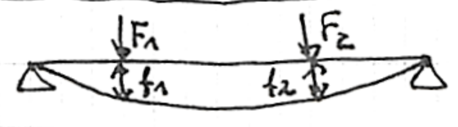


y_{1s}, y_{2s} – statički ugibi ispod masa m_1 i m_2

y_1, y_2 – ugibi ispod masa m_1 i m_2, mjereni u odnosu na položaj ravnoteže.

Na osnovu principa superpozicije deformacija u položaju ravnoteže nosača je

$$\left.\begin{aligned} y_{1s} &= \alpha_{11} m_1 g + \alpha_{12} m_2 g \\ y_{2s} &= \alpha_{21} m_1 g + \alpha_{22} m_2 g \end{aligned}\right\} (*)$$



$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 \\ f_2 &= \alpha_{21} F_1 + \alpha_{22} F_2 \end{aligned}\right\} (\#)$$

α_{ij} – Maksvelovi uticajni koeficijenti (ugib na mjestu "i" izazvan jediničnom silom na mjestu j) koji se određuju metodama otpornosti materijala. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

Uvodeći inercijalne sile koncentrisanih masa i stavljajući $f_1 = y_{1s} + y_1$, $f_2 = y_{2s} + y_2$, $F_1 = m_1 g - m_1 \ddot{y}_1$, $F_2 = m_2 g - m_2 \ddot{y}_2$, na osnovu (#), biće

$$y_{1s} + y_1 = \alpha_{11}(m_1 g - m_1 \ddot{y}_1) + \alpha_{12}(m_2 g - m_2 \ddot{y}_2)$$

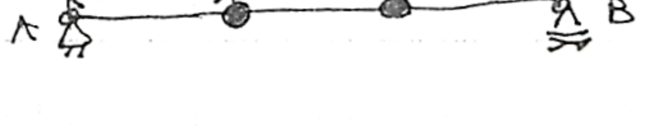
$$y_{2s} + y_2 = \alpha_{21}(m_1 g - m_1 \ddot{y}_1) + \alpha_{22}(m_2 g - m_2 \ddot{y}_2),$$

što se, imajući u vidu (*), svodi na jednačine

$$\left.\begin{aligned} y_1 + \alpha_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_{12} m_2 \ddot{y}_2 &= 0 \\ y_2 + \alpha_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_{22} m_2 \ddot{y}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} (**)$$

koje predstavljaju dif. jed. slobodnih oscilacija masa m_1 i m_2 na elastičnoj gredi.

Primjer. Odrediti kružne frekvencije i koeficijente glavnih oblika oscilacija masa $m_1 = m$ i $m_2 = m$ pričvršćenih na homogenoj prizmatičnoj prostoj gredi, dužine l, momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E, kao što je na slici prikazano.

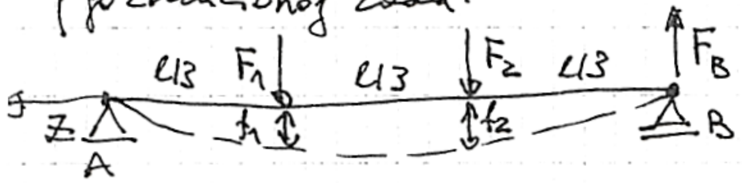


Dif. jed. su: $\alpha_{11} m \ddot{y}_1 + \alpha_{12} m \ddot{y}_2 + y_1 = 0$

$$\alpha_{21} m \ddot{y}_1 + \alpha_{22} m \ddot{y}_2 + y_2 = 0$$

Za ovaj primjer uticajni koeficijenti su: $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\dfrac{4l^3}{243EI}$, $\alpha_{12}=\dfrac{7l^3}{486EI}=\alpha_{21}$

Uticajni koeficijenti se mogu odrediti, recimo, primjenom metoda deformacionog rada.



Iz uslova ravnoteže $\Rightarrow F_B=\dfrac{F_1+2F_2}{3}$

$$A_d=\frac{1}{2EI}\int_0^l M_f^2(z)\,dz$$

$f_1=\dfrac{\partial A_d}{\partial F_1}$, $f_2=\dfrac{\partial A_d}{\partial F_2}$; $\alpha_{11}=f_1(F_1=1,F_2=0)$, $\alpha_{12}=f_1(F_1=0,F_2=1)=\alpha_{21}$, $\alpha_{22}=f_2(F_1=0,F_2=1)$

$$y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha),\quad y_2=A_2\sin(\omega t+\alpha)$$

$$\Rightarrow (1-\alpha_{11}m\omega^2)A_1-\alpha_{12}m\omega^2A_2=0$$

$$-\alpha_{21}m\omega^2A_1+(1-\alpha_{22}m\omega^2)A_2=0$$

$$\Delta(\omega^2)=\begin{vmatrix}1-\alpha_{11}m\omega^2 & -\alpha_{12}m\omega^2\\ -\alpha_{21}m\omega^2 & 1-\alpha_{22}m\omega^2\end{vmatrix}\xlongequal{\alpha_{22}=\alpha_{11},\ \alpha_{12}=\alpha_{21}} m^2(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2)\omega^4-2m\alpha_{11}\omega^2+1=0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2=\frac{1}{m(\alpha_{11}+\alpha_{12})}=\frac{486EI}{15ml^3},\quad \omega_2^2=\frac{1}{m(\alpha_{11}-\alpha_{12})}=486\frac{EI}{ml^3}$$

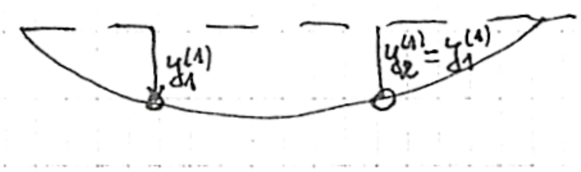
$$\eta_{21}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{1-\alpha_{11}m\omega^2}{\alpha_{12}m\omega^2}$$

$$\eta_{21}^{(1)}=\eta_{21}(\omega^2=\omega_1^2)=1;\quad \eta_{21}^{(2)}=\eta_{21}(\omega^2=\omega_2^2)=-1$$

I glavna oscilacija:

$y_1^{(1)}=A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1)$

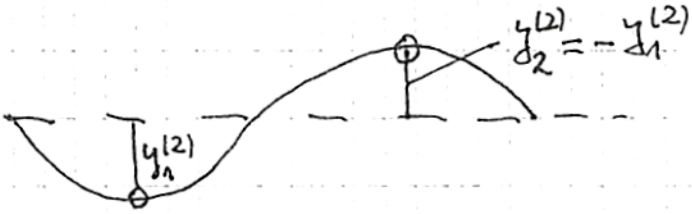
$y_2^{(1)}=1\cdot A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1)$



II glavna oscilacija:

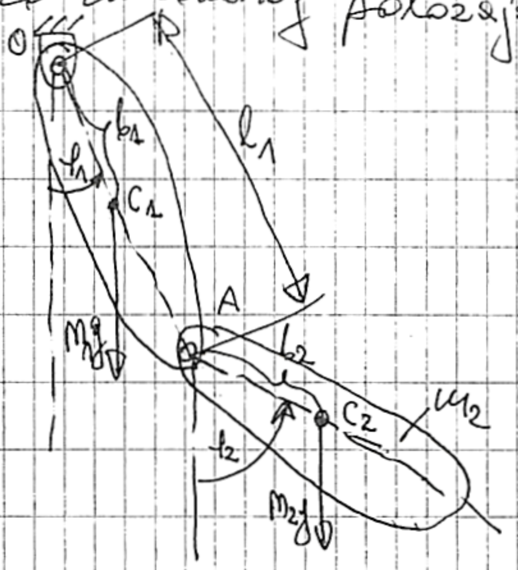
$y_1^{(2)}=A_1^{(2)}\sin(\omega_2t+\alpha_2)$

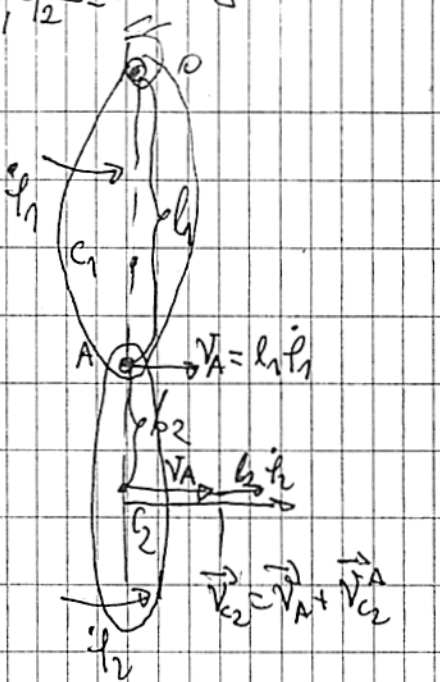
$y_2^{(2)}=-1\cdot A_1^{(2)}\sin(\omega_2t+\alpha_2)$



Slobodne neprigušene oscilacije: zadaci

Dvočlano fizičko klatno. Napisati diferencijalne jednačine malih oscilacija oko ravnotežnog položaja $\varphi_1=0,\ \varphi_2=0$.





$$E_k = \frac{1}{2} J_O^{(1)} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1\dot{\varphi}_1 + b_2\dot{\varphi}_2\right)^2 + \frac{1}{2} J_{C_2}^{(2)} \dot{\varphi}_2^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left[\left(J_O^{(1)} + m_2 l_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + 2 m_2 l_1 b_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \left(J_{C_2}^{(2)} + m_2 b_2^2\right)\dot{\varphi}_2^2\right]$$

$$a_{11} = J_O^{(1)} + m_2 l_1^2, \quad a_{12} = m_2 l_1 b_2, \quad a_{22} = J_{C_2}^{(2)} + m_2 b_2^2$$

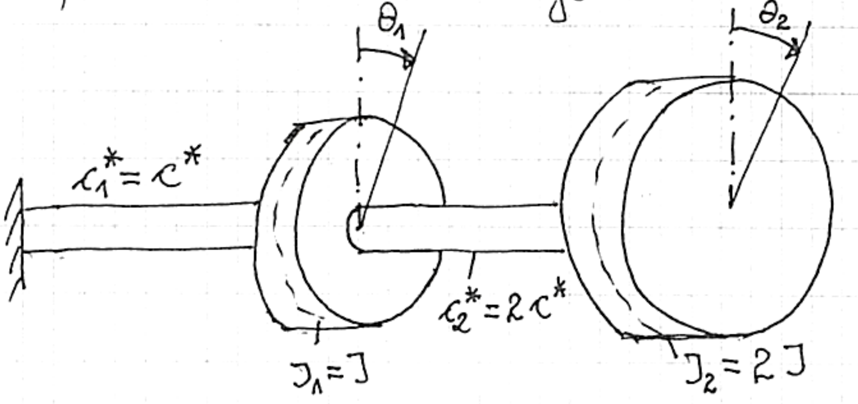
$$E_p = -m_1 g b_1 \cos\varphi_1 - m_2 g \left(l_1 \cos\varphi_1 + b_2 \cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = \left(m_1 g b_1 + m_2 g l_1\right)\sin\varphi_1, \quad c_{11} = \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_1^2}\right|_0 = \left(m_1 b_1 + m_2 l_1\right) g, \quad c_{12} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = m_2 g b_2 \sin\varphi_2, \quad c_{22} = \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_2^2}\right|_0 = m_2 g b_2$$

$$\begin{pmatrix} J_O^{(1)} + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 b_2 \\ m_2 l_1 b_2 & J_{C_2}^{(2)} + m_2 b_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(m_1 b_1 + m_2 l_1\right) g & 0 \\ 0 & m_2 g b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Za torzioni sistem prikazan na slici:
a) napisati diferencijalne jednačine malih oscilacija;
b) odrediti kružne frekvencije i modalne vektore sistema.



a)

$$E_k = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

$\rightarrow a_{11} = J_1 = J,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = J_2 = 2J$

$$E_p = \frac{1}{2} c_1^* \theta_1^2 + \frac{1}{2} c_2^* (\theta_2 - \theta_1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[3c^*\theta_1^2 - 4c^*\theta_1\theta_2 + 2c^*\theta_2^2\right]$$

$\rightarrow c_{11} = 3c^*,\ c_{12} = -2c^*,\ c_{22} = 2c^*$

Dif. jed.:

$$\left.\begin{array}{l} J\ddot{\theta}_1 + 3c^*\theta_1 - 2c^*\theta_2 = 0 \\ 2J\ddot{\theta}_2 - 2c^*\theta_1 + 2c^*\theta_2 = 0 \end{array}\right\}^{(1)} \Leftrightarrow J\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + c^*\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\theta_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha),\ \theta_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha)$

$$(1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} (3c^* - J\omega^2)A_1 - 2c^*A_2 = 0 \\ -2c^*A_1 \quad + (2c^* - 2J\omega^2)A_2 = 0 \end{array}\right\}(2);\quad \Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 3c^* - J\omega^2 & -2c^* \\ -2c^* & 2c^* - 2J\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\omega^2) = 0 \Leftrightarrow J^2\omega^4 - 4c^*J\omega^2 + c^{*2} = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = (2 \mp \sqrt{3})\frac{c^*}{J}$$

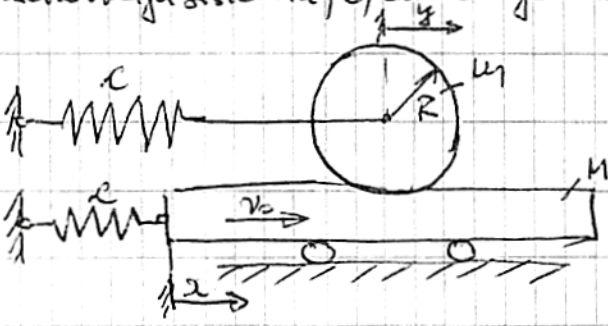
$$\Rightarrow \omega_1 = 0{,}5176\sqrt{\frac{c^*}{J}},\quad \omega_2 = 1{,}9319\sqrt{\frac{c^*}{J}}$$

$$\eta_{21} = \frac{A_2}{A_1} \overset{(2)_1}{=} \frac{3c^* - J\omega^2}{2c^*};\quad \eta_{21}^{(1)} = \eta_{21}(\omega_1^2) = 1{,}3661;\quad \eta_{21}^{(2)} = \eta_{21}(\omega_2^2) = -0{,}3661$$

modalni vektori: $\{K^{(1)}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{21}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}3661 \end{pmatrix},\ \{K^{(2)}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{21}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}3661 \end{pmatrix}$

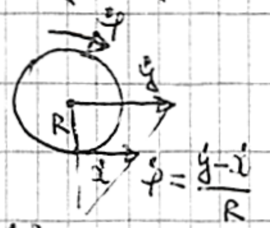
— Slobodne neprigušene oscilacije sa dva stepena slobode —

1. Na horizontalnoj platformi mase $M=m$ nalazi se cilindar, poluprečnika osnove R i mase m, koji se može kotrljati bez klizanja po platformi. Cilindar i platforma su vezani oprugama jednakih krutosti c za vertikalni zid. Ako se u položaju ravnoteže sistema platformi saopšti početna brzina v_0 nastaje oscilatorno kretanje. Odrediti: a) diferencijalne jednačine oscilovanja sistema; b) konačne jednačine oscilovanja.



$q_1=x,\ q_2=y$

$E_p=\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}cy^2$



$E_k=\frac{1}{2}M\dot x^2+\frac{1}{2}m\dot y^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2$

$E_k=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}m\dot x^2-m\dot x\dot y+\frac{3}{2}m\dot y^2\right]$

a) Dif. jed.:
$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{2}m\ddot x-\frac{1}{2}m\ddot y+cx&=0\\ -\frac{1}{2}m\ddot x+\frac{3}{2}m\ddot y+cy&=0\end{aligned}\right\}(1)$$

b)
$$x=A_1\sin(\omega t+\alpha),\quad y=A_2\sin(\omega t+\alpha)$$

$$(1)\rightarrow\left.\begin{aligned}(c-\tfrac{3}{2}m\omega^2)A_1-\tfrac{1}{2}m\omega^2A_2&=0\\ -\tfrac{1}{2}m\omega^2A_1+(c-\tfrac{3}{2}m\omega^2)A_2&=0\end{aligned}\right\}(2)\rightarrow\Delta(\omega^2)=(c-\tfrac{3}{2}m\omega^2)^2-\tfrac{1}{4}(m\omega^2)^2=0$$

$$\rightarrow\ \omega_1^2=\frac{c}{2m},\quad\omega_2^2=\frac{c}{m}$$

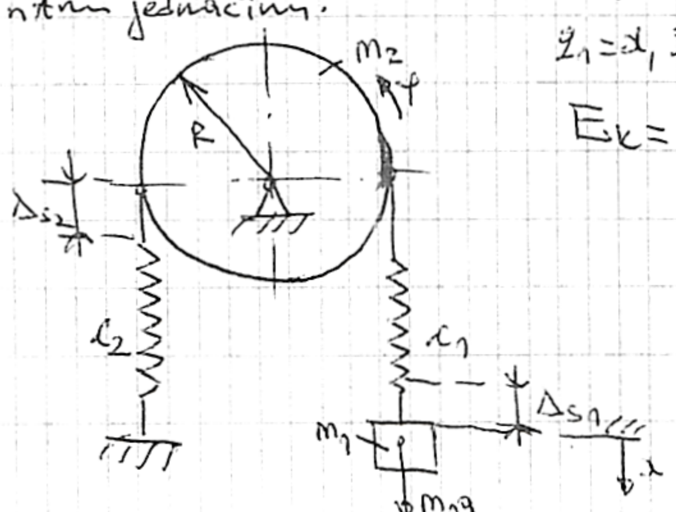
$$\eta_{21}^{(1)}=\frac{2c-3m\omega_1^2}{m\omega_1^2}=1,\quad\eta_{21}^{(2)}=\frac{2c-3m\omega_2^2}{m\omega_2^2}=-1$$

$$x=A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_2t+\alpha_2)$$
$$y=A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1)-A_1^{(2)}\sin(\omega_2t+\alpha_2)$$

$t_0=0:\ x(t_0)=0,\ y(t_0)=0,\ \dot x(t_0)=v_0,\ \dot y(t_0)=v_0\ \longrightarrow A_1^{(1)}=\frac{v_0}{\omega_1},\ A_1^{(2)}=0,\ \alpha_1=\alpha_2=0$

$$\Rightarrow x=v_0\sqrt{\frac{2m}{c}}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{2m}}t\right),\quad y=v_0\sqrt{\frac{2m}{c}}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{2m}}t\right)$$

2. Za sistem prikazan na slici, koji osciluje u vertikalnoj ravni, odrediti frekventnu jednačinu.

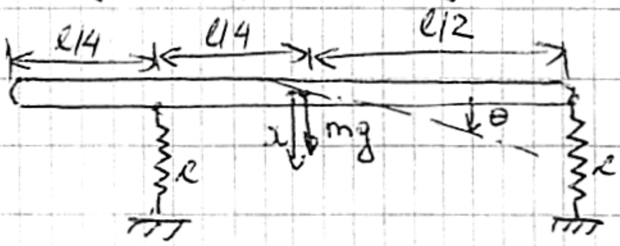


$q_1=x,\ q_2=\varphi;\quad E_p=-m_1gx+\frac{1}{2}c_1(x+R\varphi+\Delta s_1)^2+\frac{1}{2}c_2(R\varphi-\Delta s_2)^2$

$E_k=\frac{1}{2}m_1\dot x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2R^2\dot\varphi^2$

$$\Delta(\omega^2)=\begin{vmatrix}c_1-m_1\omega^2 & c_1R\\ c_1R & (c_1+c_2)R^2-\frac{m_2R^2}{2}\omega^2\end{vmatrix}=0$$

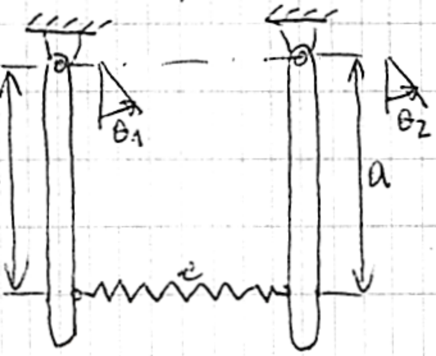
3. Napisati diferencijalne jednačine malih oscilacija homogenog štapa mase m oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici, uzimajući x i θ za generalisane koordinate.



$$R: \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c & \frac{cl}{4} \\ \frac{cl}{4} & \frac{5}{16}cl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I = ml^2/12$$

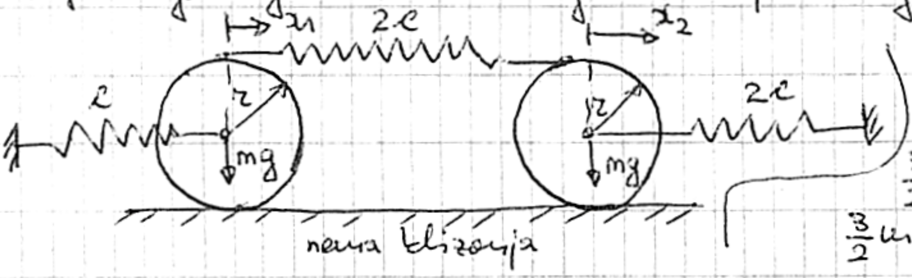
4. Napisati diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema koji čine dva identična homogena štapa, mase m i dužine l, koji se mogu obrtati oko nepokretnih horizontalnih osa, a međusobno su spojeni oprugom krutosti c.



$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_1 + \left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right)\theta_1 - ca^2\theta_2 = 0$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_2 - ca^2\theta_1 + \left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right)\theta_2 = 0$$

5. Napisati diferencijalne jednačine oscilovanja sistema prikazanog na slici.



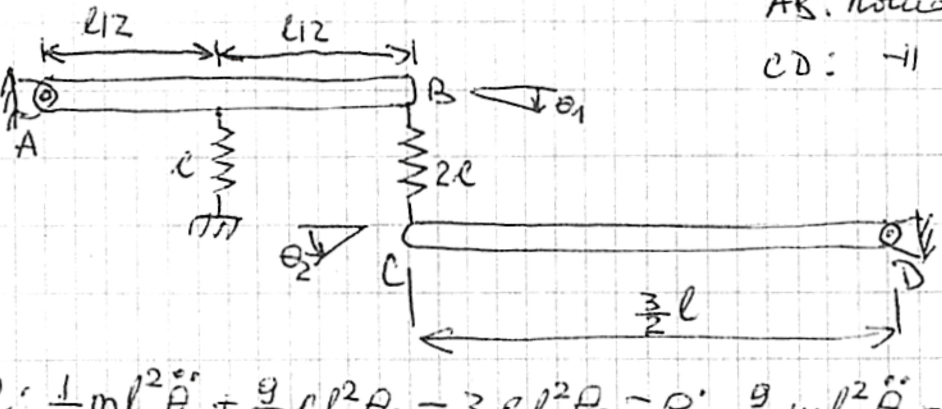
$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + 9cx_1 - 8cx_2 = 0$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 - 8cx_1 + 10cx_2 = 0$$

6. Napisati diferencijalne jednačine oscilovanja u vertikalnoj ravni sistema prikazanog na slici.

AB: homogeni štap mase m

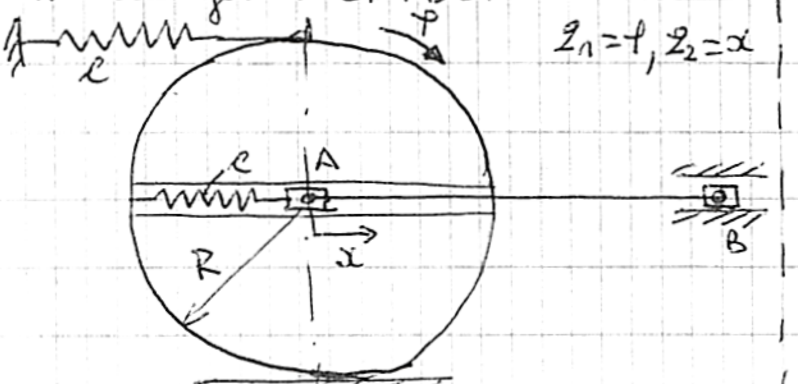
CD: — || — — || — — || — 3m/2

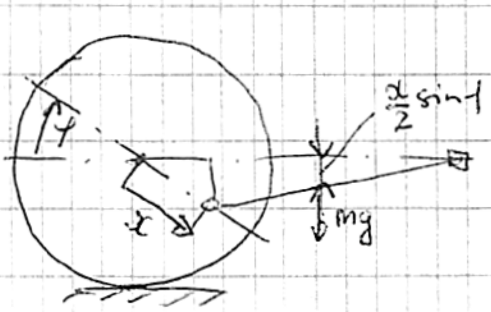


$$R: \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_1 + \frac{9}{4}cl^2\theta_1 - 3cl^2\theta_2 = 0; \quad \frac{9}{8}ml^2\ddot{\theta}_2 - 3cl^2\theta_1 + \frac{9}{2}cl^2\theta_2 = 0$$

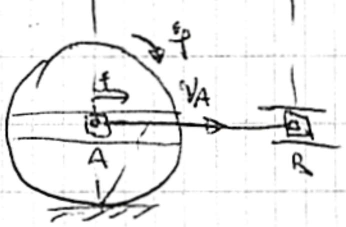
7. Kružni cilindar, mase 2m i poluprečnika R, može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi. U cilindru je urezan pravi žlijeb u kome može da se pomjera klizač A, zanemarljive mase, zglobno vezan za jedan kraj štapa AB mase m i dužine 2R. Drugi kraj štapa zglobno je vezan za klizač B, zanemarljive mase, koji može da se kreće u horizontalnim vođicama. Klizač A vezan je za cilindar oprugom krutosti $c=mg/(2R)$, a cilindar za nepomičnu ravan oprugom iste krutosti. Odrediti potencijalnu i kinetičku energiju sistema u glavnim koordinatama. Zanemariti uticaj žlijeba na homogenost cilindra.

$q_1=\varphi,\ q_2=x$





$$E_p=\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}c(2R\varphi)^2-mg\frac{x}{2}\sin\varphi \xrightarrow{c=mg/2R} c_{11}=\left(\frac{\partial^2E_p}{\partial\varphi^2}\right)_0=2mgR,\ c_{12}=-\frac{mg}{2},\ c_{22}=\frac{mg}{2R}$$



N; ~~AB~~ $\omega_{AB}=0,\ v_A=R\dot\varphi+\dot x$

$$E_k=\frac{1}{2}2m(R\dot\varphi)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m(R\dot\varphi+\dot x)^2$$

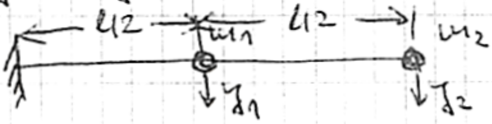
$$E_k=\frac{1}{2}\left[4mR^2\dot\varphi^2+2mR\dot\varphi\dot x+m\dot x^2\right]\rightarrow a_{11}=4mR^2,\ a_{12}=mR,\ a_{22}=m$$

Dif. jed.:
$$4mR^2\ddot\varphi+mR\ddot x+2mgR\varphi-mgx=0$$
$$mR\ddot\varphi+m\ddot x-mg\varphi+\frac{mg}{2R}x=0$$
$$\Delta(\omega^2)=0\rightarrow\omega_1^2=\frac{g}{6R},\ \omega_2^2=\frac{3g}{2R}$$

$$\rightarrow \ell_{21}^{(1)}=2R,\ \ell_{21}^{(2)}=-2R$$
$$\varphi=\xi_1+\xi_2$$
$$x=2R\xi_1-2R\xi_2$$

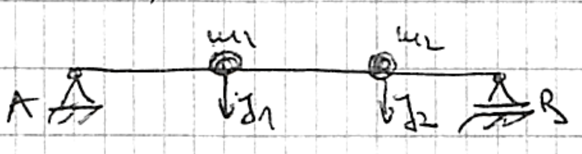
$$\Rightarrow \cancel{E_k=6mR^2(\dot\xi_1^2+\dot\xi_2^2)};\ E_p=mgR(\xi_1^2+3\xi_2^2)$$
$$E_k=6mR^2\dot\xi_1^2+2mR^2\dot\xi_2^2$$

8. Na sredini i na slobodnom kraju prizmatične konzole, zanemarljive mase, dužine l, krutosti na savijanje EI_x, učvršćene su dvije koncentrisane mase m_1 i m_2. Napisati diferencijalne jednačine transferzalnih oscilacija.

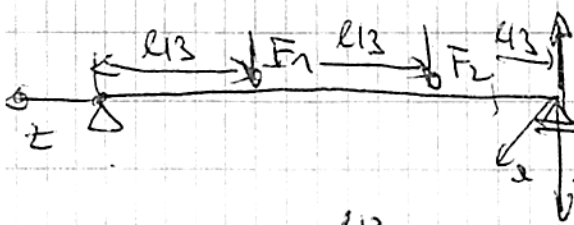


$$l:\ \frac{l^3}{48EI_x}(2m_1\ddot y_1+5m_2\ddot y_2)+y_1=0$$
$$\frac{l^3}{48EI_x}(5m_1\ddot y_1+16m_2\ddot y_2)+y_2=0$$

Mašina mase $m_1 = 500\,kg$ smještena je na 2 m od lijevog oslonca proste grede, dužine 6 m, dok je mašina mase $m_2 = 375\,kg$ smještena na 4 m od lijevog oslonca. Zanemarujući inerciju grede, odredi sopstvene frekvencije i koeficijente raspoređa glavnih oblika oscilovanja sistema ako je $E = 200 \times 10^9\,N/m^2$ i $I_x = 2{,}35 \times 10^{-6}\,m^4$.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_{12} m_2 \ddot{y}_2 + y_1 = 0 \\ \alpha_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_{22} m_2 \ddot{y}_2 + y_2 = 0 \end{array}\right\} (1)$$



$$F_B = \frac{F_1 + 2F_2}{3}$$

$$A_d = \frac{1}{2EI_x}\int_0^l M_g^2(z)\,dz$$

$$A_d = \frac{1}{2EI_x}\left[\int_0^{l/3}\left(\frac{F_1+2F_2}{3}z\right)^2 dz + \int_{l/3}^{2l/3}\left[\frac{F_1+2F_2}{3}z - F_2\left(z-\frac{l}{3}\right)\right]^2 dz + \int_{2l/3}^{l}\left[\frac{F_1+2F_2}{3}z - F_2\left(z-\frac{l}{3}\right) - F_1\left(z-\frac{2l}{3}\right)\right.\right.$$

$f_1 = \frac{\partial A_d}{\partial F_1}$, $f_2 = \frac{\partial A_d}{\partial F_2}$, $\alpha_{11} = f_1(F_1=1, F_2=0) = \frac{4l^3}{243EI_x}$, $\alpha_{12} = f_1(F_1=0, F_2=1)$

$\alpha_{12} = \frac{7l^3}{486EI_x}$, $\alpha_{22} = f_2(F_1=0, F_2=1) = \frac{4l^3}{243EI_x}$

$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 7{,}56 \times 10^{-6}\,m/N$; $\alpha_{12} = 6{,}62 \times 10^{-6}\,m/N$

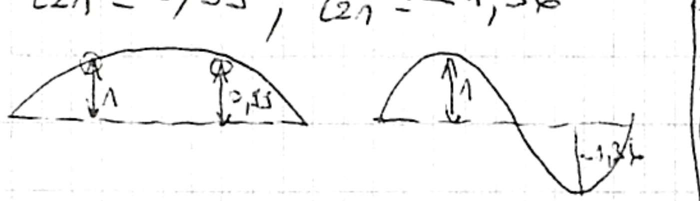
$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \delta)$, $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \delta)$

$$(1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} (1 - \alpha_{11} m_1 \omega^2) A_1 - \alpha_{12} m_2 \omega^2 A_2 = 0 \\ -\alpha_{21} m_1 \omega^2 A_1 + (1 - \alpha_{22} m_2 \omega^2) A_2 = 0 \end{array}\right\} (2)$$

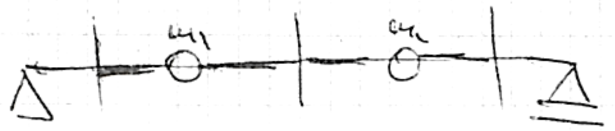
$$\Delta(\omega^2) = (\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2) m_1 m_2 \omega^4 - \alpha_{11}(m_1 + m_2)\omega^2 + 1 = 0$$

$\omega_1 = 12{,}69$; $\omega_2 = 43{,}86\,\frac{rad}{s}$; $\ell_{21}^{(j)} = \frac{1 - \alpha_{11} m_1 \omega_j^2}{\alpha_{12} m_2 \omega_j^2}$, $j = 1,2$

$\ell_{21}^{(1)} = 0{,}99$; $\ell_{21}^{(2)} = -1{,}36$



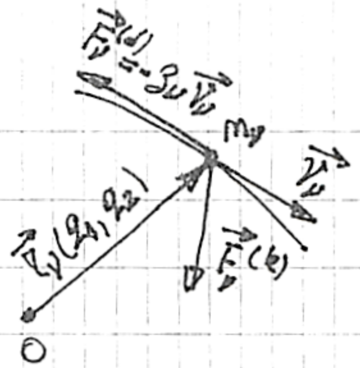
Greda iz prethodnog primjera napravljena je od materijala gustine $\varkappa = 7800\,kg/m^3$ a površina poprečnog presjeka je $S = 4{,}36 \times 10^{-3}\,m^2$. Odrediti kružne frekvencije sistema ako se inercija grede uprošćeno uzima dodavanjem masama odgovarajućih masa.



$m_g = \varkappa S L = 204\,kg$

$m_1^* = m_1 + \frac{1}{3}m_g = 568\,kg$, $m_2^* = m_2 + \frac{1}{3}m_g = 443\,kg$

$\omega_1 = 11{,}8\,\frac{rad}{s}$ $\qquad \omega_2 = 46{,}25\,\frac{rad}{s}$



2. Slobodne prigušene oscilacije

2.1 Diferencijalne jednačine kretanja

Pretpostavimo da na konzervativni sistem, koji vrši male oscilacije oko položaja stabilne ravnoteže, pored konzervativnih sila djeluju sile otpora viskoznog trenja ($\vec{F}_\nu^{(d)} = -\beta_\nu \vec{v}_\nu$, $\beta_\nu = const.$). Saglasno aproksimaciji kinetičke i potencijalne energije i disipativne funkcije, datoj u I dijelu, kretanje sistema je opisano Lagranžovim jednačinama II vrste:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2. \qquad (1)$$

E_k i E_p su određene izrazima (1.1) i (1.2), a

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(b_{11}\dot{q}_1^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2\right), \quad b_{ij} = b_{ji} = \sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\right)_0 . \qquad (2)$$

N. Aproksimativni izraz (2) dobija se tako što se odredi disipativna funkcija $\Phi(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ pri prolasku sistema kroz ravnotežni položaj.

U opštem slučaju kvadratna forma generalisanih brzina (2) je pozitivno semidefinitna ($\Phi \geq 0$), a u slučaju kada je ona pozitivno definitna ($\Phi = 0 \Leftrightarrow (\dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0, 0)$) kaže se da je prigušenje potpuno.

Kada (1.1), (1.2) i (2) uvrstimo u (1) dobijamo diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema u obliku

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0 \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

što možemo zapisati i u matričnom obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}}_{\{\ddot{q}\}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}}_{\{\dot{q}\}} + \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_{\{q\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\{0\}}, \qquad (3')$$

tj.

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{0\},$$

gdje $[B] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ matrica prigušenja

2.2 Karakteristična jednačina i opšte rješenje diferencijalnih jednačina prinudnih oscilovanja (3)

Saglasno teoriji linearnih diferencijalnih jednačina partikularna rješenja jednačina (3) tražimo u obliku

$$q_1 = D_1 e^{\lambda t}, \quad q_2 = D_2 e^{\lambda t}, \qquad (4)$$

gdje su D_1, D_2 i λ neki konstantni brojevi, koje treba odrediti. Zamjenom funkcija (4) i njihovih izvoda u jednačine (3), poslije skraćivanja eksponencijalne funkcije $e^{\lambda t}$, dobijamo sistem homogenih algebarskih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{11})D_1 + (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12})D_2 = 0, \\ (a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21})D_1 + (a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22})D_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Da bi ovaj sistem linearnih homogenih algebarskih jednačina po D_1 i D_2 imao netrivijalno rješenje, mora determinanta sistema biti jednaka nuli:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

odnosno, u razvijenom obliku

$$\Delta(\lambda) = A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0, \qquad (6')$$

gdje su: $A_0 = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, $A_1 = (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})$, $A_2 = (a_{11}c_{22} + b_{11}b_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12} - b_{12}^2)$, $A_3 = (b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11} - 2b_{12}c_{12})$, $A_4 = (c_{11}c_{22} - c_{12}^2)$.

Jednačina (6), odnosno (6'), zove se karakteristična jednačina sistema. Njena lijeva strana je polinom četvrtog stepena po λ, pa ona ima četiri rješenja (korijena): $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. U opštem slučaju svi korijeni su različiti i svakom od njih odgovara jedno rješenje dif. jed. (3) oblika (4), pa će se opšte rješenje diferencijalnih jednačina (3) dobiti sabiranjem partikularnih rješenja dobijenih za svaki korijen λ_i $(i=1,\ldots$ karakteristične jednačine:

$$\left.\begin{aligned} q_1 = \sum_{i=1}^{4} q_1^{(i)} = \sum_{i=1}^{4} D_1^{(i)} e^{\lambda_i t} \\ q_2 = \sum_{i=1}^{4} q_2^{(i)} = \sum_{i=1}^{4} D_2^{(i)} e^{\lambda_i t}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Iz algebarskih jednačina (5), za svaki korijen λ_i, određujemo konstantne odnose između veličina $D_2^{(i)}$ i $D_1^{(i)}$:

$$\frac{D_2^{(i)}}{D_1^{(i)}} = \frac{a_{11}\lambda_i^2 + b_{11}\lambda_i + c_{11}}{a_{12}\lambda_i^2 + b_{12}\lambda_i + c_{12}} = s_{21}^{(i)}, \quad i = 1,2,3,4$$

pa je konačno

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=1}^{4} D_1^{(i)} e^{\lambda_i t} = D_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + D_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + D_1^{(3)} e^{\lambda_3 t} + D_1^{(4)} e^{\lambda_4 t} \\ q_2 &= \sum_{i=1}^{4} s_{21}^{(i)} D_1^{(i)} e^{\lambda_i t} = s_{21}^{(1)} D_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + s_{21}^{(2)} D_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + s_{21}^{(3)} D_1^{(3)} e^{\lambda_3 t} + s_{21}^{(4)} D_1^{(4)} e^{\lambda_4 t} \end{aligned}\right\} (8)$$

opšte rješenje dif. jed. (3) u kome figurišu četiri integracione konstante $D_1^{(1)}, \ldots, D_1^{(4)}$. Konačne jednačine kretanja dobijamo iz (8) pošto se na osnovu početnih uslova odrede vrijednosti konstanti $D_1^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

2.3. Raut-Hurvicov kriterijum asimptotske stabilnosti

Algebarska jednačina četvrtog stepena

$$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0 \qquad (9)$$

sa realnim koeficijentima $A_0, \ldots, A_4$, može imati realne (negativne ili pozitivne), i/ili konjugovano kompleksne korijene bilo sa negativnim ili pozitivnim realnim djelovima.

Raut-Hurvicov kriterijum glasi: Da bi svi korijeni jednačine (9) imali negativne realne djelove potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni sledeći uslovi:

$$A_0 > 0, A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, A_4 > 0 \qquad (10)$$

i

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & A_4 & A_3 \end{vmatrix} > 0. \qquad (11)$$

Može se pokazati da u slučajevima kada je prigušenje u sistemu potpuno (Φ pozitivno definitna kvadratna forma) koeficijenti karakteristične jednačine (6') zadovoljavaju uslove (10) i (11) pa će u tom slučaju korijeni te jednačine biti realni negativni brojevi i/ili konjugovano kompleksni brojevi sa negativnim realnim djelovima.

Konjugovano kompleksnim korijenima sa negativnim realnim djelovima, recimo $\lambda_{1,2} = -n_1 \pm i p_1$, $i=\sqrt{-1}$, $n_1, p_1 > 0$, u opštem rješenju (8), odgovara komponenta

$$\begin{pmatrix} q_1^{(1)} + q_1^{(2)} \\ q_2^{(1)} + q_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + D_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} \\ D_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + D_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \dots = e^{-n_1 t} \begin{pmatrix} c_1 \cos pt + c_2 \sin pt \\ c_3 \cos pt + c_4 \sin pt \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gdje su $c_1, \dots, c_4$ – const.,

a realnom negativnom korijenu, recimo $\lambda_3 = -n_3$, $n_3 > 0$), odgovara komponenta

$$\begin{pmatrix} q_1^{(3)} \\ q_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^{(3)} \\ D_2^{(3)} \end{pmatrix} e^{-n_3 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dakle, kada su ispunjeni uslovi Raut-Hurvicovog kriterijuma ravnotežni položaj sistema je asimptotski stabilan.

Napomenimo da se mnogi procesi u tehnici u prvom približenju opisuju sistemom linearnih diferencijalnih jednačina, a ispitivanje asimptotske stabilnosti tih procesa se vrši često primjenom Raut-Hurvicovog kriterijuma.

2.4. Slobodne prigušene oscilacije u slučaju malog prigušenja

Ako pretpostavimo da je u razmatranom sistemu disipacija potpuna ($\Phi > 0$, tj. $b_{11} > 0$, $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 > 0$), onda, kao što smo već istakli, zadovoljeni su uslovi Raut-Hurvicovog kriterijuma, pa što se tiče prirode korijena karakteristične jednačine (6) mogući su sledeći slučajevi

a) $\left.\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -n_1 \pm i p_1, \\ \lambda_{3,4} &= -n_2 \pm i p_2, \quad n_1, n_2, p_1, p_2 \text{ – pozitivni brojevi} \end{aligned}\right\}$ – slučaj malog prigušenja (12)

b) $\lambda_1 = -n_1$, $\lambda_2 = -n_2$, $\lambda_3 = -n_3$, $\lambda_4 = -n_4$; $n_i > 0$ $(i=1,\dots,4)$ – slučaj velikog priguš.

c) $\left.\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -n_1 \pm i p_1; \quad n_1, p_1 > 0 \\ \lambda_3 &= -n_3, \quad \lambda_4 = -n_4; \quad n_3, n_4 > 0 \end{aligned}\right\}$ – mješoviti slučaj

Zadržimo se na slučaju malog prigušenja i transformišimo opšte rješenje dif. jed. kretanja (8) na pogodniji oblik. Kada uvrstimo (12) u (8) dobijamo:

$$q_1 = e^{-n_1 t}\left(D_1^{(1)} e^{i p_1 t} + D_1^{(2)} e^{-i p_1 t}\right) + e^{-n_2 t}\left(D_1^{(3)} e^{i p_2 t} + D_1^{(4)} e^{-i p_2 t}\right)$$

$$q_2 = e^{-n_1 t}\left(s_{21}^{(1)} D_1^{(1)} e^{i p_1 t} + s_{21}^{(2)} D_1^{(2)} e^{-i p_1 t}\right) + e^{-n_2 t}\left(s_{21}^{(3)} D_1^{(3)} e^{i p_2 t} + s_{21}^{(4)} D_1^{(4)} e^{-i p_2 t}\right),$$

što kada se iskoristi identitet $e^{\pm i p_j t} = \cos p_j t \pm i \sin p_j t$ i umjesto $D_1^{(j)}$ uvedu nove konstante C_j $(j=1,\dots,4)$ konačno dobijamo

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= e^{-n_1 t}(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + e^{-n_2 t}(C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t) \\ q_2 &= e^{-n_1 t}\left[(s_{21}^{(1)} C_1 - s_{21}^{(2)} C_2)\cos p_1 t + (s_{21}^{(2)} C_1 + s_{21}^{(1)} C_2)\sin p_1 t\right] \\ &\quad + e^{-n_2 t}\left[(s_{21}^{(3)} C_3 - s_{21}^{(4)} C_4)\cos p_2 t + (s_{21}^{(4)} C_3 + s_{21}^{(3)} C_4)\sin p_2 t\right] \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Pri određivanju kretanja konstante $C_1 \dots C_4$ treba naći iz početnih uslova.

Vidimo da je, u ovom slučaju, vremenska promjena svake koordinate određena superpozicijom dva kvaziperiodična oscilatorna kretanja pa će i rezultujuće kretanje biti oscilatorno.

2.5 Slučaj modalnog (proporcionalnog) prigušenja

Ako zamjenom

$$q_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad q_2 = l_{21}^{(1)} \xi_1 + l_{21}^{(2)} \xi_2$$

pređemo na glavne koordinate ξ_1 i ξ_2, onda se, kao što smo ranije vidjeli, kinetička i potencijalna energija transformišu na "zbir kvadrata"

$$E_k = \frac{1}{2}(a_1 \dot{\xi}_1^2 + a_2 \dot{\xi}_2^2), \quad E_p = \frac{1}{2}(c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2),$$

dok, u opštem slučaju, disipativna funkcija sadrži i mješoviti član:

$$\Phi = \frac{1}{2}(b_1 \dot{\xi}_1^2 + 2 b_0 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 + b_2 \dot{\xi}_2^2).$$

Ako je $b=0$ (nema proizvoda brzina $\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2$) kažemo da je prigušenje proporcionalno (modalno). To je, npr., uvijek slučaj kada je matrica prigušenja $[B]$ linearna kombinacija matrice inercije i krutosti, tj.

$$[B] = \alpha[A] + \beta[C], \quad \alpha, \beta - \text{const.}$$

U slučaju proporcionalnog prigušenja jednačine (1) postaju:

$$a_1\ddot{\xi}_1 + b_1\dot{\xi}_1 + c_1\xi_1 = 0,$$

$$a_2\ddot{\xi}_2 + b_2\dot{\xi}_2 + c_2\xi_2 = 0,$$

odnosno

$$\ddot{\xi}_1 + 2n_1\dot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = 0, \quad n_1 = \frac{b_1}{2a_1}, \quad \omega_1^2 = \frac{c_1}{a_1}$$

$$\ddot{\xi}_2 + 2n_2\dot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = 0, \quad n_2 = \frac{b_2}{2a_2}, \quad \omega_2^2 = \frac{c_2}{a_2}$$

tj. dobili smo raspregnut sistem diferencijalnih jednačina od kojih svaka ~~opisuje~~ odgovara dif. jednačini slobodnih prigušenih oscilacija sistema sa jednim stepenom slobode.

U slučaju malog prigušenja ($n_1 < \omega_1$, $n_2 < \omega_2$) kretanje je određeno zakonima

$$\xi_1 = A_1 e^{-n_1 t}\sin(p_1 t + \alpha_1), \quad p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - n_1^2}$$

$$\xi_2 = A_2 e^{-n_2 t}\sin(p_2 t + \alpha_2), \quad p_2 = \sqrt{\omega_2^2 - n_2^2}$$

pri čemu konstante $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ se određuju iz početnih uslova.

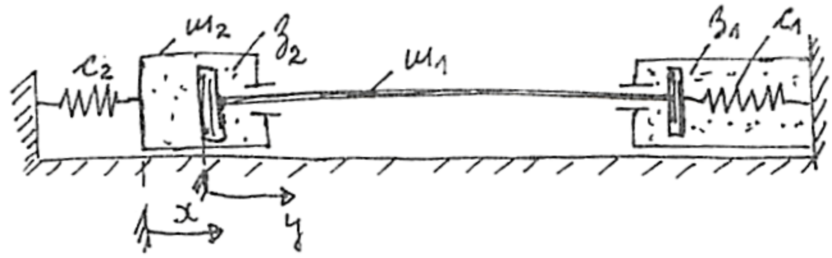
— Prigušene oscilacije —

1. Za sistem prikazan na slici, naći korijene karakteristične jednačine i na osnovu njih zaključiti koji uslov treba da zadovoljava krutost c da bi sistem vršio oscilatorno kretanje.

$m_1 = 9m$, $m_2 = m$

$\beta_1 = 8\beta$, $\beta_2 = \beta$

$c_1 = 9c$, $c_2 = c$



R: $q_1 = x$, $q_2 = y$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} 9m \dot{y}^2; \quad E_p = \frac{1}{2} c x^2 + \frac{1}{2} 9c y^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta (\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2} 8\beta \dot{y}^2$$

Dif. jed.:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + \beta\dot{x} - \beta\dot{y} + cx &= 0 \\ 9m\ddot{y} - \beta\dot{x} + 9\beta\dot{y} + 9cy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x = D_1 e^{\lambda t}, \quad y = D_2 e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \quad (m\lambda^2 + \beta\lambda + c) D_1 - \beta\lambda D_2 = 0$$

$$-\beta\lambda D_1 + (9m\lambda^2 + 9\beta\lambda + 9c) D_2 = 0; \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} m\lambda^2 + \beta\lambda + c & -\beta\lambda \\ -\beta\lambda & 9m\lambda^2 + 9\beta\lambda + 9c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\lambda) = [3(m\lambda^2 + \beta\lambda + c) - \beta\lambda][3(m\lambda^2 + \beta\lambda + c) + \beta\lambda] = 0$$

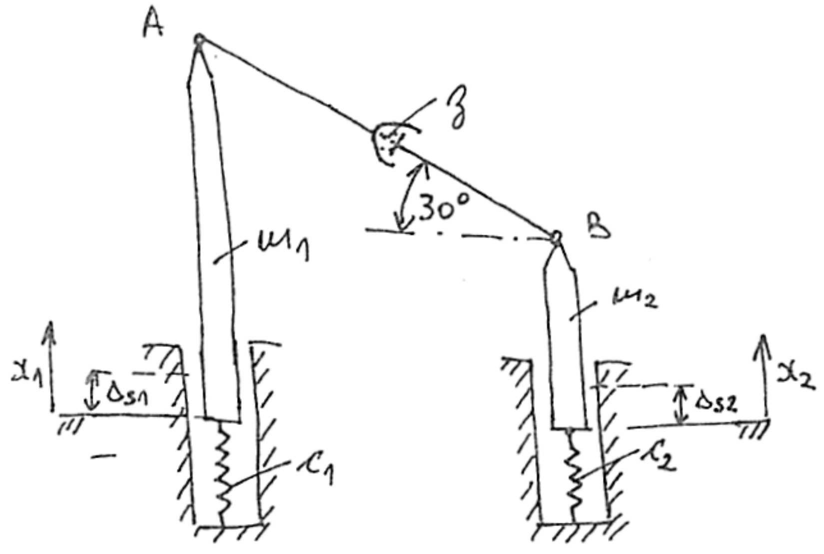
$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{3m} \pm \frac{1}{3m}\sqrt{\beta^2 - 9cm}; \quad \lambda_{3,4} = -\frac{2\beta}{3m} \pm \frac{1}{3m}\sqrt{4\beta^2 - 9cm}$$

Kretanje će biti oscilatorno ako je: $\beta^2 - 9cm < 0 \wedge 4\beta^2 - 9cm < 0$,

što je istovremeno zadovoljeno ako je

$$\boxed{c > \frac{4\beta^2}{9m}}$$

2. Napisati karakterističnu jednačinu malih oscilacija sistema oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici. Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni.



$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \mapsto a_{11} = m_1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = m_2$$

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 (x_1 - \Delta_{s1})^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - \Delta_{s2})^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2$$

$$\mapsto c_{11} = c_1, \quad c_{12} = 0, \quad c_{22} = c_2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta v_r^2, \quad v_r = v_A \cos 60° - v_B \cos 60° = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

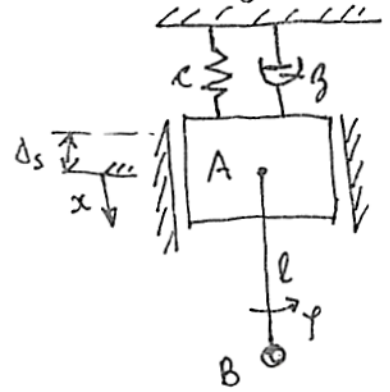
$$\Phi = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\dot{x}_1^2 - \frac{3}{2}\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{3}{4}\dot{x}_2^2\right] \to b_{11} = \frac{3}{4} = b_{22}, \quad b_{12} = -\frac{3}{4}$$

Dif. jed.:

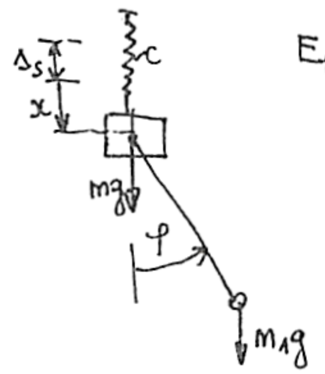
$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{3}{4}\dot{x}_1 - \frac{3}{4}\dot{x}_2 + c_1 x_1 = 0$$
$$m_2 \ddot{x}_2 - \frac{3}{4}\dot{x}_1 + \frac{3}{4}\dot{x}_2 + c_2 x_2 = 0$$

$$\Delta(\lambda) = m_1 m_2 \lambda^4 + \frac{3}{4}(m_1 + m_2)\lambda^3 + (c_1 m_2 + c_2 m_1)\lambda^2 + \frac{3}{4}(c_1 + c_2)\lambda + c_1 c_2 = 0$$

3. Sistem prikazan na slici sastoji se od klizača A, mase m, vezanog za oprugu krutosti c i matematičkog klatna B, dužine l i mase m_1, koje je obješeno o klizač A. Klizač može da osciluje u vertikalnoj vođici pri čemu na njega dejstvuje sila otpora proporcionalna brzini klizača sa koeficijentom proporcionalnosti β. Odrediti konačne jednačine malih oscilacija sistema za početne uslove: $x(0)=x_0$, $\varphi(0)=\varphi_0$, $\dot{x}(0)=\dot{\varphi}(0)=0$. Smatrati da je $\beta < \sqrt{4c(m+m_1)}$.



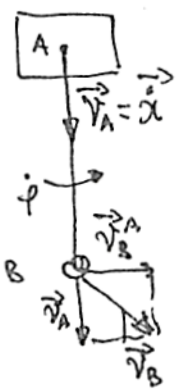
$q_1 = x,\ q_2 = \varphi$



$$E_p = -mgx - m_1 g x + m_1 g l(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}c(\Delta_s + x)^2$$

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right)_0 = c, \quad c_{12} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi \partial x}\right)_0 = 0$$

$$c_{22} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right)_0 = m_1 g l$$



$$v_B^2 = \dot{x}^2 + (v_B^A)^2, \quad v_B^A = l\dot{\varphi}$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_B^2$$

$$\rightarrow a_{11} = m + m_1; \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = m_1 l^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta \dot{x}^2 \rightarrow b_{11} = \beta, \quad b_{12} = b_{22} = 0$$

Dif. jed.:

$$\left.\begin{aligned} (m+m_1)\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x = x_0 e^{-nt}\left(\cos pt + \frac{n}{p}\sin pt\right), \quad n = \frac{\beta}{2(m+m_1)}, \quad p = \sqrt{\frac{c}{m+m_1} - \frac{\beta^2}{4(m+m_1)^2}}$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

4. Karakteristična jednačina nekog oscilatornog sistema je

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$$

Koji uslov treba da zadovoljava koeficijent k da bi sistem bio asimptotski stabilan?

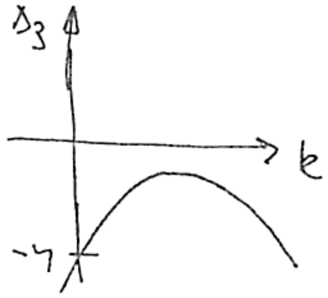
R: $A_0 = 1,\ A_1 = 2,\ A_2 = 1,\ A_3 = k,\ A_4 = 1$

$A_i > 0\ (i = 1, \dots, 4) \Rightarrow k > 0 \quad (*)$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & A_4 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} > 0 \quad (**)$$

uslovi asimptotske stabilnosti

$$\Delta_3 = -k^2 + 2k - 4$$

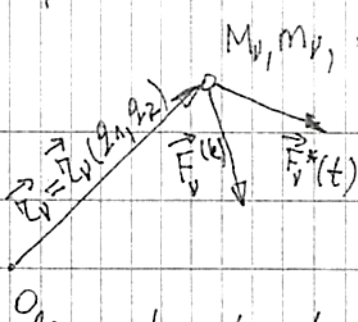


$\Rightarrow \Delta_3 < 0$ za $\forall k$

$\Rightarrow$ Dati sistem ni za kakvo k ne može biti asimptotski stabilan.

3. Prinudne neprigušene oscilacija sa dva stepena slobode

3.1 Diferencijalne jednačine



Neka na sistem osim konzervativnih sila $\vec{F}_\nu^{(k)}$, djeluju i prinudne sile $\vec{F}_\nu^*(t)$.

Smatramo da sistem ima dva stepena slobode, tako da njegov položaj određuju dvije generalisane koordinate q_1 i q_2. Takođe, pretpostavljamo da sistem pod dejstvom datih konzervativnih sila ima stabilni ravnotežni položaj, kao i da smo generalisane koordinate izabrali tako da u ovom ravnotežnom položaju odgovaraju nulte vrijednosti gen. koordinata. U okolini ovog ravnotežnog položaja, aproksimativni izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju su:

$$E_k = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right), \quad E_p = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right),$$

a aproksimativni izrazi za generalisane prinudne sile su:

$$Q_i^*(t) = \sum_\nu \vec{F}_\nu^*(t)\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\bigg|_{q_1=q_2=0}, \quad i=1,2,$$

odnosno Q_i^* mogu biti određene kao koeficijenti uz varijacije generalisanih koordinata δq_i u izrazu za rad prinudnih sila na proizvoljnom virtualnom pomjeranju sistema iz položaja ravnoteže:

$$\delta A^* = Q_1^*\delta q_1 + Q_2^*\delta q_2 .$$

Lagranžove jednačine druge vrste

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i^*(t), \quad i=1,2$$

dovode do diferencijalnih jednačina prinudnih neprigušenih oscilacija:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1^*(t) \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2^*(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ili, zapisano u matričnom obliku:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = \{Q^*(t)\}, \quad \{Q^*\} = \begin{pmatrix} Q_1^*(t) \\ Q_2^*(t) \end{pmatrix} \qquad (1').$$

3.2. Slučaj kada su prinudne generalisane sile proste harmonijske funkcije vremena

$$Q_i^* = H_i \sin \Omega t, \quad i = 1,2; \quad H_i = const - \text{amplitude prinudnih gen. sila}$$

$$(1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= H_1 \sin \Omega t \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= H_2 \sin \Omega t \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Opšte rješenje nehomogenog sistema diferencijalnih jednačina (2) je oblika

$$q_1 = q_{1h} + q_{1p}, \quad q_2 = q_{2h} + q_{2p} \qquad (3)$$

gdje su q_{1h} i q_{2h} opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema, a pošto on odgovara dif. jednačinama slobodnih neprigušenih oscilacija, biće

$$\left.\begin{aligned} q_{1h} &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ q_{2h} &= \eta_{21}^{(1)} C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \eta_{21}^{(2)} C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

gdje su ω_1, ω_2 - kružne frekvencije slobodnih oscilacija; $\eta_{21}^{(1)}$ i $\eta_{21}^{(2)}$ - koeficijenti rasporeda glavnih oblika slobodnih oscilacija; $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ - integracione konstante.

q_{1p}, q_{2p} su parcijalna rješenja sistema (2) i ona određuju prinudne oscilacije, a traže se u obliku

$$q_{1p} = P_1 \sin \Omega t, \quad q_{2p} = P_2 \sin \Omega t, \quad \sqrt{P_i - const.} \qquad (5)$$

$$(5) \text{ u } (2) \Rightarrow \left.\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}\Omega^2)P_1 + (c_{12} - a_{12}\Omega^2)P_2 &= H_1 \\ (c_{21} - a_{21}\Omega^2)P_1 + (c_{22} - a_{22}\Omega^2)P_2 &= H_2 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow P_1 = \frac{\begin{vmatrix} H_1 & (c_{12} - a_{12}\Omega^2) \\ H_2 & (c_{22} - a_{22}\Omega^2) \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)}, \quad P_2 = \frac{\begin{vmatrix} (c_{11} - a_{11}\Omega^2) & H_1 \\ (c_{21} - a_{21}\Omega^2) & H_2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)} \qquad (7)$$

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} (c_{11} - a_{11}\Omega^2) & (c_{12} - a_{12}\Omega^2) \\ (c_{21} - a_{21}\Omega^2) & (c_{22} - a_{22}\Omega^2) \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\Omega^4 - (a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} - 2a_{12}c_{12})\Omega^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) \quad \ldots \quad (8)$$

Pošto su koeficijenti kvadratnog (po Ω^2) polinoma (8) isti kao koeficijenti frekventne jednačine, njegove nule su ω_1^2 i ω_2^2, pa se on može napisati u obliku:

$$\Delta(\Omega^2) = (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2) \qquad (8')$$

$$(7),(8') \Rightarrow P_1 = \frac{H_1(c_{22}-a_{22}\Omega^2)-H_2(c_{12}-a_{12}\Omega^2)}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)},\quad P_2 = \frac{H_2(c_{11}-a_{11}\Omega^2)-H_1(c_{21}-a_{21}\Omega^2)}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)} \qquad (9)$$

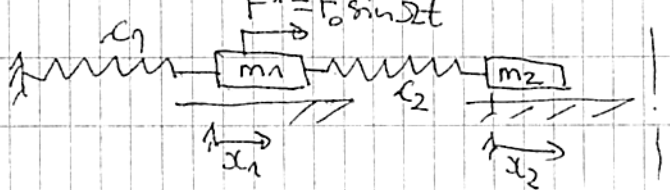
Iz (5) i (9) slijedi da su prinudne oscilacije harmonijske sa kružnom frekvencijom prinudnih sila Ω, i amplitudama određenim izrazima (9).

N: Konačne jednačine kretanja određuju se na osnovu opšteg rješenja (3) tako što se integracione konstante $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ odrede korišćenjem početnih uslova.

Iz izraza za amplitude prinudnih oscilacija (9) vidi se da one uzimaju neograničeno velike vrijednosti kada je kružna frekvencija prinudnih sila Ω jednaka prvoj (ω_1^*) ili drugoj (ω_2^*) frekvenciji slobodnih neprigušenih oscilacija. Drugim riječima, tada nastupa pojava rezonancije.

3.3 Rezonantni dijagram

Rezonantni dijagram predstavlja grafički prikaz promjene amplituda P_1, P_2 prinudnih oscilacija sa promjenom kružne frekvencije prinudnih sila Ω. Prikažimo ga na sledećem modelu jednostavnog lanca.



$$E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[(c_1+c_2)x_1^2 - 2c_2x_1x_2 + c_2x_2^2\right]$$

$$\Downarrow$$

$a_{11} = m_1,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = m_2$

$c_{11} = c_1+c_2,\ c_{12} = -c_2,\ c_{22} = c_2$

$$\delta A^* = F^*\delta x_1 = (F_0\sin\Omega t)\delta x_1$$

$$\Rightarrow Q^*_{x_1} = F_0\sin\Omega t,\quad Q^*_{x_2} = 0$$

$$\Rightarrow H_1 = F_0,\quad H_2 = 0$$

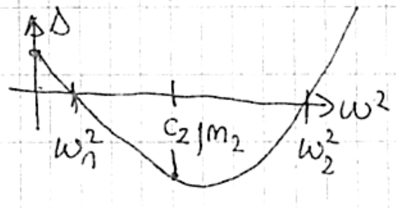
$$(9) \Rightarrow P_1 = \frac{F_0(c_2-m_2\Omega^2)}{\Delta(\Omega^2)},\quad P_2 = \frac{F_0 c_2}{\Delta(\Omega^2)}, \qquad (10)$$

$\Delta(\Omega^2) = m_1m_2(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)$; ω_1^2 i ω_2^2 su rješenja frekventne jednačine:

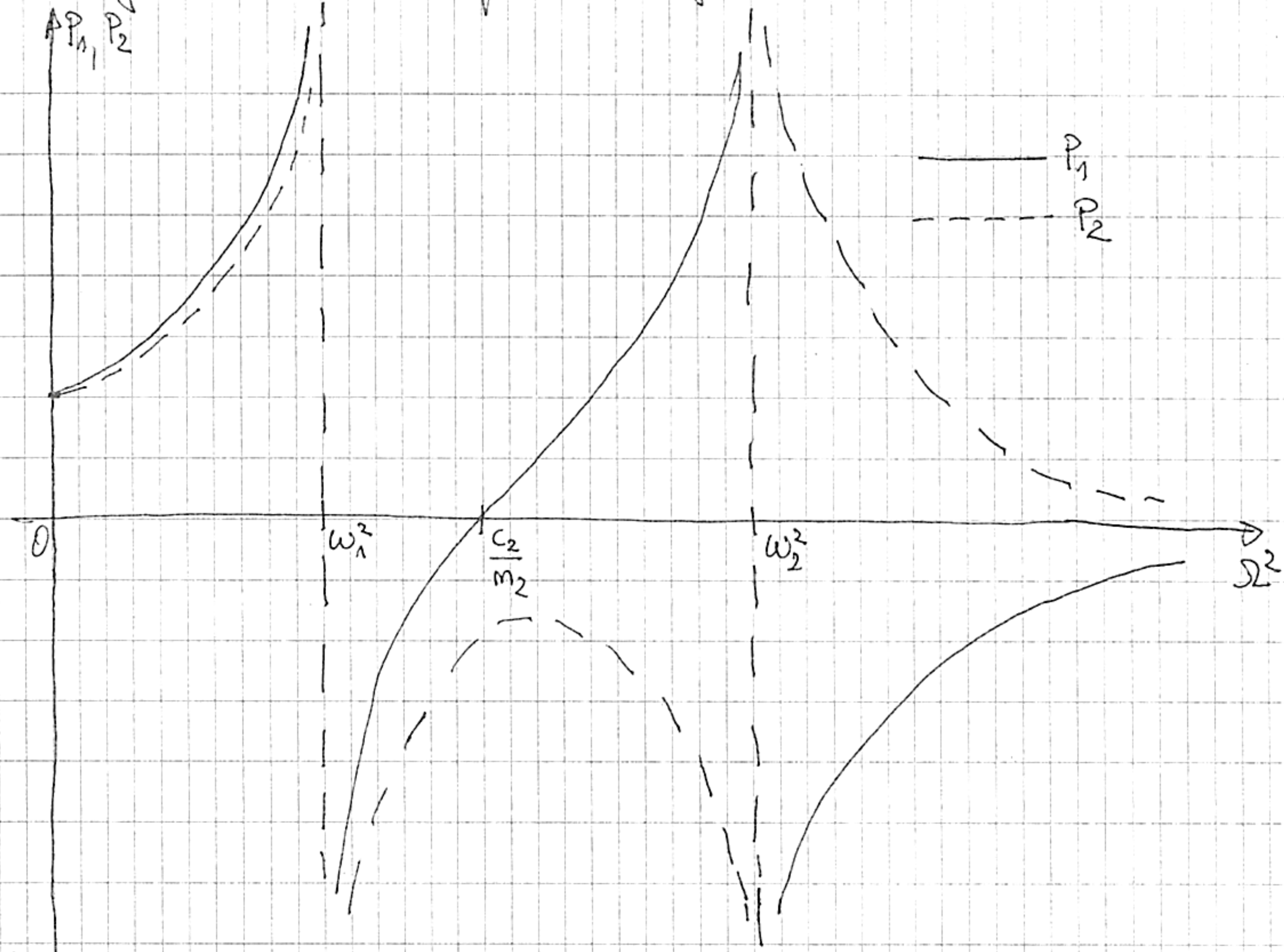
$$\Delta(\omega^2) \equiv m_1m_2\omega^4 - [m_1c_2 + m_2(c_1+c_2)]\omega^2 + c_2(c_1+c_2) - c_2^2 = 0$$

Lako je izračunati $\Delta\left(\omega^2 = \frac{c_2}{m_2}\right) = -c_2^2 < 0$

pa je $\omega_1^2 < \frac{c_2}{m_2}$, $\omega_2^2 > \frac{c_2}{m_2}$



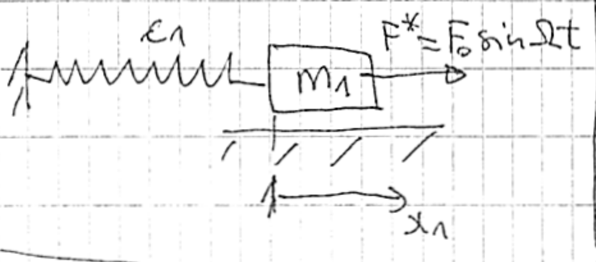
Sada je lako skicirati grafike f-ja (10):



Rezonantni dijagram jednostranog lonca

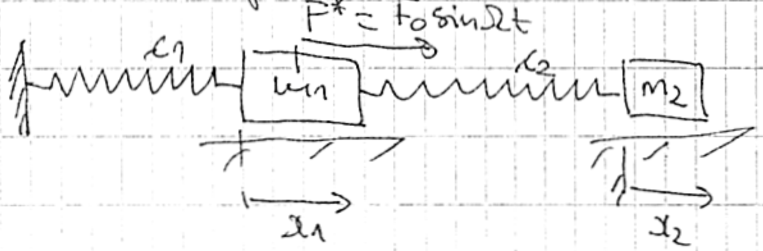
3.4 Dinamički apsorber bez prigušenja

Ako je oscilatorni sistem sa jednim stepenom slobode, recimo opružni oscilator sa pravolinijskim kretanjem, izložen dejstvu prinudne harmonijske sile $F^* = F_0 \sin \Omega t$, javiće se prinudna oscilacija ~~amplitude~~



$$x_{1p} = \frac{F_0}{m_1(\omega^2 - \Omega^2)} \sin \Omega t, \quad \omega^2 = \frac{c_1}{m_1}$$

Da bi se eliminisala prinudna oscilacija mase m_1 možemo proširiti sistem vezujući za osnovnu masu m_1, posredstvom elastične opruge krutosti c_2, dodatnu translatorno pokretnu masu m_2.



U ovako dobijenom sistemu sa dva stepena slobode, na osnovu prethodnih razmatranja, amplitude prinudnih oscilacija su:

$$P_1 = \frac{F_0(c_2 - m_2\Omega^2)}{\Delta(\Omega^2)}, \quad P_2 = \frac{F_0 c_2}{\Delta(\Omega^2)}$$

~~Pošto~~ Uslov $P_1 = 0$, biće ispunjen samo ako je $c_2 - m_2\Omega^2 = 0$, odnosno

$$\Omega^2 = \frac{c_2}{m_2}$$

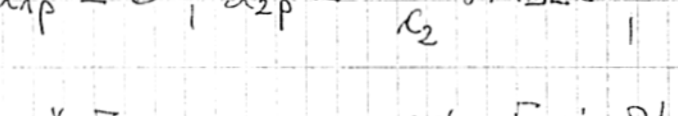
Znači kada se krutost dodatne opruge i dodatna masa izaberu tako da je njihov odnos jednak kvadratu kružne frekvencije prinudne sile, osnovna masa m_1 neće prinudno oscilovati.

Fizičko tumačenje dejstva din. apsor. bez prigušenja:

Lako je izračunati $\Delta\left(\Omega^2 = \frac{c_2}{m_2}\right) = -c_2^2 \Rightarrow P_2 = -\frac{F_0}{c_2}$, odnosno

$$x_{1p} = 0, \quad x_{2p} = -\frac{F_0}{c_2} \sin \Omega t$$

Druga masa m_2 se kreće tako da sila u drugoj opruzi uravnotežava prinudnu silu.



3.5 Rezonancija

Rezonancija nastaje kada je $\Omega=\omega_1$ ili $\Omega=\omega_2$.

Da bi se odredio zakon prinudnog oscilovanja u slučaju rezonancije od izabranog sistema generalisanih koordinata q_1, q_2 prelazi se na glavne koordinate ξ_1, ξ_2:

$$q_1=\xi_1+\xi_2\,,\quad q_2=\eta_{21}^{(1)}\xi_1+\eta_{21}^{(2)}\xi_2 \qquad (11)$$

U novim koordinatama je: $E_k=\frac{1}{2}(a_1\dot{\xi}_1^2+a_2\dot{\xi}_2^2)$, $E_p=\frac{1}{2}(c_1\xi_1^2+c_2\xi_2^2)$

$$\delta A^*=Q_1^*\delta q_1+Q_2^*\delta q_2=(Q_1^*+\eta_{21}^{(1)}Q_2^*)\delta\xi_1+(Q_1^*+\eta_{21}^{(2)}Q_2^*)\delta\xi_2$$

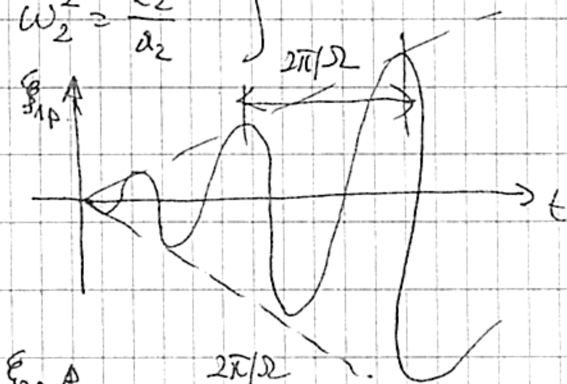
$$\Rightarrow Q_{\xi_1}^*=Q_1^*+\eta_{21}^{(1)}Q_2^*=(H_1+\eta_{21}^{(1)}H_2)\sin\Omega t\,,\quad Q_{\xi_2}^*=(Q_1^*+\eta_{21}^{(2)}Q_2^*)=(H_1+\eta_{21}^{(2)}H_2)\sin\Omega t$$

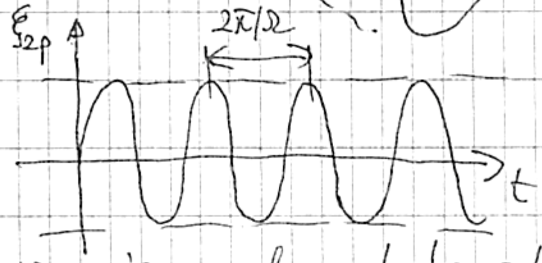
Dif. jed.:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi}_1+\omega_1^2\xi_1&=\frac{H_1+\eta_{21}^{(1)}H_2}{a_1}\sin\Omega t\,,\quad \omega_1^2=\frac{c_1}{a_1}\\ \ddot{\xi}_2+\omega_2^2\xi_2&=\frac{H_1+\eta_{21}^{(2)}H_2}{a_2}\sin\Omega t\,,\quad \omega_2^2=\frac{c_2}{a_2}\end{aligned}\right\}(12)$$

Neka je $\Omega=\omega_1\neq\omega_2$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\xi_{1p}&=\frac{H_1+\eta_{21}^{(1)}H_2}{2a_1\Omega}\,t\sin\left(\Omega t-\frac{\pi}{2}\right)\\ \xi_{2p}&=\frac{H_1+\eta_{21}^{(1)}H_2}{a_2(\omega_2^2-\Omega^2)}\sin\Omega t\end{aligned}\right\}(13)$$





Kada (13) unesemo u (11), dobijamo zakon promjene polaznih koordinata q_1, q_2 u slučaju rezonancije.

Oscilacije u mašinstvu

II KOLOKVIJUM, 2010.

1. Sistem prikazan na slici sastoji se od translatorno pokretnog, u horizontalnom pravcu, tijela mase $m_1 = 2m$ i homogenog štapa, mase $m_2 = m$ i dužine l, koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O. Ako je $m = 10$ kg, $c = 10^3$ N/m i $l = 1$ m, odrediti kružne frekvencije slobodnih oscilacija sistema, kao i prvi i drugi glavni oscilaciju.

2. Ako na sistem opisan u prethodnom zadatku na štap djeluje prinudni moment $M^* = M_0 \sin \Omega t$, $M_0 = 0{,}5$ Nm, $\Omega = 20\ s^{-1}$, odrediti amplitude prinudnih oscilacija sistema.

~~3. Diferencijalne jednačine slobodnih prigušenih oscilacija sistema sa dva stepena slobode.~~

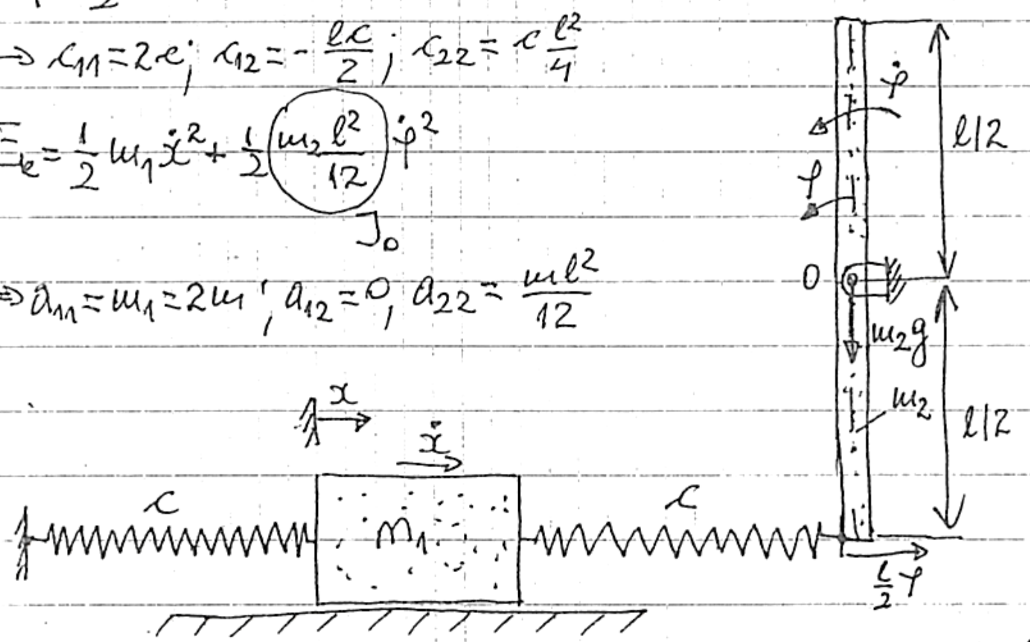
$q_1 = x; \quad q_2 = \varphi$

1) $E_p = \frac{1}{2} c x^2 + \frac{1}{2} c \left(\frac{l}{2}\varphi - x\right)^2 = \frac{1}{2}\left[2cx^2 - lcx\varphi + c\frac{l^2}{4}\varphi^2\right]$

$\Rightarrow c_{11} = 2c; \quad c_{12} = -\frac{lc}{2}; \quad c_{22} = c\frac{l^2}{4}$

$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m_2 l^2}{12}\right)}_{J_O}\dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow a_{11} = m_1 = 2m; \quad a_{12} = 0; \quad a_{22} = \frac{ml^2}{12}$



Dif. jed. $\left.\begin{aligned} 2m\ddot{x} + 2cx - \frac{lc}{2}\varphi = 0 \\ \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} - \frac{lc}{2}x + c\frac{l^2}{4}\varphi = 0 \end{aligned}\right\}(1)$ $\left.\begin{aligned} x = A_1 \sin(\omega t + \alpha) \\ \varphi = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}\right\} u\ (1) \Rightarrow$

$\left.\begin{aligned} (2c - 2m\omega^2)A_1 - \frac{lc}{2}A_2 = 0 \\ -\frac{lc}{2}A_1 + \left(c\frac{l^2}{4} - \frac{ml^2}{12}\omega^2\right)A_2 = 0 \end{aligned}\right\}(2)$; $\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 2c - 2m\omega^2 & -l\frac{c}{2} \\ -\frac{lc}{2} & \frac{cl^2}{4} - \frac{ml^2}{12}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta(\omega^2) = \frac{l^2}{2}(c - m\omega^2)\left(c - \frac{m}{3}\omega^2\right) - \frac{l^2c^2}{4} = 0 \Rightarrow 2m^2\omega^4 - 8mc\omega^2 + 3c^2 = 0$

$\Rightarrow \omega_1^2 = 0{,}42\frac{c}{m}; \quad \omega_2^2 = 3{,}58\frac{c}{m}; \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 6{,}48\ s^{-1}}; \boxed{\omega_2 = 18{,}92\ s^{-1}}$

$$\eta_{21} = \frac{A_2}{A_1} \overset{(2)}{=} \frac{2(c-m\omega^2)}{\ell c/2}$$

$$\eta_{21}^{(1)} = \eta_{21}(\omega=\omega_1) = 2{,}32 \quad ; \quad \eta_{21}^{(2)} = \eta_{21}(\omega=\omega_2) = -10{,}32$$

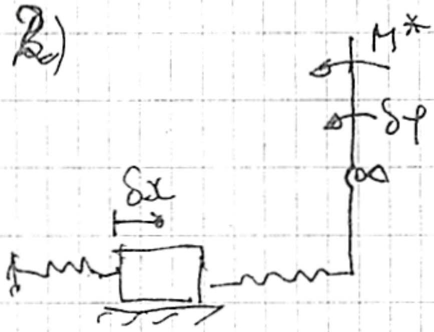
I glavna oscilacija

$$x^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) = A_1 \sin(6{,}48t + \alpha_1)$$
$$\varphi^{(1)} = \eta_{21}^{(1)} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) = 2{,}32 A_1 \sin(6{,}48t + \alpha_1)$$

II glavna oscilacija

$$x^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) = A_2 \sin(18{,}92t + \alpha_2)$$
$$\varphi^{(2)} = \eta_{21}^{(2)} A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) = -10{,}32 A_2 \sin(18{,}92t + \alpha_2)$$

b)



$$\left.\begin{aligned} \delta A^* &= M^* \delta\varphi \\ \delta A^* &= Q_x^* \delta x + Q_\varphi^* \delta\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} Q_x^* &= 0 \\ Q_\varphi^* &= M^* = M_0 \sin\Omega t \end{aligned}$$

$$\text{Dif. jed.:} \left.\begin{aligned} &2m\ddot{x} + 2cx - \frac{\ell c}{2}\varphi = 0 \\ &\frac{m\ell^2}{12}\ddot{\varphi} - \frac{\ell c}{2}x + \frac{c\ell^2}{4}\varphi = M_0 \sin\Omega t \end{aligned}\right\} (3)$$

$$x = P_1 \sin\Omega t,\ \varphi = P_2 \sin\Omega t \ \text{u}\ (3) \Rightarrow \left.\begin{aligned} &(2c - 2m\Omega^2)P_1 - \frac{\ell c}{2}P_2 = 0 \\ &-\frac{\ell c}{2}P_1 + \left(\frac{c\ell^2}{4} - \frac{m\ell^2}{12}\Omega^2\right)P_2 = M_0 \end{aligned}\right\} (4)$$

$$(4) \Rightarrow P_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\ell c}{2} \\ M_0 & \left(\frac{c\ell^2}{4} - \frac{m\ell^2}{12}\Omega^2\right) \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)} = \dots \ ; \ P_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2c - 2m\Omega^2 & 0 \\ -\frac{\ell c}{2} & M_0 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)} = \dots$$

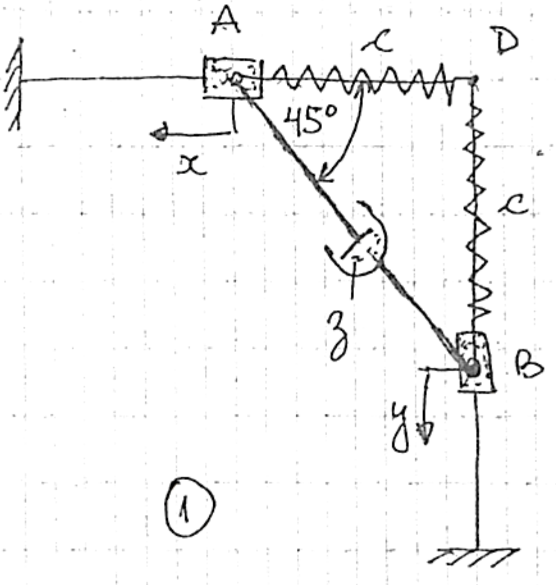
$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} 2c - 2m\Omega^2 & -\frac{\ell c}{2} \\ -\frac{\ell c}{2} & \frac{c\ell^2}{4} - \frac{m\ell^2}{12}\Omega^2 \end{vmatrix}$$

OSCILACIJE U MAŠINSTVU

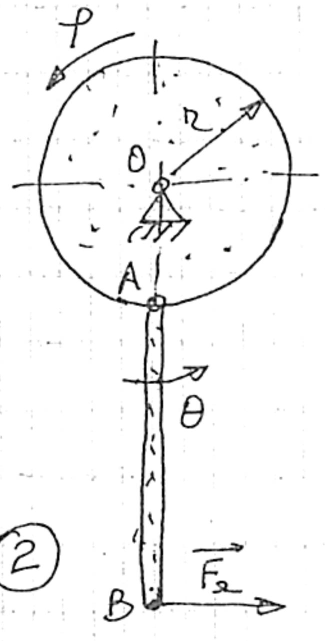
Popravni II KOLOKVIJUM, 2015-16.

1. Klizači A i B, jednakih masa m, vezani su oprugama jednakih krutosti c za tačku D, a međusobno su vezani prigušivačem zanemarljive mase koeficijentom prigušenja β. Klizač A se kreće po horizontalnom a klizač B po vertikalnom kraku ugaonika. a) Napisati diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici. b) Ako je $m = 1\,kg$, $c = 4\,N/m$ i $\beta = 2\,Ns/m$, napisati karakterističnu jednačinu sistema i primjenom Rauth-Hurvicovog kriterijuma ispitati da li je ravnoteža asimptotski stabilna.

2. Homogeni disk mase m i poluprečnika r može da se obrće oko nepokretne horizontalne ose O. U tački A za njega je zglobno vezan homogeni štap AB mase m i dužine $l = 2r$. U tački B djeluje horizontalna prinudna sila $F_e = F_0 \sin \Omega t$.
a) Uzimajući za generalisane koordinate apsolutne uglove obrtanja φ i θ, napisati diferencijalne jednačine prinudnih oscilacija oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici.
b) Ako je $m = 6\,kg$, $r = 0{,}2\,m$, $F_0 = 2\,N$, $\Omega = 10\,s^{-1}$, odrediti amplitude prinudnih oscilacija.

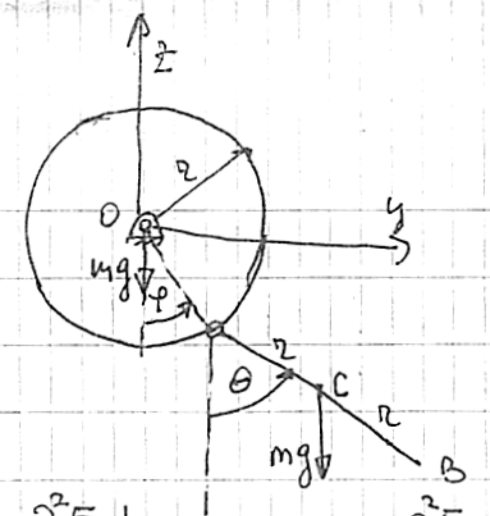


1



2

(2)



$q_1 = \varphi, \; q_2 = \theta; \quad \varphi = 0, \theta = 0$ – ravnotežni položaj

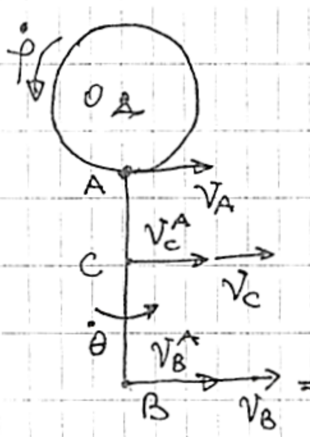
$E_p = mg z_C; \quad z_C = -r\cos\varphi - r\cos\theta$

$E_p = -mgr(\cos\varphi + \cos\theta)$

$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mgr\sin\varphi; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgr\sin\theta$

$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} = mgr\cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi \partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = mgr\cos\theta$

$c_{11} = \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right|_{\substack{\varphi=0\\ \theta=0}} = mgr; \quad c_{12} = \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi \partial \theta}\right|_0 = 0, \quad c_{22} = \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_0 = mgr$



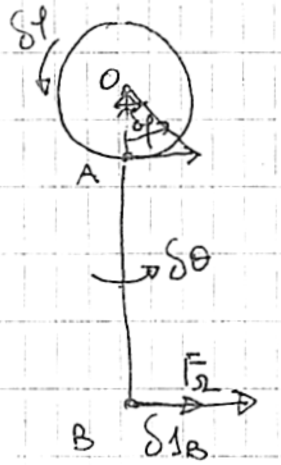
$E_k = E_k^{(disk)} + E_k^{(AB)} = \frac{1}{2} J_O^{(disk)} \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_C^{(AB)} \dot\theta^2$

$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_C^A, \quad V_A = r\dot\varphi; \quad V_C^A = \overline{AC}\,\dot\theta = r\dot\theta \Rightarrow V_C = r\dot\varphi + r\dot\theta$

$J_O^{(disk)} = \frac{mr^2}{2}, \quad J_C^{(AB)} = \frac{m(2r)^2}{12}$

$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} mr^2 \dot\varphi^2 + 2mr^2 \dot\varphi\dot\theta + \frac{4}{3} mr^2 \dot\theta^2\right]$

$\Rightarrow a_{11} = \frac{3}{2} mr^2, \quad a_{12} = mr^2, \quad a_{22} = \frac{4}{3} mr^2$



$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A, \quad V_A = r\dot\varphi, \quad V_B^A = 2r\dot\theta \rightarrow V_B = r\dot\varphi + 2r\dot\theta$

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$\delta s_B \quad \delta\varphi \quad \delta\theta$

$\delta s_B = r\delta\varphi + 2r\delta\theta$

$\delta A^* = F_\Omega \, \delta s_B = (rF_\Omega)\delta\varphi + (2rF_\Omega)\delta\theta$

$\delta A^* = Q_\varphi^* \delta\varphi + Q_\theta^* \delta\theta \Rightarrow Q_\varphi^* = rF_\Omega = F_0 r \sin\Omega t,$

$Q_\theta^* = 2F_0 r \sin\Omega t$

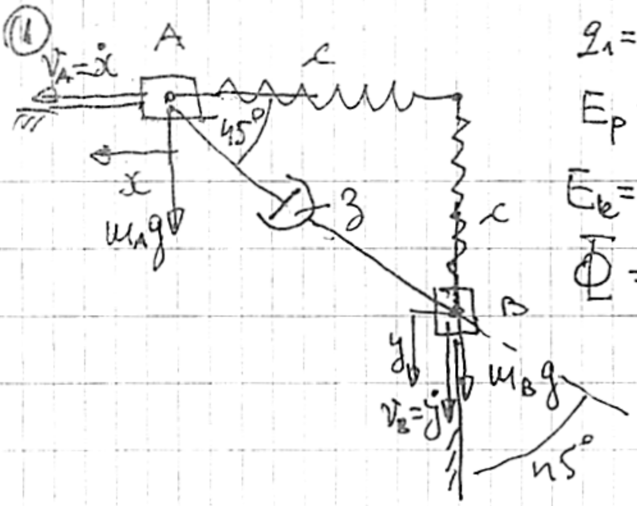
Dif. jed.:
$$\left.\begin{aligned} &\frac{3}{2} mr^2 \ddot\varphi + mr^2 \ddot\theta + mgr\varphi = F_0 r \sin\Omega t \\ &mr^2 \ddot\varphi + \frac{4}{3} mr^2 \ddot\theta + mgr\theta = 2F_0 r \sin\Omega t \end{aligned}\right\} (1)$$

b)
$$\left.\begin{aligned} &1{,}8\ddot\varphi + 1{,}2\ddot\theta + 58{,}86\varphi = 2\sin 10t \\ &1{,}2\ddot\varphi + 1{,}6\ddot\theta + 58{,}86\theta = 4\sin 10t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\varphi = P_1 \sin 10t \\ &\theta = P_2 \sin 10t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &-121{,}14 P_1 - 120 P_2 = 2 \\ &-120 P_1 - 101{,}14 P_2 = 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P_1 = -0{,}13 \text{ rad}, \quad P_2 = 0{,}11 \text{ rad}$

prinudne oscilacije: $\varphi = -0{,}13\sin(10t), \quad \theta = 0{,}11\sin(10t)$

(1)



$q_1=x,\ q_2=y;\ m_A=m_B=m$

$E_p=\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}cy^2 \mapsto c_{11}=c,\ c_{12}=c_{21}=0,\ c_{22}=c$

$E_k=\frac{1}{2}m_A v_A^2+\frac{1}{2}m_B v_B^2=\frac{1}{2}(m\dot x^2+m\dot y^2)\mapsto \begin{matrix} a_{11}=m,\ a_{22}=m \\ a_{12}=a_{21}=0\end{matrix}$

$\Phi=\frac{1}{2}\beta v_r^2,\ v_r=v_B\cos45^\circ+v_A\cos45^\circ=(\dot x+\dot y)\frac{\sqrt2}{2}$

$\Phi=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta\dot x^2+\beta\dot x\dot y+\frac{1}{2}\beta\dot y^2\right)$

$\mapsto b_{11}=\frac{\beta}{2};\ 2b_{12}=\beta,\ b_{22}=\frac{1}{2}\beta$

$b_{12}=b_{21}=\beta/2$

a) $a_{11}\ddot q_1+a_{12}\ddot q_2+b_{11}\dot q_1+b_{12}\dot q_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0 \to m\ddot x+\frac{\beta}{2}\dot x+\frac{\beta}{2}\dot y+cx=0$

$a_{21}\ddot q_1+a_{22}\ddot q_2+b_{21}\dot q_1+b_{22}\dot q_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=0 \to m\ddot y+\frac{\beta}{2}\dot x+\frac{\beta}{2}\dot y+cy=0$ $\Big\}(*)$

b) $m=1;\ c=4;\ \beta=2 \xrightarrow{(*)} \left.\begin{matrix}\ddot x+\dot x+\dot y+4x=0\\ \ddot y+\dot x+\dot y+4y=0\end{matrix}\right\}(**)$

$x=D_1e^{\lambda t},\ y=D_2e^{\lambda t}$ u $(**) \to \left\{\begin{matrix}(4+\lambda+\lambda^2)D_1+\lambda D_2=0\\ \lambda D_1+(4+\lambda+\lambda^2)D_2=0\end{matrix}\right\}(***)$

$$(***)\Rightarrow \Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}4+\lambda+\lambda^2 & \lambda\\ \lambda & 4+\lambda+\lambda^2\end{vmatrix}=0$$

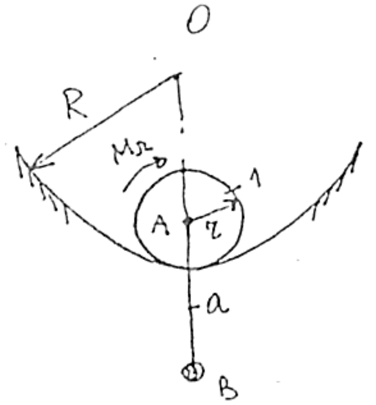
$$\Delta(\lambda)=\underbrace{1}_{A_0}\cdot\lambda^4+\underbrace{2}_{A_1}\lambda^3+\underbrace{8}_{A_2}\lambda^2+\underbrace{8}_{A_3}\lambda+\underbrace{16}_{A_4}=0$$ – karakteristična jednačina

$A_0=1>0;\ A_1=2>0;\ A_2=8>0;\ A_3=8>0,\ A_4=16>0$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}A_1 & A_0 & 0\\ A_3 & A_2 & A_1\\ 0 & A_4 & A_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 8 & 8 & 2\\ 0 & 16 & 8\end{vmatrix}=0$$

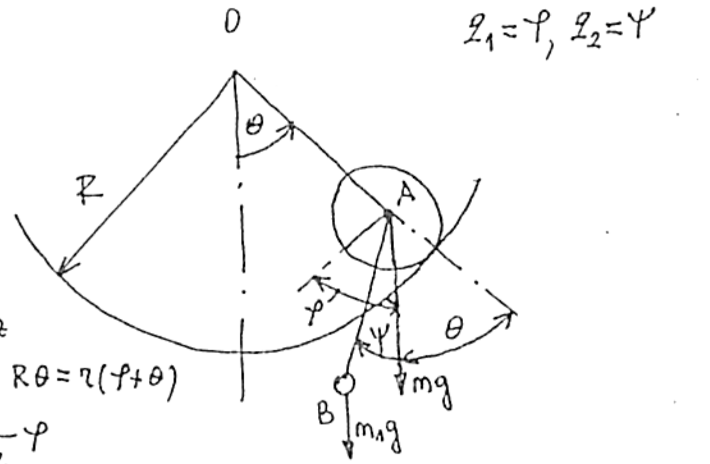
Pošto nije ~~ispunjen uslov~~ $\Delta_3>0$, nijesu zadovoljeni uslovi Raut-Hurvicovog kriterijuma i ravnoteža nije asimptotski stabilna

— Homogeni disk 1, mase m i poluprečnika r, može da se kotrlja bez klizanja po unutrašnjosti nepokretnog cilindra horizontalne izvodnice i poluprečnika osnove R. Za centar A diska zglobom je vezan štap, zanemarljive mase i dužine a, koji na svom slobodnom kraju B nosi koncentrisani teret mase m_1. Na disk dejstvuje prinudni moment $M_\Omega = M_0 \sin \Omega t$. a) Napisati diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema oko položaja prikazanog na slici. b) Ako je $R = a$, $r = a/4$ i $m_1 = m/2$, odrediti kolika treba da bude kružna frekvencija Ω prinudnog momenta da bi amplituda prinudne oscilacije diska bila jednaka nuli. Kolika je u tom slučaju amplituda prinudne oscilacije mase B?



R:

$q_1 = \varphi, \; q_2 = \psi$

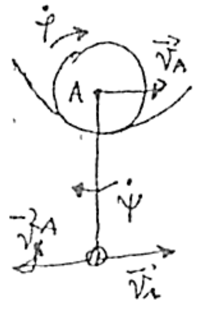


Kotrljanje bez klizanja $\rightarrow R\theta = r(\varphi + \theta)$

$\rightarrow \theta = \frac{r}{R-r}\varphi$

$$E_p = -mg(R-r)\cos\theta - m_1 g\left[(R-r)\cos\theta + a\cos\psi\right] + \text{const}$$

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right)_0 = \frac{(m+m_1)gr^2}{R-r}, \quad c_{12} = 0, \quad c_{22} = m_1 g a$$



$v_A = r\dot\varphi$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A, \quad v_B^A = a\dot\psi$

$v_B = v_A - v_B^A = r\dot\varphi - a\dot\psi$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m_1 v_B^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(3m+2m_1)r^2\dot\varphi^2 - 2m_1 a r\dot\varphi\dot\psi + m_1 a^2\dot\psi^2\right]$$

$$\rightarrow a_{11} = \frac{1}{2}(3m+2m_1)r^2, \quad a_{12} = -m_1 a r, \quad a_{22} = m_1 a^2$$

$$\delta A^* = M_\Omega \delta\varphi = Q_\varphi^* \delta\varphi + Q_\psi^* \delta\psi \rightarrow Q_\varphi^* = M_\Omega, \; Q_\psi^* = 0$$

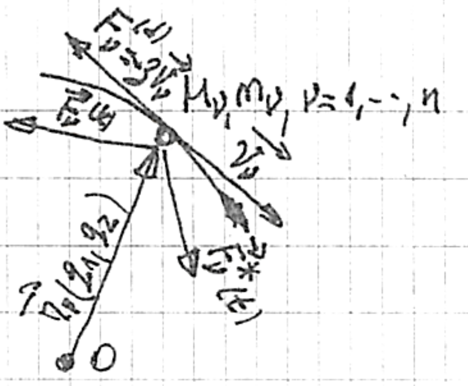
Dif. jed.:
$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(3m+2m_1)r^2\ddot\varphi - m_1 a r\ddot\psi + \frac{(m+m_1)gr^2}{R-r}\varphi = M_0 \sin\Omega t \\ &-m_1 a r\ddot\varphi + m_1 a^2\ddot\psi + m_1 g a\psi = 0 \end{aligned}\right\}$$

b) $\varphi = P_1 \sin\Omega t, \quad \psi = P_2 \sin\Omega t;$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} &\left[\frac{(m+m_1)gr^2}{R-r} - \frac{1}{2}(3m+2m_1)r^2\Omega^2\right]P_1 + m_1 a r\Omega^2 P_2 = M_0 \\ &a r\Omega^2 P_1 + (ga - a^2\Omega^2)P_2 = 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[R=a,\, r=\frac{a}{4},\, m_1=\frac{m}{2}]{P_1 = 0} \Omega^2 = \frac{g}{a}, \; P_2 = \frac{8M_0}{mag}$$

4. Prinudne prigušene oscilacije

4.1 Diferencijalne jednačine



Pretpostavimo da na oscilatorni sistem, opisan u dijelu 3.1, djeluju i sile viskoznog trenja, tako da je disipativna funkcija određena izrazom (2.2), tj

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(b_{11}\dot{q}_1^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2\right).$$

Lagranžove jednačine II vrste

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i^*(t), \quad i=1,2$$

dovode do diferencijalnih jednačina prinudnih prigušenih oscilacija:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1^*(t) \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2^*(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ili, zapisano u matričnom obliku:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{Q^*(t)\}. \qquad (1')$$

4.2 Prinudne oscilacije u slučaju kada su generalisane prinudne sile proste harmoniske funkcije vremena

$$Q_i^* = H_i \sin \Omega t, \quad i=1,2, \quad H_i = \text{const} \qquad (2)$$

U ovom slučaju prinudne oscilacije tražimo u obliku

$$\left.\begin{aligned} q_{1p} &= A_1\cos\Omega t + B_1 \sin\Omega t \\ q_{2p} &= A_2\cos\Omega t + B_2 \sin\Omega t \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$(3)\ u\ (1) \xRightarrow{(2)} \left.\begin{aligned} (c_{11}-a_{11}\Omega^2)A_1 + b_{11}\Omega B_1 + (c_{12}-a_{12}\Omega^2)A_2 + b_{12}\Omega B_2 &= H_1, \\ -b_{11}\Omega A_1 + (c_{11}-a_{11}\Omega^2)B_1 - b_{12}\Omega A_2 + (c_{12}-a_{12}\Omega^2)B_2 &= 0, \\ (c_{12}-a_{12}\Omega^2)A_1 + b_{12}\Omega B_1 + (c_{22}-a_{22}\Omega^2)A_2 + b_{22}\Omega B_2 &= H_2, \\ -b_{12}\Omega A_1 + (c_{12}-a_{12}\Omega^2)B_1 - b_{22}\Omega A_2 + (c_{22}-a_{22}\Omega^2)B_2 &= 0. \end{aligned}\right\} (4)$$

Iz nehomogenog linearnog sistema algebarskih jednačina (4) određujemo veličine A_1, B_1, A_2 i B_2, a zatim zamjenama

$$A_1 = P_1\sin\gamma_1,\ B_1 = P_1\cos\gamma_1;\ A_2 = P_2\sin\gamma_2,\ B_2 = P_2\cos\gamma_2$$

prinudne oscilacije predstavljamo u amplitudnom obliku

$$\left.\begin{aligned} q_{1p} &= P_1 \sin(\Omega t + \gamma_1) \\ q_{2p} &= P_2 \sin(\Omega t + \gamma_2), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

gdje su amplitude P_i i fazne razlike γ_i određene formulama

$$P_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad P_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$$

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg}\frac{A_1}{B_1}, \quad \gamma_2 = \operatorname{arctg}\frac{A_2}{B_2}$$

4.3 Slučaj modalnog prigušenja

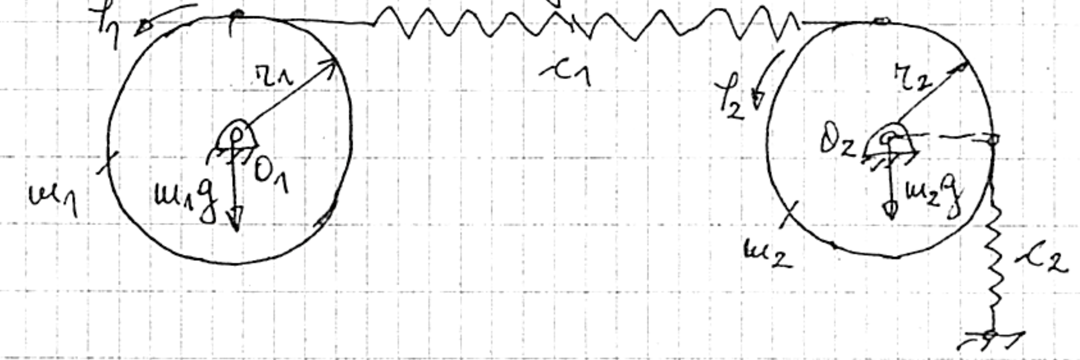
Ako od izabranih generalisanih koordinata q_1 i q_2 pređemo na glavne koordinate ξ_1 i ξ_2 ($q_1 = \xi_1 + \xi_2$, $q_2 = \ell_{21}^{(1)}\xi_1 + \ell_{21}^{(2)}\xi_2$), dif. jednačine (1) dobijaju ~~ob~~ raspregnut oblik

$$\left.\begin{aligned} a_1 \ddot{\xi}_1 + b_1 \dot{\xi}_1 + c_1 \xi_1 &= Q_{\xi_1}^*(t) \\ a_2 \ddot{\xi}_2 + b_2 \dot{\xi}_2 + c_2 \xi_2 &= Q_{\xi_2}^*(t) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

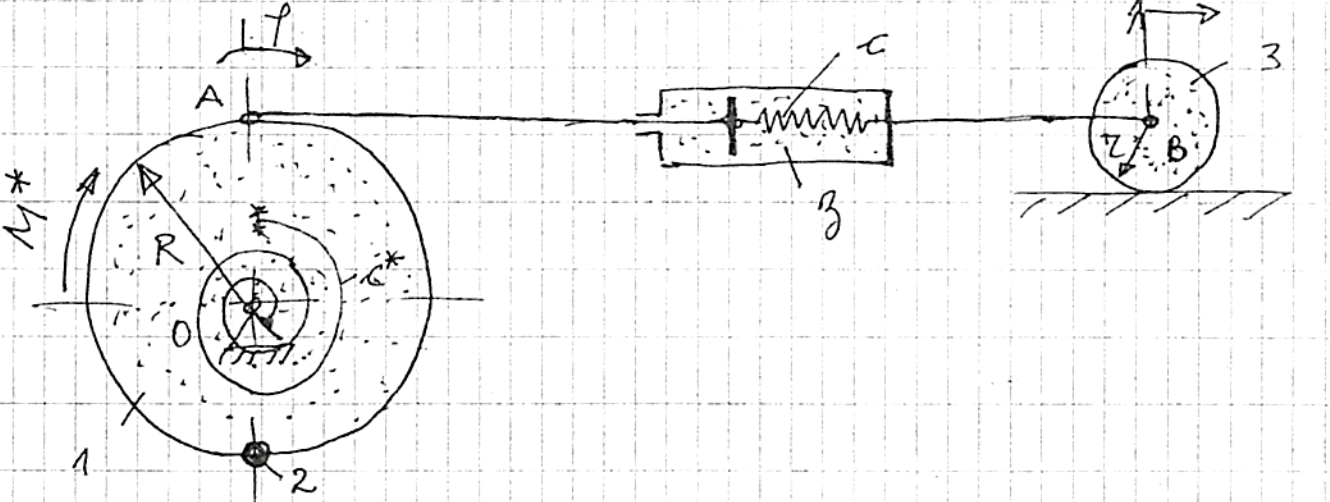
i na taj način problem svodi na nalaženje prinudnih oscilacija podsistema sa jednim stepenom slobode.

Oscilacije u mašinstvu, Popravni II Kolokvijum, 2016/17.

1. Sistem se sastoji od homogenih kružnih diskova masa m_1 i m_2, poluprečnika r_1 i r_2, koji se mogu obrtati oko odgovarajućih nepokretnih horizontalnih osa. U sastav sistema ulaze i elastične opruge krutosti c_1 i c_2. a) Uzimajući da je $m_1 = 2m$, $m_2 = 8m$, $r_1 = r_2 = r$, $c_1 = c$, $c_2 = 3c$ napisati diferencijalne jednačine slobodnih neprigušenih oscilacija sistema. b) Ako je $m = 2$ kg, $c = 400$ N/m, $r = 20$ cm, izračunati kružne frekvencije sistema i odrediti glavne oscilacije sistema.

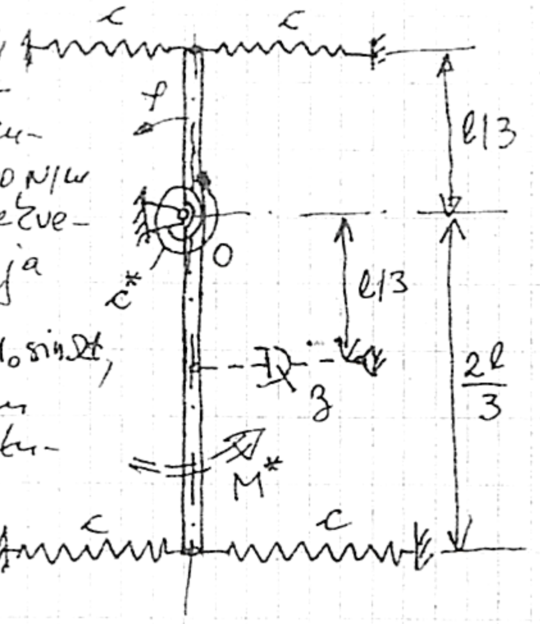


2. Sistem prikazan na slici sastoji se od homogenog kružnog cilindra tankih zidova, mase m_1, koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O, materijalne tačke 2 mase m_2 čvrsto vezane za cilindar 1, teleskopske osovine AB ($m_{AB} = 0$) i diska 3, mase m_3. Veze u tačkama A i B su zglobne. Spiralna opruga je krutosti c^*, a zavojna c. Koeficijent prigušenja teleskopske osovine je β. Kotrljanje ~~bez klizanja~~ diska 3 je bez klizanja. Napisati diferencijalne jednačine prinudnih oscilacija sistema oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici, ako na cilindar djeluje prinudni moment $M^* = M_0 \sin \Omega t$.

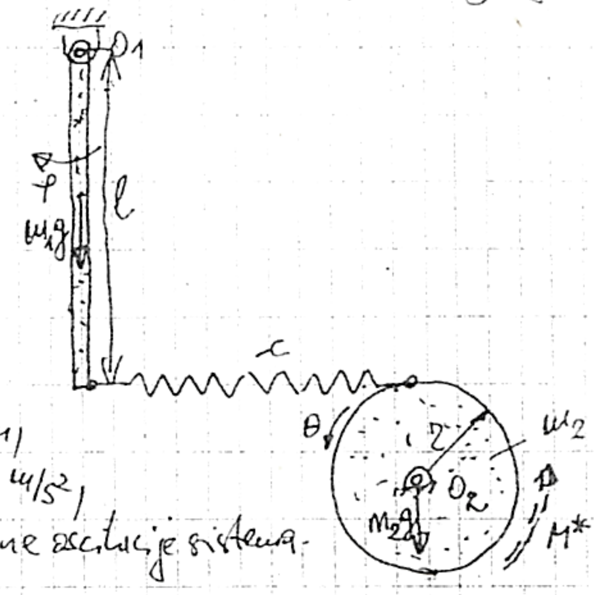


Oscilacije u mašinstvu, Z.I, 2016/17.

1. Homogeni štap, mase $m = 10$ kg i dužine $l = 5$ m, može da se obrće u vertikalnoj ravni oko horizontalne ose O. Štap je vezan za sistem opruga prikazan na slici, čije su krutosti $c = 2000$ N/m i $c^* = 1000$ Nm/rad. a) Odrediti kružnu frekvenciju i period slobodnih neprigušenih oscilacija štapa oko prikazanog ravnotežnog položaja.
b) Ako na štap djeluje prinudni moment $M^* = M_0 \sin \Omega t$, $M_0 = 100$ Nm, $\Omega = 50$ rad/s, napisati diferencijalnu jednačinu prinudnih oscilacija i odrediti amplitudu prinudnih oscilacija štapa.
c) Kolika će biti amplituda prinudne oscilacije, ako se za štap veže prigušnica (v. sl.) sa koeficijentom prigušenja $\beta = 400$ Ns/m.



2. Sistem se sastoji od homogenog štapa, mase m_1 i dužine l, i homogenog kružnog diska, mase m_2 i poluprečnika r, koji se u vertikalnoj ravni mogu okretati oko nepokretnih horizontalnih osa O_1 i O_2, respektivno. Štap i disk povezuje elastična opruga krutosti c.
a) Napisati diferencijalne jednačine slobodnih oscilacija sistema oko ravnotežnog položaja prikazanog na slici.
b) Za $m_1 = 30$ kg, $m_2 = 10$ kg, $c = 50$ N/m, $l = 1$ m, $r = 0{,}2$ m, uzimajući da je $g = 10$ m/s^2, odrediti kružne frekvencije, kao i glavne oscilacije sistema.



c) Ako na disk djeluje prinudni moment $M^* = M_0 \sin \Omega t$, $M_0 = 5$ Nm, $\Omega = 15$ rad/s, odrediti amplitude prinudnih oscilacija sistema.