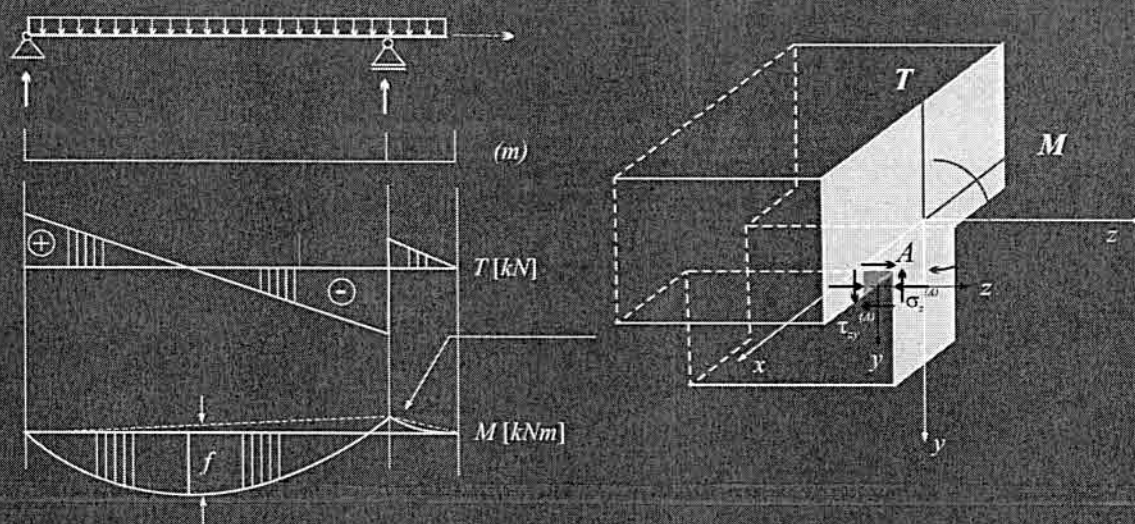


UNIVERZITET CRNE GORE
ARHITEKTONSKI FAKULTET
Podgorica

Olivera Jovanović
Olga Mijušković
Mirjana Đukić

MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA
Zbirka riješenih ispitnih zadataka



Prof. dr Olivera Jovanović
Prof. dr Olga Mijušković
Mr Mirjana Đukić

MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA

Zbirka riješenih ispitnih zadataka

Recenzenti:

Prof. dr Marina Rakočević
redovni profesor Građevinskog fakulteta
Univerziteta Crne Gore
Prof. dr Ljiljana Žugić
vanredni profesor Građevinskog fakulteta
Univerziteta Crne Gore

Izdavač: Univerzitet Crne Gore
Arhitektonski fakultet

Za izdavača: Prof. dr Svetislav G. Popović d.i.a.
dekan Arhitektonskog fakulteta
Univerziteta Crne Gore

Štampa:

Tiraž:

ISBN:

Predgovor

Zbirka riješenih ispitnih zadataka iz Mehanike i Otpornosti materijala namijenjena je studentima Arhitektonskog fakulteta Univerziteta Crne Gore i obuhvata gradivo predviđeno nastavnim planom i programom iz navedenog predmeta, koji se izučava na prvoj godini ovog fakulteta. Mogu je koristiti i studenti drugih fakulteta, čiji programi obuhvataju materiju na koju se Zbirka odnosi.

Zadaci uradjeni i objašnjeni u ovoj Zbirci su izabrani ispitni zadaci iz predmeta Mehanike i Otpornosti materijala, pa se za korisnike Zbirke podrazumijeva da su odslušali predavanja i vježbe i savladali gradivo iz ovog predmeta u dovoljnoj mjeri. Zbirka sadrži objašnjenja, kao i neophodnu teorijsku osnovu za shvatanje i rješavanje problema koji se razmatraju.

Autori se nadaju da će Zbirka biti od velike pomoći studentima u sticanju znanja iz ove oblasti, neophodnog za obrazovanje inženjera arhitektonske struke.

Zahvaljujemo se recezentima koji su, dragocjenim komentarima i detaljnim provjeravanjem rješenja zadataka, doprinijeli kvalitetu Zbirke.

Posebnu zahvalnost dugujemo izdavaču prof.dr Svetu Popoviću, dekanu Arhitektonskog fakulteta Univerziteta Crne Gore, koji je prepoznao potrebu za objavljivanjem ovakvog nastavnog materijala.

U Podgorici, 2018.godine

Autori

Sadržaj

Mehanika

Ispitni rok 1	1
Ispitni rok 2	13
Ispitni rok 3	26
Ispitni rok 4	36
Ispitni rok 5	48
Ispitni rok 6	62
Ispitni rok 7	72
Ispitni rok 8	84
Literatura	97

Otpornost materijala

Ispitni rok 1	98
Ispitni rok 2	114
Ispitni rok 3	128
Ispitni rok 4	138
Ispitni rok 5	150
Ispitni rok 6	161
Ispitni rok 7	173
Ispitni rok 8	186
Literatura	200

Mehanika

Autori:

Prof. dr Olivera Jovanović

Mr Mirjana Đukić

ARHITEKTONSKI FAKULTET U PODGORICI

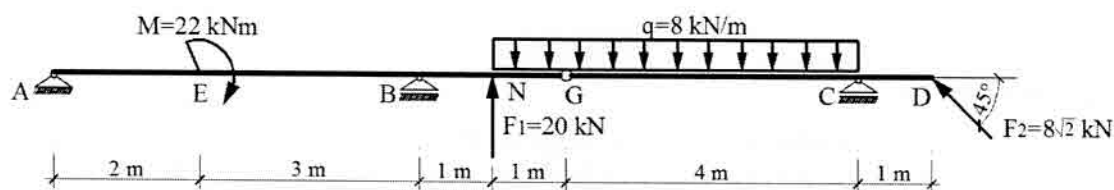
MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA – Mehanika

Ispitni rok 1

1. ZADATAK

Za Gerberov nosač sa jednim zglobom, opterećen spoljašnjim opterećenjem kao na slici 1, odrediti:

- reakcije u osloncima A, B i C;
- dijagrame presječnih sila (N, T, M).

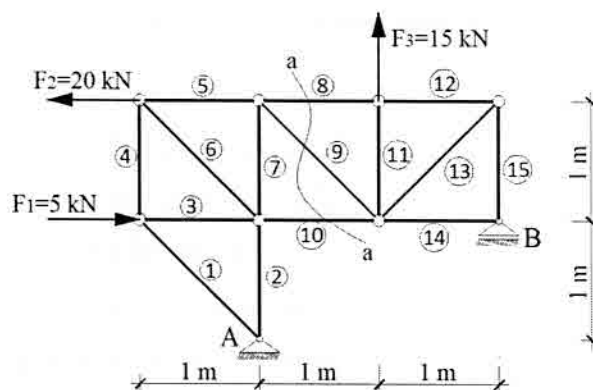


Slika 1

2. ZADATAK

Za rešetkasti nosač opterećen silama kao na slici 2, odrediti:

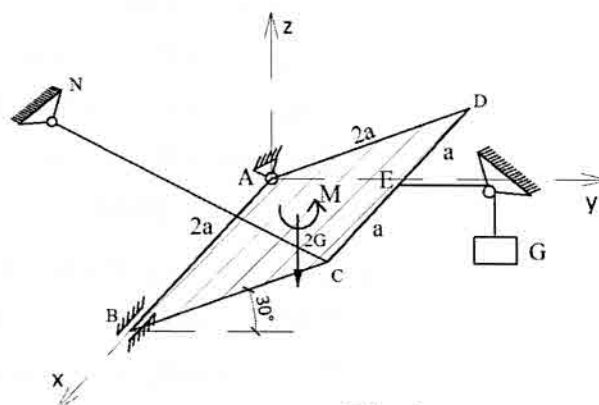
- reakcije u osloncima A i B;
- sile u štapovima metodom Kremone;
- za presjek a-a provjeriti sile metodom Ritera.



Slika 2

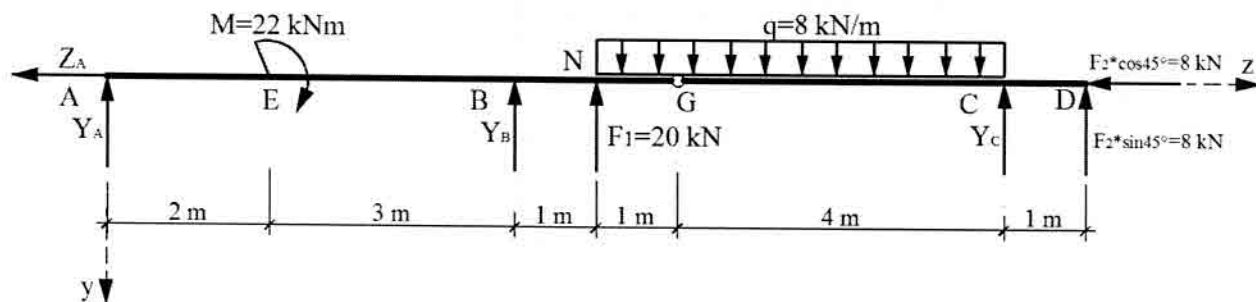
3. ZADATAK

Homogena kvadratna ploča stranice $2a$ i težine $2\vec{G}$ opterećena tegom težine $\vec{G}$ i momentom koji djeluje u ravni ploče $\vec{M} = 2Ga$, smjera obrtanja suprotno kretanja kazaljke na satu, održava se u ravnoteži pomoću sfernog oslonca A i cilindričnog oslonca B i štapa CN bez težine, vezanog za ploču u tački C kao na slici 3. Na drugom kraju štap je vezan u tački N ($2a, -a\sqrt{3}, 2a$). Odrediti reakcije sfernog oslonca A, cilindričnog oslonca B i silu u štapu CN.



Slika 3

1. ZADATAK



Slika 1.1

a) Reakcije oslonaca

Posmatrani nosač AD ima četiri nepoznate reakcije oslonaca kao na slici 1.1. Za nosač u ravni mogu se postaviti tri jednačine ravnoteže, a za Gerberov zglob još jedna momentna jednačina od svih sila koje dejstvuju na nosač, lijevo ili desno od zgloba G.

Tako imamo četiri jednačine ravnoteže iz kojih nalazimo nepoznate reakcije u osloncima Z_A , Y_A , Y_B i Y_C .

Jednačine ravnoteže biramo tako da se iz svake sljedeće jednačine dobije po jedna nepoznata.

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + F_2 \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + 8 = 0$$

$$Z_A = -8 \text{ kN}$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 + F_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 4 - 8 \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 = 0$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 4 - 24 = 0$$

$$Y_C = 6 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 5 - M + F_1 \cdot 6 - q \cdot 5 \cdot 8,5 + Y_C \cdot 11 + F_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 12 = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 5 - 22 + 20 \cdot 6 - 8 \cdot 5 \cdot 8,5 + 6 \cdot 11 + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot 12 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 5 - 80 = 0$$

$$Y_B = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_G^l = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 7 + M + Y_B \cdot 2 + F_1 \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_G^l = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 7 + 22 + 16 \cdot 2 + 20 \cdot 1 - 8 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0$$

$$\sum M_G^l = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 7 + 70 = 0$$

$$Y_A = -10 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B + F_1 - q \cdot 5 + Y_C + F_2 \cdot \sin 45^\circ = -10 + 16 + 20 - 8 \cdot 5 + 6 + 8 = 0$$

U jednačinama ravnoteže kontinualno opterećenje je zamijenjeno ekvivalentnom koncentrisanom silom. Kako je kontinualno opterećenje ravnomjerno raspoređeno, intenzitet ekvivalentne sile je: $F_q = q \cdot l = 8 \cdot 5 \text{ [kN]} = 40 \text{ [kN]}$, a njena napadna linija nalazi se na sredini kontinualnog opterećenja.

Zamjena kontinualnog opterećenja ekvivalentnom silom F_q može se vršiti samo kod pisanja jednačina ravnoteže. Kod crtanja statičkih dijagrama ovakva zamjena nije moguća, pa se kontinualno opterećenje posmatra bez traženja ekvivalentne sile.

b) Dijagrami presječnih sila

Dijagram normalne sile prikazan na slici 1.2 je konstantne vrijednosti na cijeloj dužini nosača, $N = 8 \text{ kN}$. Ova normalna sila je uravnotežena na samom kraju Gerberove grede sa prepustom u tački D, horizontalnom komponentom sile F_2 , tj. $F_2 \cos 45^\circ = 8 \text{ kN}$.

Dijagram transverzalnih sila postoji na cijeloj dužini nosača. Pri crtanju dijagrama transverzalnih sila, slika 1.2, nosač se posmatra kao cjelina. Na dijelu van kontinualnog opterećenja transverzalna sila ima konstantnu vrijednost, dok se linearno mijenja usljed kontinualnog opterećenja.

Analitički izraz za transverzalnu silu od tačke N do tačke C gdje je kontinualno opterećenje konstantne vrijednosti $q = 8 \text{ kN/m}$ ima analitički izraz $T(z) = Y_A + Y_B + F_1 - q \cdot z$, $6 \leq z \leq 11$.

U presjeku nosača u kome je transverzalna sila jednaka nuli, moment savijanja ima maksimalnu vrijednost:

$$18 - (4 - z) = 14 - z$$

$$14 - (4 - z) = 10 + z$$

$$z = 1,75 \text{ m}$$

U tački $z = 1,75 \text{ m}$, dijagram transverzalne sile siječe nultu liniju, odnosno transverzalna sila mijenja znak.

Moment savijanja, slika 1.2, se mijenja linearno do tačke N nosača. Na dijelu NC, gdje je opterećenje kontinualno, analitički izraz za moment je:

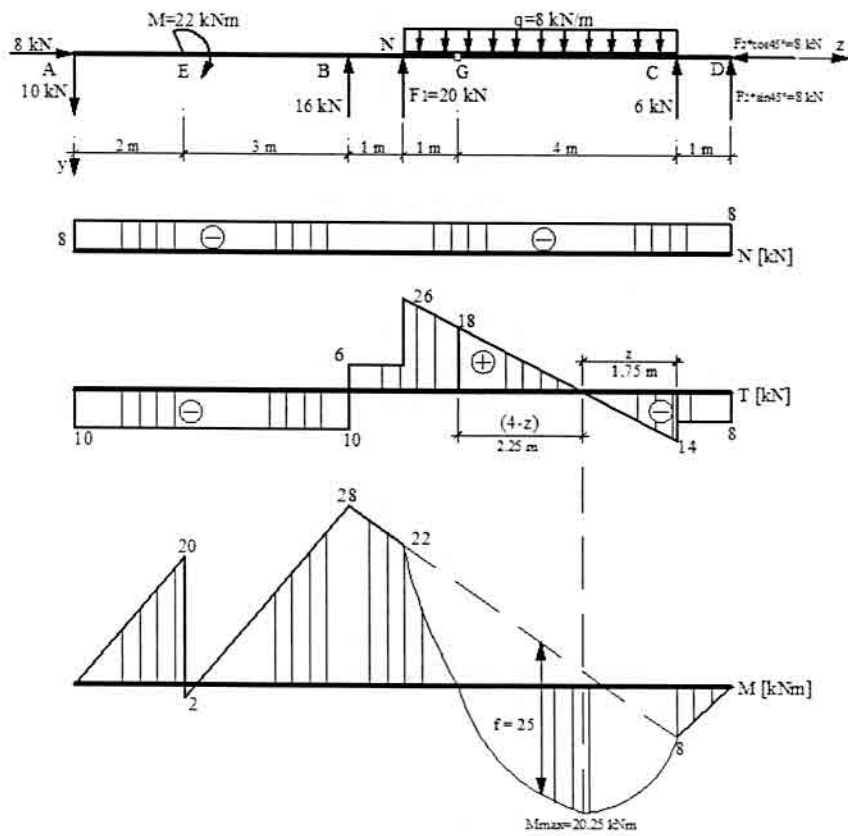
$$M_x(z) = Y_A \cdot z + M + Y_B(z - 5) + F_1(z - 6) - q \cdot \frac{(z - 6)^2}{2}, \text{ za } 6 \leq z \leq 11$$

Na dijelu nosača gdje postoji kontinualno opterećenje, napadni moment se mijenja po paraboli. U tački G moment siječe nultu liniju.

Ekstremna vrijednost momenta u polju GC, za $z = 1,75 \text{ m}$ je:

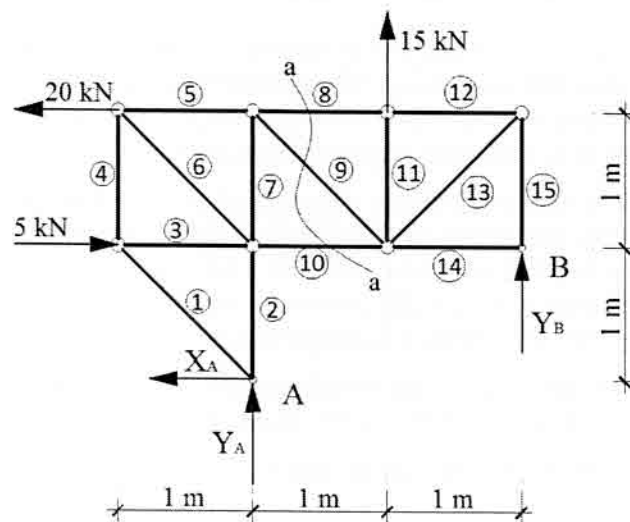
$$M_{max} = F_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2,75 + Y_C \cdot 1,75 - q \cdot 1,75 \cdot \frac{1,75}{2} = 20,25 \text{ kNm}$$

$$M_{max} = 20,25 \text{ kNm}$$



Slika 1.2

2. ZADATAK



Slika 2.1

a) Reakcije oslonaca

Rešetka prikazana na slici 2.1 oslonjena je u tački A na nepokretni i u tački B na pokretni oslonac. Rešetka je spoljašnje statički određena. Za određivanje nepoznatih reakcija treba postaviti tri jednačine ravnoteže za tijelo u ravni.

Jednačine ravnoteže rešetke su:

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A - 5 + 20 = 0 \quad (1)$$

$$X_A = -15 \text{ kN}$$

$$\oplus \sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 2 - 20 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + X_A \cdot 1 = 0 \quad (2)$$

$$Y_A = 10 \text{ kN}$$

$$\ominus \sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 20 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 0 \quad (3)$$

$$Y_B = -25 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B + 15 = 10 - 25 + 15 = 0$$

b) Kremonin plan sila

Kada se odrede nepoznate reakcije veza treba provjeriti da li je rešetka unutrašnje statički određena.

Da bi rešetka bila kruta, kinematički nepomjerljiva figura, treba da broj štapova (s) i broj čvorova (n) zadovolje relaciju: $s = 2n - 3$.

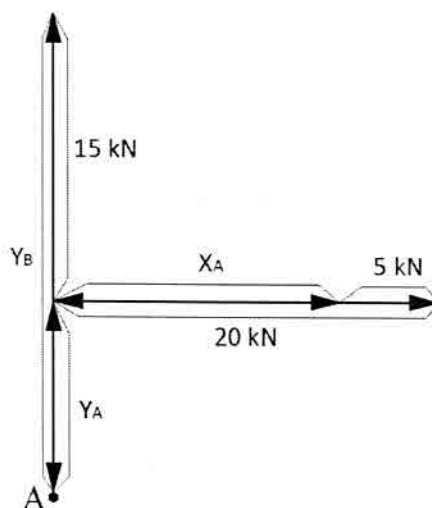
Za posmatranu rešetku je $s = 15$, $n = 9 \Rightarrow 15 = 2 \cdot 9 - 3 \Rightarrow 15 = 15$

Za crtanje Kremoninog plana sila, potrebno je nacrtati zatvoren poligon svih spoljašnjih sila (aktivnih sila i reakcija veza), kao na slici 2.2. Sile treba nanositi redom u jednom smjeru kako se na njih nailazi pri obilaženju rešetke, npr. odaberemo smjer kretanja kazaljke na satu. Tako dobijamo zatvoren poligon sila, s obzirom da je rešetka u ravnoteži.

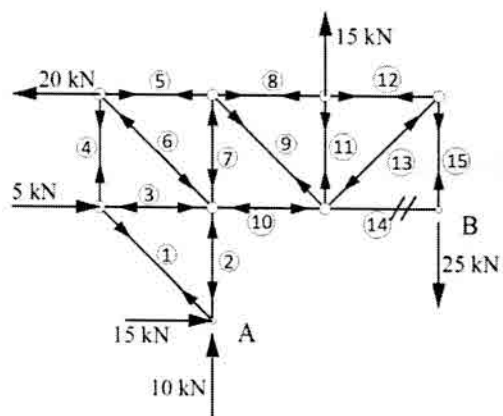
Sada ostaje da se konstruiše zatvoren poligon sila, spoljašnjih i unutrašnjih za svaki čvor. Kada se posmatra jedan čvor, tada zamislimo da smo štapove isjekli i zamijenili reakcijama, silama u štapovima. Da bi sistem sučeljenih sila za taj čvor bio u ravnoteži potrebno je da je poligon sila zatvoren. Kod crtanja poligona sila za svaki čvor treba voditi računa da se svaki čvor obiđe u istom smjeru u kome smo obilazili rešetku pri crtanju poligona spoljašnjih sila.

Na osnovu smjerova sila prilikom zatvaranja svakog poligona zaključujemo da li je štap pritisnut (štap 2) ili zategnut (štap 1). Smjerovi ovih sila dati su na slici 2.3.

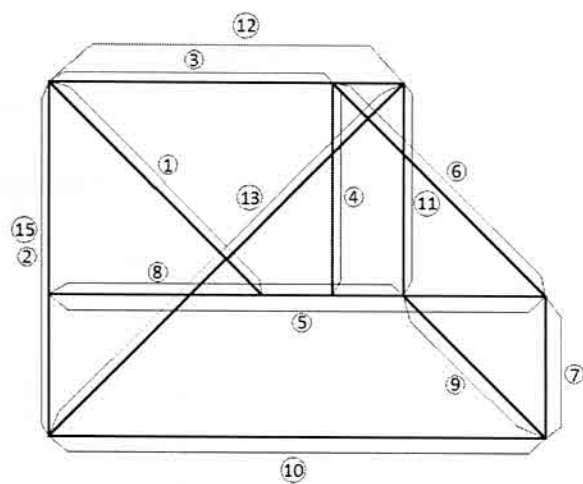
Ovako se dobija Kremonin plan sila prikazan na slici 2.4



Slika 2.2



Slika 2.3



Slika 2.4

U tabeli 1 date su dobijene vrijednosti intenziteta i znak sila u štapovima posmatrane rešetke.

Tabela 1

	Zatezanje +	Pritisak -
1	$15\sqrt{2}$	
2		25
3		20
4	15	
5	35	
6		$15\sqrt{2}$
7		10
8	25	
9	$10\sqrt{2}$	
10		35
11	15	
12	25	
13		$25\sqrt{2}$
14	-	-
15	25	

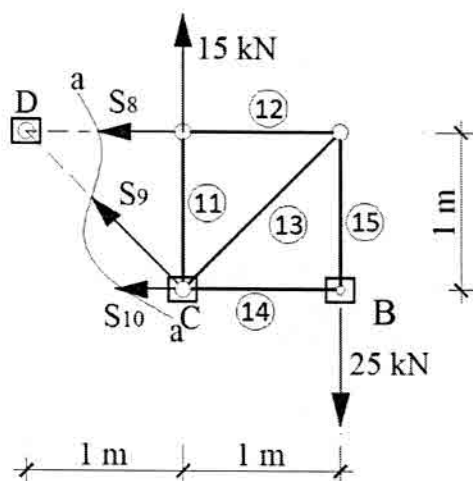
c) Riterova metoda za presjek a-a:

Za određivanje sila u naznačenom presjeku metodom Ritera, posmatraćemo rešetku kojoj smo odredili reakcije veza, i zamišljeno je presjekli po štapovima u kojima tražimo sile, kao što je prikazano na slici 2.5. Broj presječenih štapova ne treba da bude veći od tri, jer za ravnotežu tijela u ravni možemo posmatrati tri uslova ravnoteže. Zatim se posmatra ravnoteža jednog dijela rešetke, obično onog dijela sa manje sila.

Iz praktičnih razloga kod ove metode kao jednačine ravnoteže koriste se tri momentne jednačine za tri nekolinearne tačke.

$$\sum M_C = 0; \sum M_D = 0; \sum M_B = 0$$

Rješavanjem ovih jednačina dobijaju se sile u štapovima u traženom presjeku, čime se potvrđuju rješenja dobijena grafičkim putem, Kremoninom metodom.



Slika 2.5

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow S_8 \cdot 1 - 25 \cdot 1 = 0$$

$$S_8 = 25 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow S_{10} \cdot 1 - 15 \cdot 1 + 25 \cdot 2 = 0$$

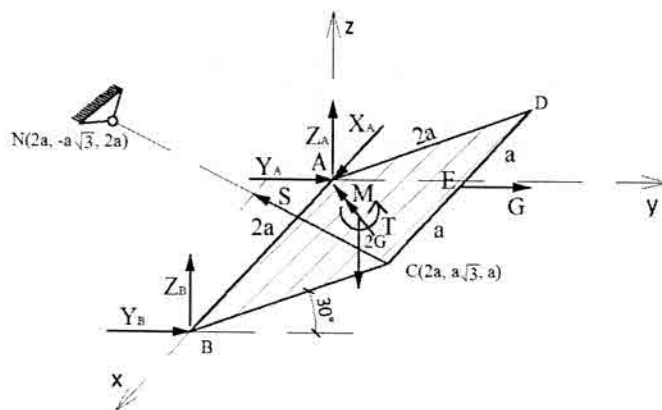
$$S_{10} = -35 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow S_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - S_8 \cdot 1 + 15 \cdot 1 = 0$$

$$S_9 = -10\sqrt{2} \text{ kN}$$

3. ZADATAK

Pravougaona ploča u položaju prikazanom na slici 3.1 održava se pomoću sfernog oslonca A, cilindričnog oslonca B i štapa CN.



Slika 3.1

Kada se ploča oslobodi od navedenih veza, njihovo dejstvo se zamijenjuje reakcijama. Dejstvo sfernog oslonca zamijenjeno je sa tri međusobno upravne sile, pa se reakcija u osloncu A može analitički napisati kao:

$$\vec{F}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}$$

S obzirom da je osa x, osa cilindričnog ležišta, u zglobu B postoje dvije sile Y_B i Z_B , pa se reakcija B analitički može predstaviti kao:

$$\vec{F}_B = Y_B \vec{j} + Z_B \vec{k}$$

Silu S u štapu CN, za koju je pretpostavljeno da je sila zatezanja i usmjerena je od ploče, analitički možemo predstaviti kao:

$$\vec{S} = \{S \cos \alpha, S \cos \beta, S \cos \gamma\}$$

Napadna linija sile S se poklapa sa vektorom CN, pri čemu je $C(2a, a\sqrt{3}, a)$ i $N(2a, -a\sqrt{3}, 2a)$:

$$|\overline{CN}| = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + a^2} = a\sqrt{13}$$

a odgovarajući kosinusi uglova su:

$$\cos \alpha = \frac{x_N - x_C}{|\overline{CN}|} = \frac{2a - 2a}{a\sqrt{13}} = 0$$

$$\cos \beta = \frac{y_N - y_C}{|CN|} = \frac{-a\sqrt{3} - a\sqrt{3}}{a\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_N - z_C}{|CN|} = \frac{2a - a}{a\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Sada možemo napisati analitički izraz za silu S:

$$\vec{S} = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}S\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{13}}S\vec{k}$$

Od aktivnih sila na ploču djeluje težina G. Dejstvo tega na ploču u tački E zamijenjeno je silom $\vec{G}$, smjera kao na slici 3.1, s obzirom na činjenicu da je uže neistegljivo i može biti opterećeno samo na zatezanje. Sve aktivne sile i reakcije veza prikazane su na slici 3.1.

Da bi odredili šest nepoznatih reakcija veza, treba da postavimo šest jednačina ravnoteže.

Prve tri jednačine ravnoteže sistema sila obezbjeđuju da je glavni vektor datog sistema sila koje djeluju na ploču jednak nuli, tj.:

$$\sum X = 0; \quad X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_A + Y_B + G - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}S = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0; \quad Z_A + Z_B - 2G + \frac{1}{\sqrt{13}}S = 0 \quad (3)$$

Za dati koordinatni sistem koordinate napadnih tačaka svih sila koje djeluju na ploču su: A(0, 0, 0), C(2a, $a\sqrt{3}$, a), E(a, $a\sqrt{3}$, a) i T(a, $a\sqrt{3}/2$, a/2), gdje je T napadna tačka sile težine ploče.

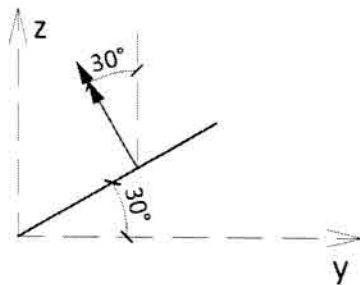
Sada možemo odrediti momente svih sila u odnosu na koordinatni početak:

$$\vec{M}_A^{(\vec{S})} = \vec{r}_C \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & a\sqrt{3} & a \\ 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}S & \frac{1}{\sqrt{13}}S \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{13}}S\vec{i} - \frac{2a}{\sqrt{13}}S\vec{j} - \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}S\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{G})} = \vec{r}_E \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a\sqrt{3} & a \\ 0 & G & 0 \end{vmatrix} = -aG\vec{i} + aG\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(2\vec{G})} = \vec{r}_T \times 2\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & \frac{a\sqrt{3}}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & -2G \end{vmatrix} = -aG\sqrt{3}\vec{i} + 2aG\vec{j}$$

Moment sile koji djeluje u ravni ploče može se predstaviti kao na slici 3.2. Vektor momenta savijanja je:



Slika 3.2

$$\begin{aligned} \vec{M} &= -M \sin 30^\circ \vec{j} + M \cos 30^\circ \vec{k} = \\ &= -\frac{M}{2} \vec{j} + \frac{M\sqrt{3}}{2} \vec{k} = \\ &= -Ga\vec{j} + Ga\sqrt{3}\vec{k} \end{aligned}$$

Momentne jednačine ravnoteže obezbjeđuju da komponente glavnog momenta budu jednake nuli. One su:

$$\sum M_x = 0; \quad \frac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{13}}S - aG - aG\sqrt{3} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; \quad -2aZ_B - \frac{2a}{\sqrt{13}}S + 2aG - M \sin 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0; \quad 2aY_B - \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}S + aG + M \cos 30^\circ = 0 \quad (6)$$

Rješavajući jednačine od (1) do (6) dobijaju se vrijednosti za reakcije veza i silu u štapu CN:

$$X_A = 0$$

$$S = \frac{G\sqrt{13}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right)$$

$$Y_A = \frac{G}{2} \sqrt{3} (1 + \sqrt{3})$$

$$Y_B = \frac{7G}{6} (1 + \sqrt{3})$$

$$Z_A = \frac{3G}{2}$$

$$Z_B = \frac{G}{18} (3 - 2\sqrt{3})$$

ARHITEKTONSKI FAKULTET U PODGORICI

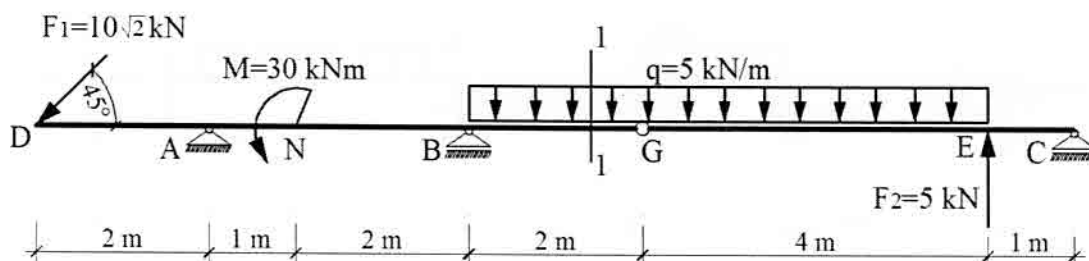
MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA – Mehanika

Ispitni rok 2

1. ZADATAK

Za Gerberov nosač sa jednim zglobom koji je opterećen spoljašnjim opterećenjem kao na slici 1, odrediti:

- reakcije u osloncima A, B i C;
- analitički izraz za presječne sile (N, T, M) u presjeku 1-1;
- dijagrame presječnih sila (N, T, M).

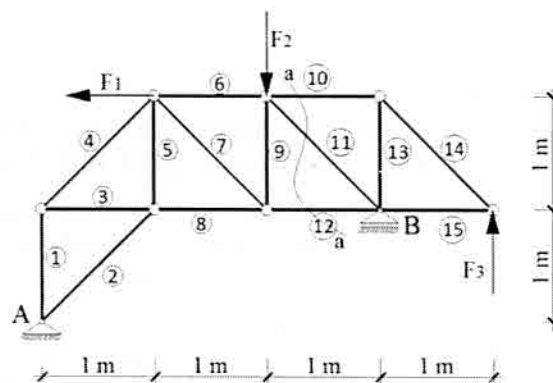


Slika 1

2. ZADATAK

Za rešetkasti nosač opterećen silama $F_1 = 5$ kN, $F_2 = 20$ kN i $F_3 = 15$ kN, kao na slici 2, odrediti:

- reakcije oslonaca;
- sile u štapovima metodom Kremone
- za presjek a-a provjeriti sile u štapovima metodom Ritera.

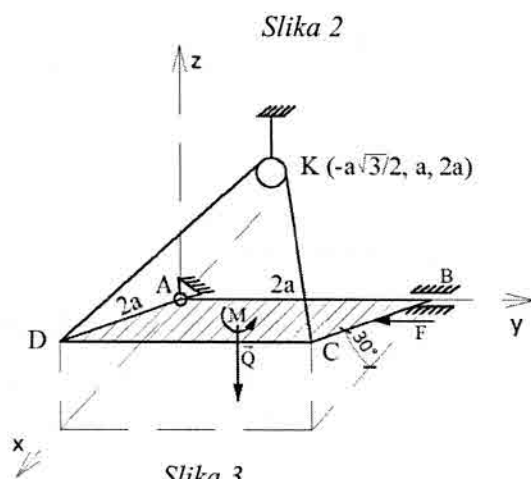


3. ZADATAK

Homogena kvadratna ploča ABCD stranice $2a$ i težine Q , u položaju prikazanom na slici 3, održava se pomoću sfernog zgloba A, cilindričnog ležišta B i nerastegljivog užeta, koje je u tačkama C i D vezano za ploču i prebačeno preko nepokretnog kotura, koji je postavljen u tački

$K(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, a, 2a)$. Ploča horizontalnom ravni zaklapa ugao od 30° , i u njoj ravni djeluje moment $M = Qa\frac{\sqrt{3}}{2}$, smjera kao na slici, suprotno kretanju kazaljke na satu.

Ako na ploču djeluje sila $\vec{F} = -\frac{Q}{2}\vec{j}$, odrediti reakcije u ležištima A i B i silu u užetu CKD.

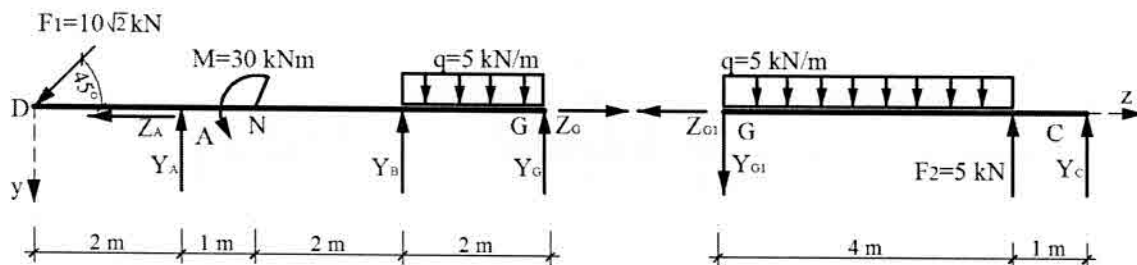


Slika 3

1. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

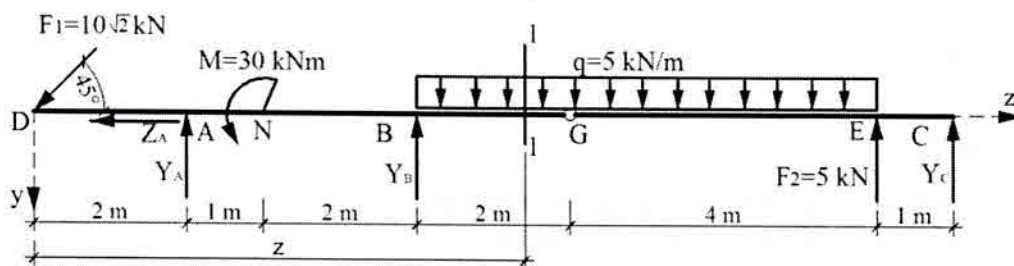
Oslobađanjem nosača DC od veza nepokretnog oslonca A i pokretnih oslonaca B i C, imamo četiri reakcije veza (Z_A , Y_A , Y_B i Y_C), odnosno jedan put statički neodređen nosač. Bez Gerberovog zgloba ovaj linijski nosač bi predstavljao kontinualni nosač sa prepustom, za koji se na osnovu samo statičkih uslova ravnoteže ne bi mogle odrediti nepoznate reakcije u osloncima, već bi imali statički neodređen nosač. Tako na mjestu zgloba možemo podijeliti navedeni nosač na dva nosača DG i GC, kao što je prikazano na slici 1.1. Unutrašnje reakcije u zglobu postavljene su po principu akcije i reakcije $Y_{G1} = Y_G$ i $Z_{G1} = Z_G$.



Slika 1.1

Računanje ovih veličina može se izbjeći imajući u vidu suštinu Gerberovog zgloba, postavljanjem momentne jednačine, svih sila i spregova sa jedne ili druge strane zgloba za sam zglob da je jednaka nuli, $\sum M_G^d = 0$ i $\sum M_G^l = 0$.

Za određivanje nepoznatih reakcija veza možemo koristiti tri jednačine ravnoteže za cio nosač i dvije momentne jednačine za Gerberov zglob. Koliko jednačina ćemo koristiti zavisi od broja nepoznatih reakcija veza, a koje ćemo koristiti to je stvar našeg izbora.



Slika 1.2

U ovom zadatku jednačine ravnoteže su birane tako da se iz svake sljedeće odredi po jedna nepoznata reakcija.

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + F_1 \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + 10 = 0$$

$$Z_A = -10 \text{ kN}$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 5 - q \cdot 4 \cdot 2 + F_2 \cdot 4 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 0$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 5 - 20 = 0$$

$$Y_C = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 3 - M - F_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 + q \cdot 6 \cdot 3 - Y_C \cdot 7 - F_2 \cdot 6 = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 3 - 30 - 10 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 7 - 5 \cdot 6 = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 3 - 48 = 0$$

$$Y_A = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_G^l = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 5 - M + Y_B \cdot 2 - F_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 7 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_G^l = 0 \Rightarrow 16 \cdot 5 - 30 + Y_B \cdot 2 - 10 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

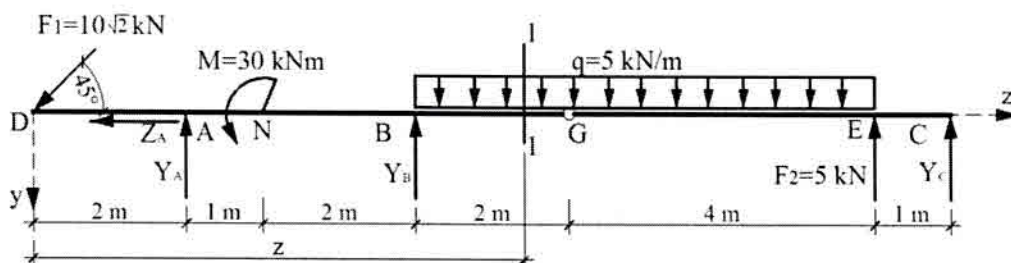
$$\sum M_G^l = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 2 - 30 = 0$$

$$Y_B = 15 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - F_1 \cdot \sin 45^\circ - q \cdot 6 + Y_C + F_2 = 16 + 15 - 10 - 5 \cdot 6 + 4 + 5 = 0$$

c) *Analički izrazi za presjek 1-1*



Slika 1.3

Dio BG: $T(z) = -F_1 \sin 45^\circ + Y_A + Y_B - q(z - 5)$

$5 \leq z \leq 7$ $M(z) = -F_1 \sin 45^\circ \cdot z + Y_A(z - 2) + Y_B(z - 5) - M - q \frac{(z-5)^2}{2}$

c) *Dijagrami presječnih sila*

Dijagram normalnih sila postoji samo na dijelu prepusta grede DA, lijevo od oslonca A, tj. gdje postoji projekcija sila na pravac ose z grede, kao što je prikazano na slici 1.4.

Dio DA:

$$0 \leq z \leq 2 \quad N = -F_1 \cos 45^\circ = -10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -10 \text{ kN}$$

Dijagram transverzalnih sila postoji na cijeloj dužini nosača kao što je prikazano na slici 1.4.

U tački gdje dijagram transverzalnih sila siječe nultu liniju postoji lokalna ekstremna vrijednost napadnog momenta:

Položaj te tačke određuje se iz dijagrama transverzalne sile primjenom proporcije sa slike 1.4:

$$11: (4 - z) = 9: z$$

$$9(4 - z) = 11z$$

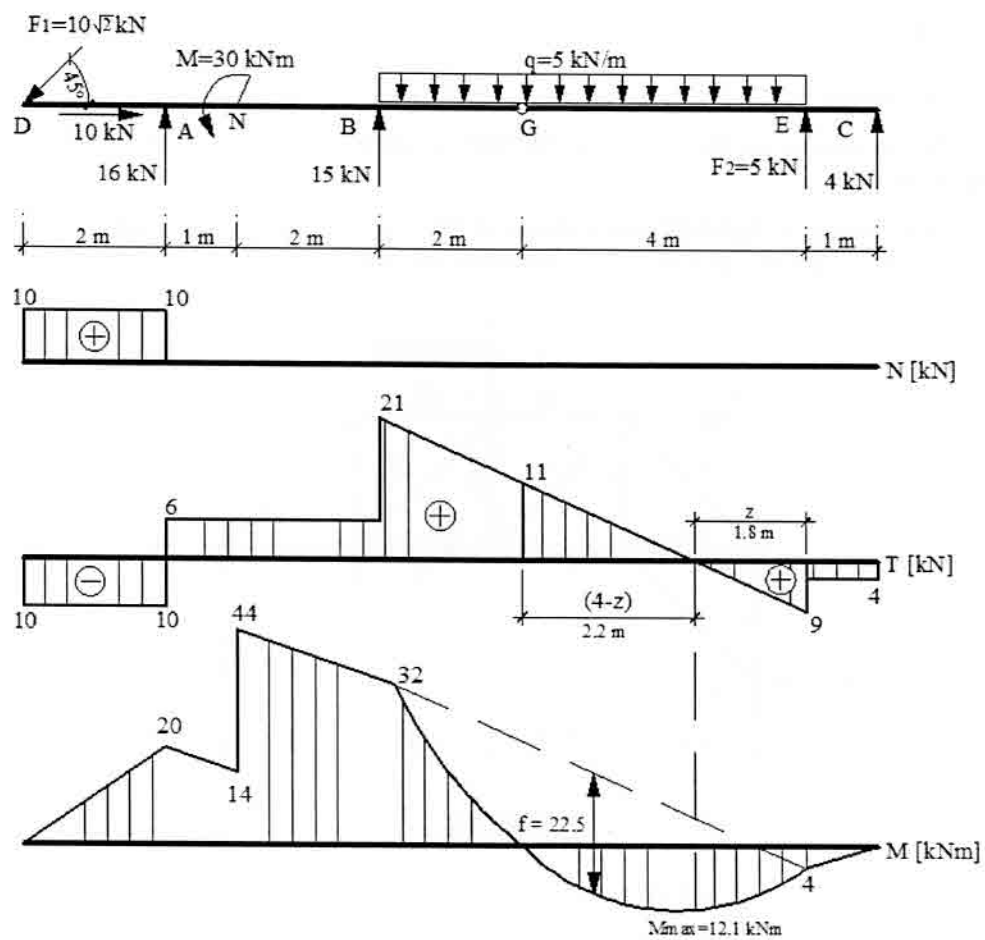
$$z = 1,8 \text{ m}$$

Ekstremna vrijednost momenta u polju GE, u presjeku $z = 1,8 \text{ m}$, gdje je transverzalna sila jednaka nuli je:

$$M_{max} = Y_c \cdot 2,8 + F_2 \cdot 1,8 - q \cdot 1,8 \cdot \frac{1,8}{2} = 12,1 \text{ kNm}$$
$$M_{max} = 12,1 \text{ kNm}$$

Za određivanje dijagrama napadnog momenta potrebno je izračunati i vrijednosti momenta u karakterističnim tačkama D, A, B, G, E i C.

U tačkama D, G i C moment će biti jednak nuli. Spajanjem vrijednosti momenta od B do E parabolično, a u ostalom dijelu pravolinijski, dobija se dijagram momenata kao na slici 1.4.



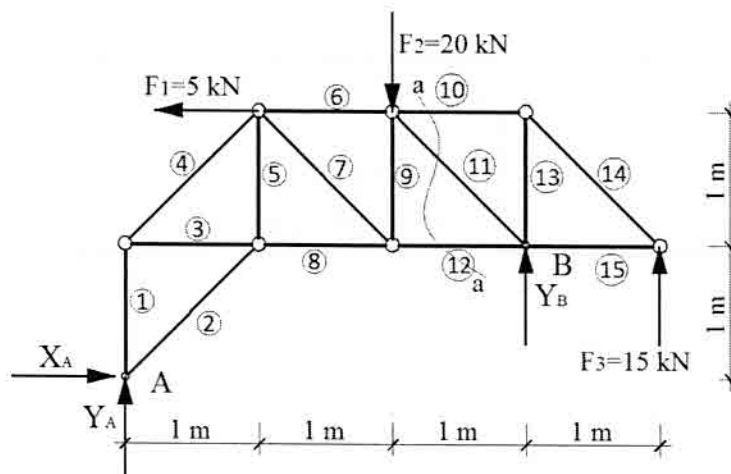
Slika 1.4

2. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Riješiti rešetku prikazanu na slici 2.1 znači odrediti spoljašnje reakcije veza u osloncima A i B, i sile u svim štapovima.

Za određivanje reakcija u nepokretnom osloncu A (X_A , Y_A) i reakcije Y_B u pokretnom osloncu B, koristićemo tri jednačine ravnoteže, koje možemo napisati, za tijelo u ravni i to:



Slika 2.1

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A - 5 = 0 \quad (1)$$

$$X_A = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 20 \cdot 1 - 15 \cdot 1 - X_A \cdot 1 = 0 \quad (2)$$

$$Y_A = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 3 - 20 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 0 \quad (3)$$

$$Y_B = -10 \text{ kN}$$

Kontrola:

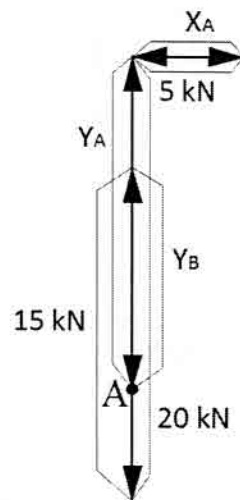
$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - 20 + 15 = 15 - 10 + 15 - 20 = 0$$

Tako smo odredili sve reakcije oslonaca koje djeluju na posmatranu rešetku.

b) Kremonin plan sila

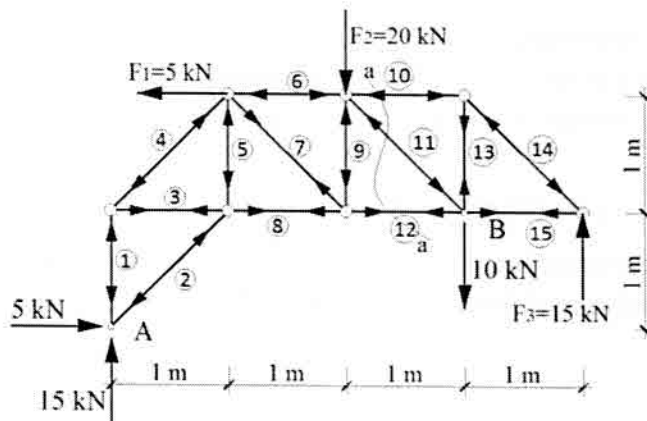
Prije nego pređemo na određivanje nepoznatih sila u štapovima, treba provjeriti da li je rešetka unutrašnje statički određena. Između broja štapova (s) i broja čvorova (n) postoji funkcionalna zavisnost $s = 2n - 3$, koja je u ovom slučaju zadovoljena sa $s = 15$ i $n = 9$, pa se zaključuje da je rešetka stabilna figura i unutrašnje statički određena.

Kremonin plan sila je grafička metoda određivanja nepoznatih sila u štapovima rešetke. Osnovu ovog plana sila čini zatvoren poligon od aktivnih sila i spoljašnjih reakcija veza čije crtanje počinje od bilo koje spoljašnje sile i dalje se nastavlja nanošenje sila obilazeći rešetku u jednom smjeru, npr u smjeru kazaljke na satu, slika 2.2.

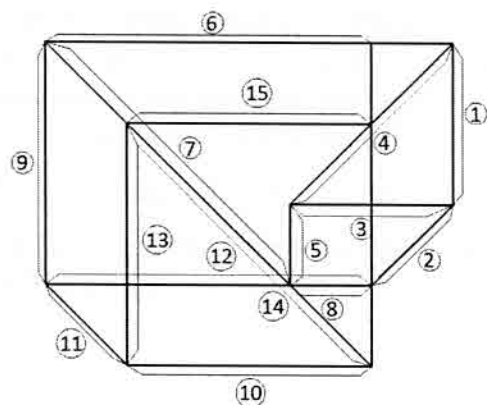


Slika 2.2

U istom smjeru, obilazeći čvor po čvor, crtaju se poligoni sila za svaki čvor i iz svakog čvora se odrede najviše po dvije nepoznate sile, kao što je prikazano na slici 2.3. Sile reakcije svakog štapa koje djeluju na čvorove koje taj štاپ spaja jednake su po intenzitetu i pravcu a suprotnog smjera. Ako je sila reakcije štapa usmjerena ka čvoru, onda je taj štاپ pritisnut. Ukoliko je usmjerena od čvora, tada je štاپ zategnut. Uzima se da su sile u štapiu napregnutom na zatezanje pozitivne, za razliku od onih u pritisnutom štapiu, koje su negativne. Kako je štاپ opterećen zaključujemo na osnovu slika 2.3 i 2.4 gdje su prikazane unutrašnje sile u štapovima.



Slika 2.3



Slika 2.4

Intenziteti dobijenih sila u štapovima rešetke kao i njihov znak, dati su u tabeli 1:

Tabela 1

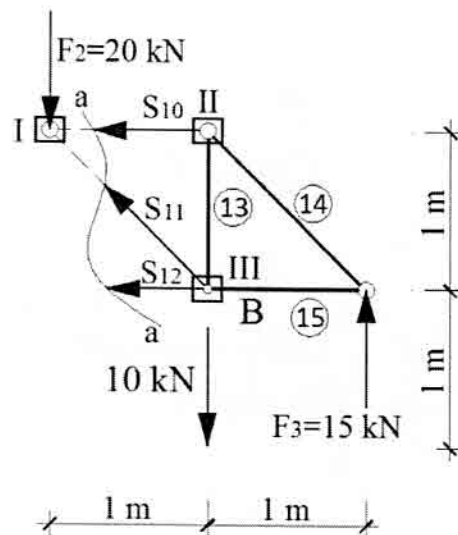
	Zatezanje +	Pritisak -
1		10
2		$5\sqrt{2}$
3	10	
4		$10\sqrt{2}$
5		5
6		20
7	$15\sqrt{2}$	
8	5	
9		15
10		15
11		$5\sqrt{2}$
12	20	
13	15	
14		$15\sqrt{2}$
15	15	

c) Riterova metoda za presjek a-a:

Da bi odredili vrijednosti nepoznatih sila u štapovima 10, 11 i 12 Riterovom metodom, treba zamišljeno presjeći rešetku po tim štapovima kao na slici 2.4. Tada se posmatra samo jedan dio rešetke i to onaj sa manje sila iz praktičnih razloga. U ovom slučaju, to je desni dio rešetke i tretira se kao ploča na koju dejstvuju:

aktivna sila $F_3 = 15$ kN, reakcija u osloncu B, $Y_B = -10$ kN i sile S_{10} , S_{11} i S_{12} .

Sada se dalje postupak svodi na pisanje jednačina ravnoteže za sistem u ravni i to tri momentne jednačine za tri nekolinearne tačke kao alternativnog oblika jednačina ravnoteže. One su:



Slika 2.4

$$\sum M_I = 0 \Rightarrow S_{12} \cdot 1 - 15 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 0$$

$$S_{12} = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_{II} = 0 \Rightarrow S_{12} \cdot 1 + S_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - 15 \cdot 1 - 20 \cdot 1 = 0$$

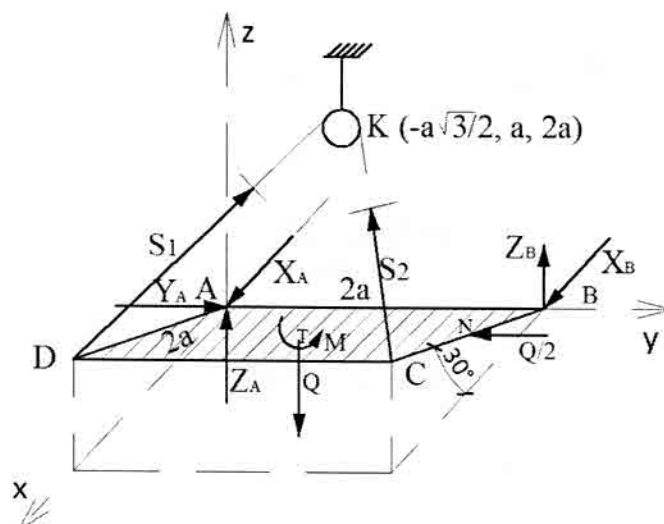
$$S_{11} = 5\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum M_{III} = 0 \Rightarrow S_{10} \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 1 = 0$$

$$S_{10} = -15 \text{ kN}$$

Dobili smo sile u štapovima u traženom presjeku čime se potvrđuju rješenja dobijena grafičkim putem, Kremoninom metodom.

3. ZADATAK



Slika 3.1

Na slici 3.1 ploča je oslobođena od veza. U neistegljivom užetu CKD u svakom njegovom presjeku prenosi se ista sila $S_1 = S_2 = S$.

Nepoznate reakcije veza kod ove ploče su X_A , Y_A , Z_A , X_B , Z_B , S , i za njihovo određivanje treba postaviti šest jednačina ravnoteže za tijelo u prostoru.

Za određivanje projekcija sila S_1 i S_2 na ose datog koordinatnog sistema, potrebno je odrediti koordinate početne i krajnje tačke pravca sile.

Koordinate ovih tačaka su:

$$K\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, a, 2a\right), C(2a \cos 30^\circ, 2a, 2a \sin 30^\circ) \text{ i } D(2a \cos 30^\circ, 0, 2a \sin 30^\circ),$$

pa su sile:

$$\vec{S}_1 = S \cdot \vec{\lambda}_{DK}$$

$$\vec{S}_1 = \frac{S}{\Delta K} [(X_K - X_D)\vec{i} + (Y_K - Y_D)\vec{j} + (Z_K - Z_D)\vec{k}]$$

$$\overline{DK} = \sqrt{9 \frac{3a^2}{4} + a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{35}{4} a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{35}$$

$$\vec{S}_1 = \frac{s}{\frac{a}{2}\sqrt{35}} \left[\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2} - a\sqrt{3} \right) \vec{i} + (a - 0)\vec{j} + (2a - a)\vec{k} \right]$$

$$\vec{S}_1 = -\frac{3}{2} \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S \vec{i} + \frac{a}{2\sqrt{35}} S \vec{j} + \frac{a}{2\sqrt{35}} S \vec{k}$$

$$\vec{S}_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{35}} S \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{35}} S \vec{k}$$

$$\vec{S}_2 = S \cdot \vec{\lambda}_{CK}$$

$$\vec{S}_2 = \frac{S}{\overline{CK}} [(X_K - X_C) \vec{i} + (Y_K - Y_C) \vec{j} + (Z_K - Z_C) \vec{k}]$$

$$\overline{CK} = \sqrt{9 \frac{3a^2}{4} + a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{35}{4} a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{35}$$

$$\vec{S}_2 = \frac{S}{\frac{a}{2}\sqrt{35}} \left[\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2} - a\sqrt{3} \right) \vec{i} + (a - 2a) \vec{j} + (2a - a) \vec{k} \right]$$

$$\vec{S}_2 = -\frac{3}{2} \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S \vec{i} - \frac{a}{2\sqrt{35}} S \vec{j} + \frac{a}{2\sqrt{35}} S \vec{k}$$

$$\vec{S}_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{35}} S \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{35}} S \vec{k}$$

Osim ovih sila na ploču djeluju aktivne sile i to sila težine Q u težištu ploče T (u presjeku dijagonala ploče) koja je u odnosu na dati koordinatni sistem određena sa $\vec{Q} = -Q\vec{k}$ i sila $\frac{Q}{2}$ u tački N , čiji je analitički izraz $\frac{\vec{Q}}{2} = -\frac{Q}{2}\vec{j}$.

Kada smo našli analitičke izraze za sile možemo napisati uslove ravnoteže sistema sila koji obezbjeđuju da je glavni vector datog sistema sila koji djeluje na ploču, jednak nuli, tj.:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + X_B - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + \frac{2}{\sqrt{35}} S - \frac{2}{\sqrt{35}} S - \frac{Q}{2} = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B - Q + \frac{2}{\sqrt{35}} S + \frac{2}{\sqrt{35}} S = 0 \quad (3)$$

Momenti svih sila u odnosu na koordinatni početak su:

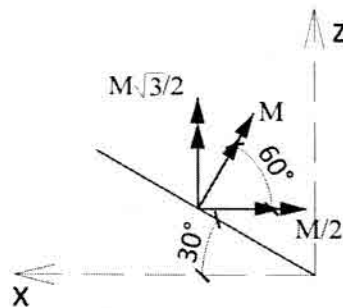
$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_1)} = \vec{r}_D \times \vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a \cos 30^\circ & 0 & 2a \sin 30^\circ \\ -\frac{3\sqrt{3}S}{\sqrt{35}} & \frac{2S}{\sqrt{35}} & \frac{2S}{\sqrt{35}} \end{vmatrix} = \frac{2a}{\sqrt{35}} S \vec{i} - \frac{2a}{\sqrt{35}} S (\sqrt{3} + 1) \vec{j} + \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S \vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_2)} = \vec{r}_C \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a \cos 30^\circ & 2a & 2a \sin 30^\circ \\ -\frac{3\sqrt{3}S}{\sqrt{35}} & -\frac{2S}{\sqrt{35}} & \frac{2S}{\sqrt{35}} \end{vmatrix} = \frac{6a}{\sqrt{35}} S \vec{i} - \frac{5a}{\sqrt{35}} S \vec{j} + \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{35}} S \vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{Q})} = \vec{r}_T \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos 30^\circ & a & a \sin 30^\circ \\ 0 & 0 & -Q \end{vmatrix} = -aQ \vec{i} - \frac{a\sqrt{3}}{2} Q \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\frac{\vec{Q}}{2})} = \vec{r}_N \times \frac{\vec{Q}}{2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos 30^\circ & 2a & a \sin 30^\circ \\ 0 & -\frac{Q}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{aQ}{4} \vec{i} - \frac{aQ}{4} \sqrt{3} \vec{k}$$

dok moment M koji djeluje u ravni ploče ima projekcije i na x i na z osu, pa je njegov analitički izraz:



Slika 3.2

$$\vec{M} = -\frac{M}{2} \vec{i} + \frac{M\sqrt{3}}{2} \vec{k}$$

Preostala tri analitička uslova ravnoteže koja obezbjeđuju da je glavni moment datog sistema sila koji djeluje na ploču, jednak nuli, su:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow Z_B \cdot 2a - \frac{2a}{\sqrt{35}} S + \frac{6a}{\sqrt{35}} S - aQ + \frac{a}{4} Q - \frac{M}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -\frac{2a}{\sqrt{35}}S(\sqrt{3} + 1) - \frac{5a}{\sqrt{35}}S - \frac{a\sqrt{3}}{2}Q = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow -X_B \cdot 2a + \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}S + \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}S - \frac{aQ}{4}\sqrt{3} + \frac{M\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (6)$$

Rješavajući sistem od šest jednačina ravnoteže sa šest nepoznatih dobijamo da je:

$$X_A = \frac{45Q}{2\sqrt{3} + 7} + \frac{Q\sqrt{3} - 3Q}{4} = 3,983Q$$

$$Y_A = \frac{Q}{2} = 0,5Q$$

$$Z_A = \frac{11Q + Q\sqrt{3}}{8} + \frac{Q\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 7} = 1,757Q$$

$$X_B = \frac{3Q - Q\sqrt{3}}{4} - \frac{9Q}{2\sqrt{3} + 7} = -0,543Q$$

$$Z_B = \frac{Q\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 7} + \frac{2Q + Q\sqrt{3}}{8} = 0,632Q$$

$$S = -\frac{Q\sqrt{70}}{2(2\sqrt{3} + 7)} = -43,774Q$$

ARHITEKTONSKI FAKULTET U PODGORICI

MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA – Mehanika

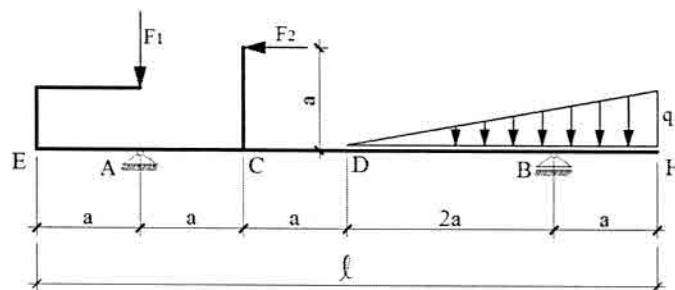
Ispitni rok 3

1. ZADATAK

Za gredu sa prepustima opterećenu kao na slici 1, odrediti:

- reakcije oslonaca;
- nacrtati dijagrame presječnih sila (N, T, M).

Dato je $l = 6a$, $a = 1\text{ m}$, $F_1 = 2\text{ kN}$, $F_2 = 3\text{ kN}$, $q = 6\text{ kN/m}$.

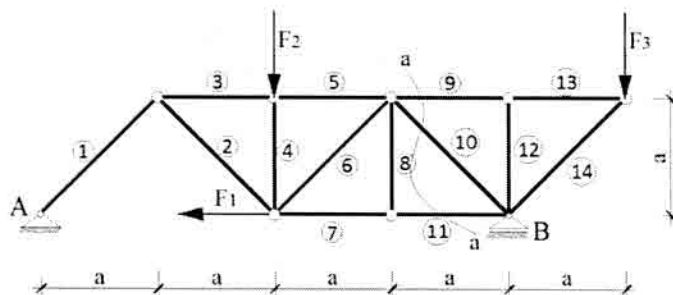


Slika 1

2. ZADATAK

Za rešetkasti nosač opterećen silama $F_1 = 3\text{ kN}$, $F_2 = 3\text{ kN}$ i $F_3 = 2\text{ kN}$, kao na slici 2, odrediti:

- reakcije oslonaca;
- sile u štapovima metodom Kremone;
- za presjek a-a provjeriti sile metodom Ritera.

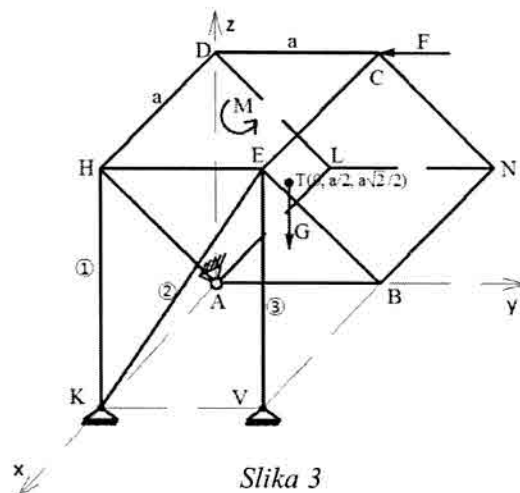


Slika 2

Dato je rastojanje $a = 1\text{ m}$.

3. ZADATAK

Kocka stranice a i težine $\vec{G}$ svojom stranicom AB oslonjena je na y -osu i sa ravni xOy zaklapa ugao od 45° . U tački C kocke dejstvuje sila $\vec{F}$ paralelna y -osi, pri čemu je $\vec{F} = -G\vec{j}$. U ravni HECD kocke dejstvuje spreg sila intenziteta momenta $\vec{M} = \frac{Ga\sqrt{2}}{2}$ smjera obrtanja suprotno kretanju kazaljke na satu, kao na slici 3. Odrediti nepoznate reakcije u osloncu A i sile u štapovima HK, EV i KE.



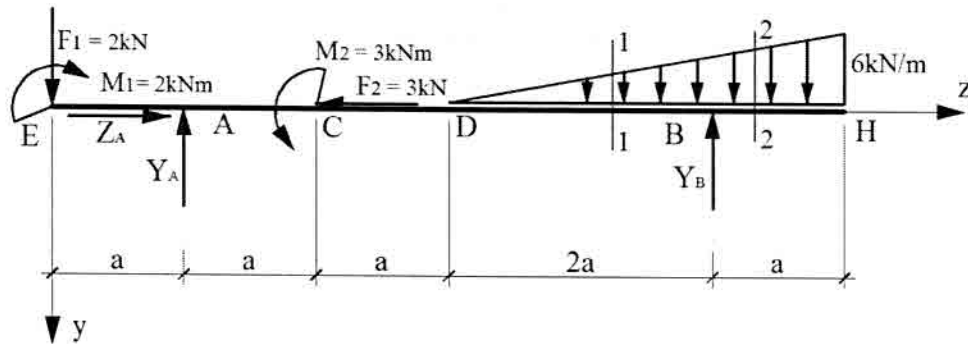
Slika 3

1. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Za posmatrani nosač koji ima tri nepoznate reakcije u osloncima A i B; (Z_A , Y_A i Y_B), postavimo tri jednačine ravnoteže tijela u ravni.

Prije toga sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ treba redukovati na nosač u tačkama E i C, kao što je to prikazano na slici 1.1.



Slika 1.1

Redukcijom vertikalne sile F_1 , u tačku E nosača, dobijamo u njoj i silu F_1 i spreg momenta $M_1 = F_1 \cdot a = 2\text{ kNm}$, dok redukcijom horizontalne sile F_2 u tačku C nosača, u njoj se pojavljuje sila F_2 i spreg sile momenta $M_2 = F_2 \cdot a = 3\text{ kNm}$.

Koncentrisana sila, intenziteta $F_q = \frac{3a \cdot q}{2} = 9\text{ kN}$, ekvivalentna je mehaničkom dejstvu trougaonog kontinualnog opterećenja i dejstvuje u težištu površine, ograničene kontinualnim opterećenjem (slika 1.1), tj. na rastojanju $2a$ od tačke D, u desno. Sada se mogu napisati jednačine ravnoteže:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 4a - q \cdot \frac{3a}{2} \cdot 4a + M_2 - M_1 + F_1 \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$Y_B = 8.25\text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - F_1 - F_q = 0 \quad (2)$$

$$Y_A = 2.75\text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A - F_2 = 0 \quad (3)$$

$$Z_A = 3\text{ kN}$$

Dobijene reakcije oslonaca su:

$$Y_A = 2.75\text{ kN}$$

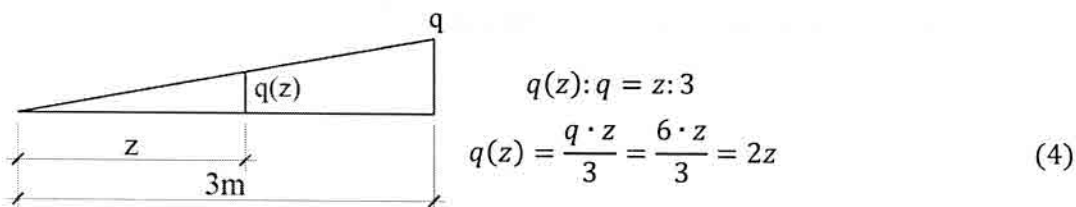
$$Y_B = 8.25\text{ kN}$$

$$Z_A = 3\text{ kN}$$

b) Dijagrami presječnih sila

Dijagram aksijalne sile, ili kako se još naziva dijagram normalne sile, postoji na dijelu AC nosača i konstantne je vrijednosti, kao što je prikazano na slici 1.3. Potiče od reakcije $Z_A = 3 \text{ kN}$ i ovu vrijednost u tački C nosača, uravnotežava horizontalna sila F_2 , redukovana u tački C nosača.

Crtanje dijagrama transverzalnih sila sve do tačke D vrši se preko karakterističnih tačaka E i A u kojima djeluju koncentrisane sile F_1 i Y_A . Od tačke D do tačke H djeluje trougaono kontinualno opterećenje, pa funkcionalna zavisnost specifičnog opterećenja $q(z)$ od proizvoljnog presjeka z ($0 \leq z \leq 3\text{m}$), prikazana je na slici 1.2 i data je izrazom (4).



Slika 1.2

Promjena transverzalne sile na dijelu DH nosača mijenja se po paraboli, datoj izrazima (5) i (6). Iz sličnosti trouglova slijedi funkcionalna zavisnost specifičnog opterećenja $q(z)$ od posmatranog presjeka z .

Dijagram transverzalne sile ima skok u tački B od dejstva sile Y_B , slika 1.3, i njen analitički izraz je:

Dio DH:

$$\begin{aligned} \text{Presjek 1-1} \quad T(z) &= -F_1 + Y_A - \frac{1}{2} q(z) \cdot z = \\ 0 \leq z \leq 2 \text{ (DB)} \quad &= 0.75 - z^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Presjek 2-2} \quad T(z) &= 0.75 + Y_B - z^2 = \\ 2 \leq z \leq 3 \text{ (BH)} \quad &= 9 - z^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Vrijednosti napadnog momenta do tačke D je pogodno odrediti preko vrijednosti momenata u karakterističnim tačkama E, A, C i D i te vrijednosti su:

$$M_E = 2 \text{ kNm}, \quad M_A = 0, \quad M_C^l = 0.75 \text{ kNm}, \quad M_C^d = -2.25 \text{ kNm}, \quad M_D = 1.5 \text{ kNm}$$

Tačke na dijagramu sa ovim vrijednostima momenata se spajaju pravolinijski. Od tačke D do H kriva promjene momenta je parabola trećeg reda i njen analitički izraz dat je izrazima (7) i (8):

Dio DH:

$$\begin{aligned} \text{Presjek 1-1} \quad M(z) &= -F_1(3+z) + M_1 + Y_A(2+z) - M_2 - \frac{1}{2} q(z) \cdot z \cdot \frac{z}{2} = \\ 0 \leq z \leq 2 \text{ (DB)} \quad &= -2(3+z) - 1 + 2.75(2+z) - \frac{1}{3} z^3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Presjek 2-2} \quad M(z) = -2(3+z) - 1 + 2.75(2+z) + Y_B(z-2) - \frac{1}{3} z^3 =$$

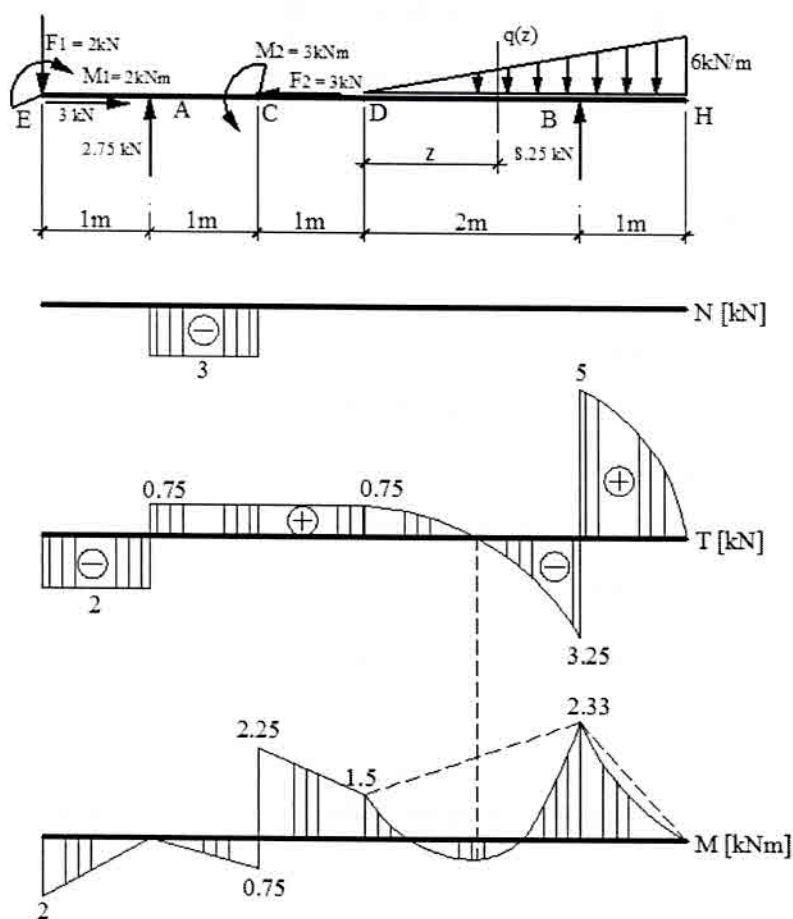
$$2 \leq z \leq 3 \text{ (BH)} \quad = -18 + 9z - \frac{1}{3}z^3 \quad (8)$$

Dijagrami transverzalne sile i napadnog momenta imaju međusobnu usaglašenost. Ovo potiče od izraza

$$\frac{dM}{dz} = T$$

tj. prvi izvod napadnog momenta po koordinati u pravcu ose nosača jednak je transverzalnoj sili u tom presjeku.

Tako, gdje je transverzalna sila pozitivna moment raste, i obrnuto, u dijelu gdje je transverzalna sila negativna moment opada, što se vidi i na dijagramu. Mjesta na kojima je transverzalna sila jednaka nuli tj. gdje dijagram transverzalne sile siječe nultu liniju, ujedno su i mjesta sa ekstremnim vrijednostima napadnog momenta. Sa dijagrama se takođe može zaključiti da dejstvo koncentrisanog momenta M na dijagramu napadnog momenta dovodi do njegove skokovite promjene.

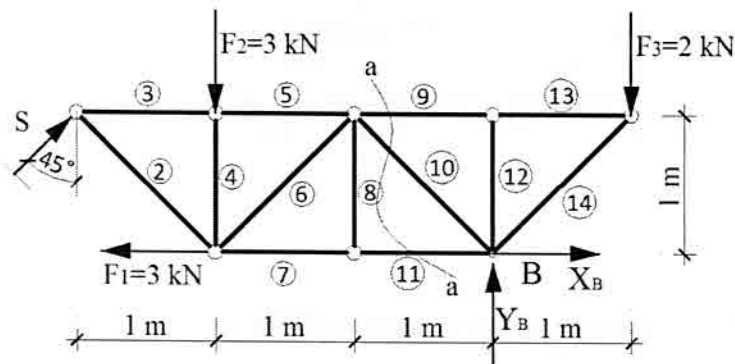


Slika 1.3

2. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Rešetkasti nosač koji analiziramo u ovom zadatku opterećen je silama $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ i vezan u zglobovima A i B. Štap 1 rešetke, koji povezuje rešetku sa osloncem, predstavlja njenu spoljašnju vezu, a ne dio rešetke kao nosača. Zato je poznat pravac reakcije nepokretnog zgloba A, tj. nepoznata reakcija S ima pravac štapa 1. Na slici 2.1 prikazana je rešetka sa ucrtanim nepoznatim reakcijama veza X_B , Y_B i S, aktivnim opterećenjima F_1 , F_2 , F_3 i označenim štapovima.



Slika 2.1

Jednačine ravnoteže su:

$$\sum X = 0 \Rightarrow S \frac{\sqrt{2}}{2} - F_1 + X_B = 0 \quad (1)$$

$$X_B = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow S \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + S \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 1 = 0 \quad (2)$$

$$S = \sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B - F_2 - F_3 + S \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (3)$$

$$Y_B = 4 \text{ kN}$$

Kao rješenja ovih jednačina dobijaju se reakcije veza u osloncima A i B.

b) Kremonin plan sila

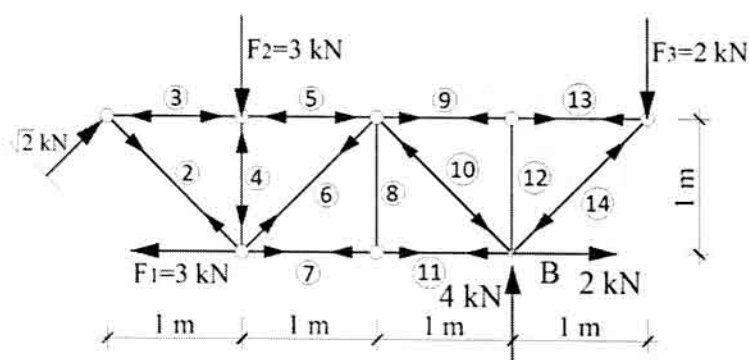
Da bi rešetka bila iznutra statički određena potrebno je da funkcionalna zavisnost između broja čvorova (n) i broja štapova (s) bude zadovoljena. Čvor je mjesto gdje se sučeljavaju dva ili više štapova.

Kako se štap 1 tretira kao spoljašnja veza, broj štapova je $s = 13$, a broj čvorova je $n = 8$, pa je:

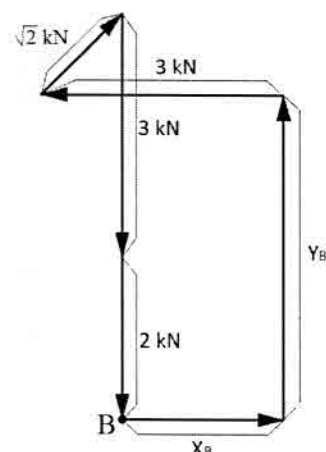
$$s = 2n - 3$$

$$13 = 2 \cdot 8 - 3$$

Sile u štapovima određujemo grafičkom metodom, crtanjem Kremoninog plana sila. Ovom metodom prvo se crta poligon sila sastavljen od aktivnih sila i reakcija veza obilazeći rešetku u istom smjeru, kao na slici 2.3. Ako je rešetka u ravnoteži, onda je taj poligon zatvoren. Zatim se crtaju poligoni sila obilazeći, čvor po čvor, u istom smjeru u kome smo obilazili rešetku. Tako se dobija Kremonin plan sila, prikazan na slici 2.4. Vrijednosti dobijenih sila kao i njihov karakter, vodeći računa o razmjeri, koju smo usvojili pri crtanju, prikazane su u tabeli 1.



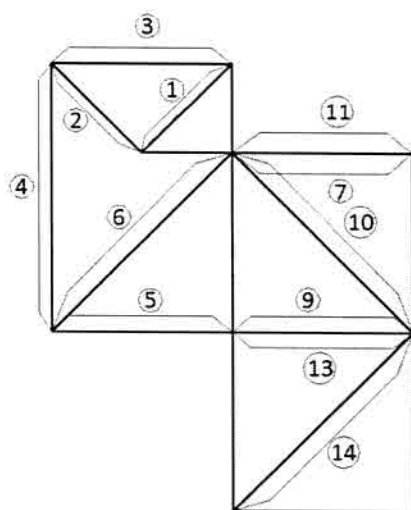
Slika 2.2



Slika 2.3

Tabela 1

	Zatezanje +	Pritisak -
1		$\sqrt{2}$
2	$\sqrt{2}$	
3		2
4		3
5		4
6	$2\sqrt{2}$	
7	2	
8	-	-
9	2	
10		$2\sqrt{2}$
11	2	
12	-	-
13	2	
14		$2\sqrt{2}$

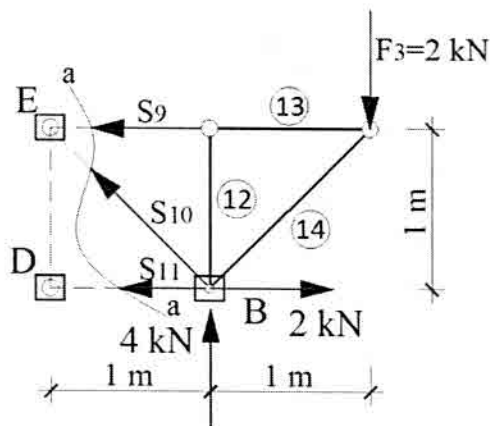


Slika 2.4

c) Riterova metoda za presjek a-a:

Riterovom metodom se određuju sile u najviše tri štapa, tako da ovom metodom možemo odrediti sile u štapovima 9, 10 i 11. U tom cilju zamislimo presjek rešetke po ovim štapovima i posmatrajmo lijevi ili desni dio od presjeka. U ovom slučaju posmatraćemo desni dio koji je opterećen aktivnom silom $\vec{F}_3$ i reakcijama u osloncu B.

Nepoznate su sile u tri štapa i pretpostavimo da su štapi opterećeni na zatezanje kao što je prikazano na lici 2.4. Kao jednačine ravnoteže za sistem u ravni kod Riterove metode obično se postavljaju tri momentne jednačine i to su:



Slika 2.4

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow S_9 \cdot 1 - F_3 \cdot 1 = 0$$

$$S_9 = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow S_{11} \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + F_3 \cdot 2 = 0$$

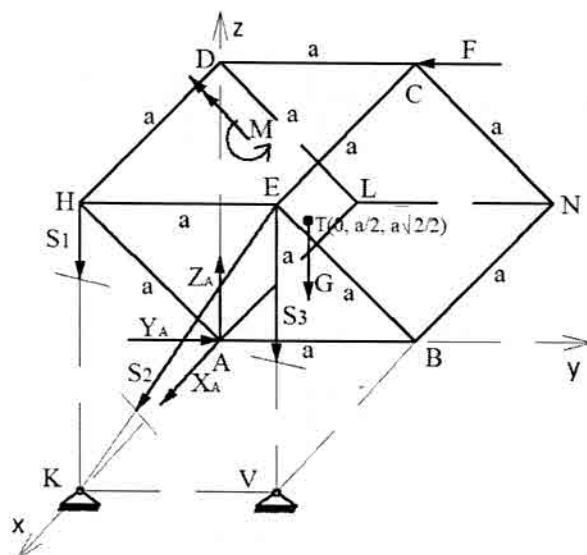
$$S_{11} = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow S_{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + S_9 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - F_3 \cdot 2 = 0$$

$$S_{10} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

Vrijednosti sila u štapovima dobijene Riterovom analitičkom metodom potvrdile su već dobijene vrijednosti sila u tim štapovima Kremoninim grafičkom metodom. Tako je štap 10 opterećen na pritisak a štapi 9 i 11 na zatezanje.

3. ZADATAK



Slika 3.1

Posmatrana kocka, oslobođena od veza, prikazana je na slici 3.1, gdje se reakcije u zglobu A u odnosu na dati koordinatni sistem mogu predstaviti kao:

$$\vec{F}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k},$$

dok se za štapove HK, EK i EV pretpostavlja, da su opterećeni na zatezanje i njihov analitički izraz za sile S_1 , S_2 i S_3 je:

$$\vec{S}_1 = -S_1 \vec{k}, \quad \vec{S}_2 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \vec{j} - S_2 \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k} \quad \text{ i } \quad \vec{S}_3 = -S_3 \vec{k}$$

Osim reakcija veza na kocku djelujuju sljedeće sile čiji su analitički izrazi:

$$\vec{G} = -G \vec{k} \quad \text{ i } \quad \vec{F} = -G \vec{j}.$$

Analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji obezbjeđuju da je glavni vektor sistema sila koji djeluje na kocku jednak nuli:

$$\sum X = 0; \quad X_A = 0 \tag{1}$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_A - S_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - G = 0 \tag{2}$$

$$\sum Z = 0; \quad Z_A - S_1 - S_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - S_3 - G = 0 \tag{3}$$

Momenti svih sila u odnosu na koordinatni početak su:

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_1)} = \vec{r}_H \times \vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -S_1 \end{vmatrix} = a\frac{\sqrt{2}}{2} S_1 \vec{j}$$

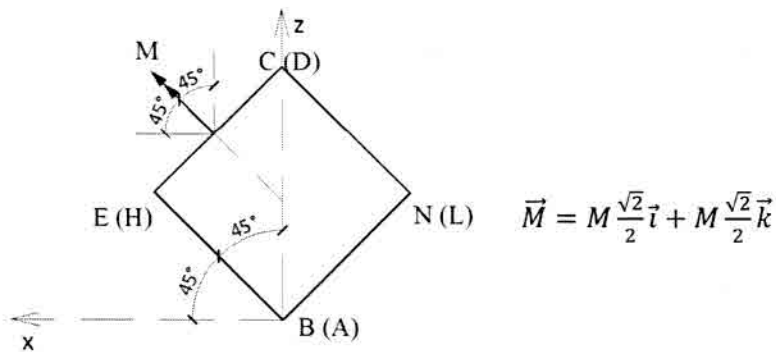
$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_2)} = \vec{r}_E \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} & a & a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -S_2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -S_2\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -\frac{aS_2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \vec{j} - \frac{aS_2}{\sqrt{3}} \vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_3)} = \vec{r}_E \times \vec{S}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} & a & a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -S_3 \end{vmatrix} = -aS_3 \vec{i} + \frac{aS_3\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{G})} = \vec{r}_T \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} = -\frac{aG}{2} \vec{i}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_1)} = \vec{r}_C \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & a\sqrt{2} \\ 0 & -G & 0 \end{vmatrix} = aG\sqrt{2} \vec{i}$$

Moment koji djeluje u ravni HECD prikazan je na slici 3.2 i ima analitički izraz:



Slika 3.2

Uslovi ravnoteže koji obezbeđuju da je glavni moment jednak nuli:

$$\sum M_x = 0; \quad -aS_3 - \frac{aG}{2} + aG\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}M = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; \quad a\frac{\sqrt{2}}{2}S_1 - \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}S_2 + \frac{a\sqrt{2}}{2}S_3 = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0; \quad -\frac{a}{\sqrt{3}}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}M = 0 \quad (6)$$

Rješavanjem jednačina od (1) do (6) dobijaju se nepoznate reakcije u zglobu A i sile u štapovima:

$$S_1 = -G\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$$

$$S_2 = \frac{G\sqrt{3}}{2}$$

$$S_3 = G\sqrt{2}$$

$$X_A = 0$$

$$Y_A = G\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + 1\right)$$

$$Z_A = \frac{G}{4}(2 + \sqrt{6})$$

ARHITEKTONSKI FAKULTET U PODGORICI

MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA – Mehanika

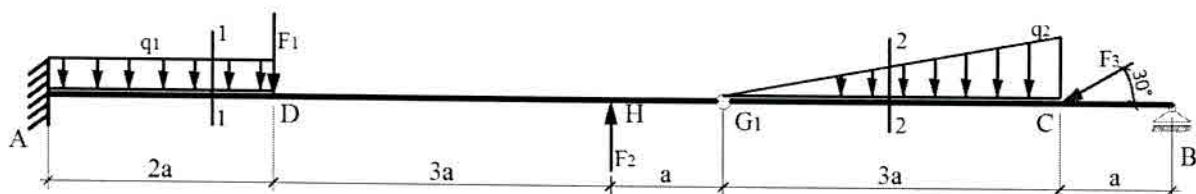
Ispitni rok 4

1. ZADATAK

Za Gerberov uklješten nosač AB, dužine $10a$ opterećen kao na slici, odrediti:

- reakcije veza u uklještenju A i pokretnom osloncu B;
- napisati analitičke izraze za presječne sile u naznačenim presjecima 1-1 i 2-2;
- nacrtati dijagrame presječnih sila (N, T, M) za cio nosač.

Dato je $a = 1\text{ m}$, $F_1 = 2\text{ kN}$, $F_2 = 3\text{ kN}$, $F_3 = 1\text{ kN}$, $q_1 = 2\text{ kN/m}$ i $q_2 = 2\text{ kN/m}$.

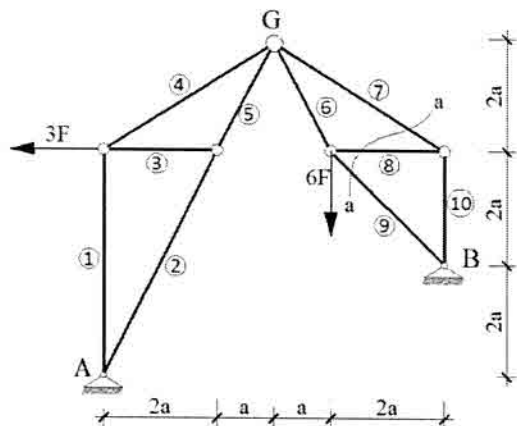


Slika 1

2. ZADATAK

Za rešetkasti nosač opterećen silama $3F$ i $6F$, kao na slici 2, odrediti:

- reakcije oslonaca;
- sile u štapovima metodom Kremone;
- za presjek a-a provjeriti sile u štapovima metodom Ritera.



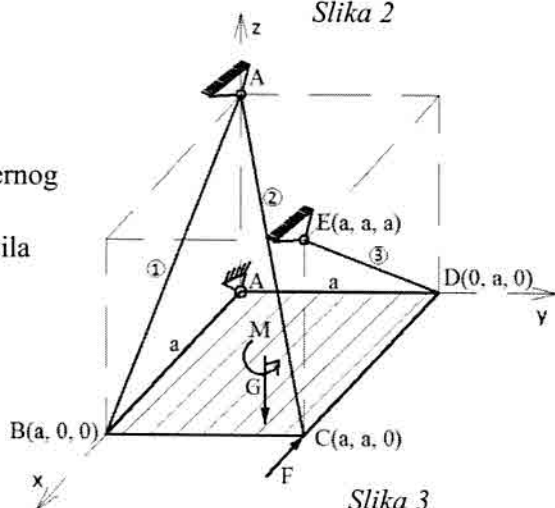
Slika 2

3. ZADATAK

Homogena kvadratna ploča stranice a i težine G održava se u horizontalnom položaju pomoću sfernog zgloba A i tri štapa kao što je prikazano na slici.

U ravni ploče djeluje spreg sila momenta M i sila $\vec{F} = -G\vec{l}$.

Odrediti nepoznate reakcije veze A i sile u štapovima, ako je $M = \frac{G}{2}a$.



Slika 3

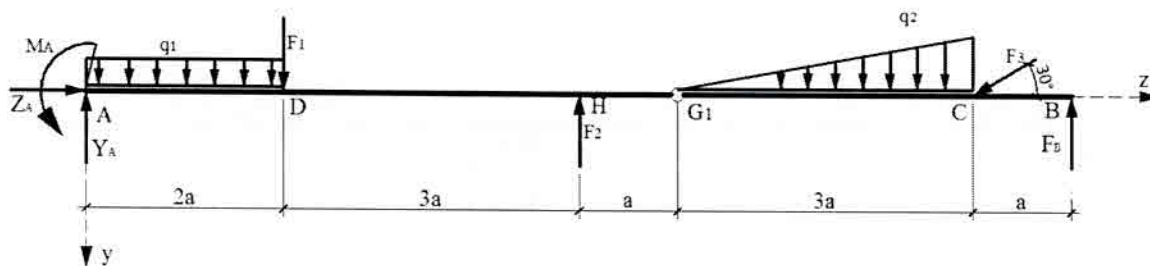
1. ZADATAK

a) Određivanje reakcija oslonaca

Nosač prikazan na slici 1.1, opterećen je sa ravnomjerno raspodijeljenim opterećenjem i trougaonim kontinualnim opterećenjem, koja se mogu zamijeniti koncentrisanim silama: $F_{q_1} = 2a \cdot q_1 = 4 \text{ kN}$ i $F_{q_2} = \frac{3a \cdot q_2}{2} = 3 \text{ kN}$, vertikalnim koncentrisanim silama F_1 i F_2 i kosom silom F_3 , koja djeluje pod uglom od 30° u odnosu na osu nosača, a koja se razlaže na dvije komponente F_{3z} i F_{3y} , u pravcu z i y ose čiji su intenziteti:

$$F_{3y} = F_3 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} [\text{kN}]$$

$$F_{3z} = F_3 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{kN}]$$



Slika 1.1

Nosač je u tački A ukliješten. Kada se oslobodi od veze, uticaj ukliještenja zamjenjujemo reakcijama veza i to, momentom M_A i silama Y_A i Z_A . U tački B nosač je oslonjen na pokretni oslonac, pa je reakcija veze vertikalna sila F_B . Za cio nosač, broj nepoznatih komponentata reakcija oslonaca je četiri.

Za nosač u ravni, posmatran kao cjelina, postoje tri uslova ravnoteže, a dopunska jednačina predstavlja uslov ravnoteže izdvojenog lijevog ili desnog dijela nosača AB, nastalog njegovim razdvajanjem u Gerberovom zglobu G_1 .

Tako, četiri uslova ravnoteže omogućavaju da se odrede četiri nepoznate komponente otpora oslonaca M_A , Y_A , Z_A i F_B .

Jednačine ravnoteže biramo tako da se iz svake sljedeće dobije po jedna nepoznata reakcija veze. One su:

$$\sum M_{G_1}^d = 0 \Rightarrow F_B \cdot 4a - F_3 \sin 30^\circ \cdot 3a - F_{q_2} \cdot 2a = 0 \quad (1)$$

$$F_B = 1,875 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A - F_{q_1} - F_1 + F_2 - F_{q_2} - F_3 \sin 30^\circ + F_B = 0 \quad (2)$$

$$Y_A = 4,625 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_B \cdot 10a - F_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9a - F_{q_2} \cdot 8a + F_2 \cdot 5a - F_1 \cdot 2a - F_{q_1} \cdot a + M_A = 0 \quad (3)$$

$$M_A = 2,75 \text{ kNm}$$

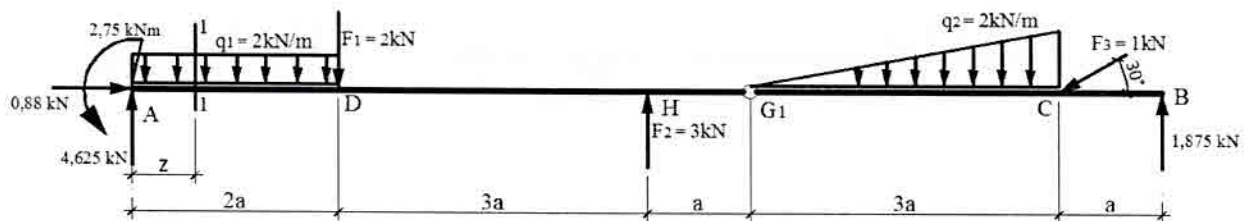
$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A - F_3 \cos 30^\circ F_B = 0 \quad (4)$$

$$Z_A = 0,88 \text{ kN}$$

b) *Analitički izrazi za presječne sile u presjecima 1-1 i 2-2*

Analitički izrazi za presječne sile u naznačenim presjecima su:

Pesjek 1-1



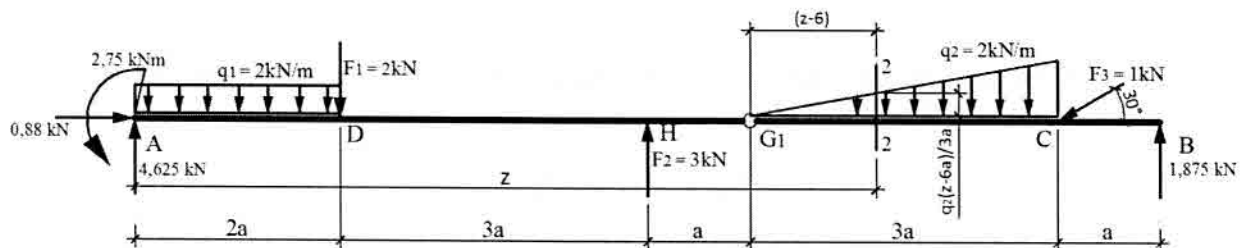
Slika 1.2

za presjek 1-1

$$0 \leq z \leq 2a$$

$$\begin{cases} T(z)_{1-1} = Y_A - q_1 \cdot z = 4,625 - 2z & (5) \\ M(z)_{1-1} = -M_A + Y_A \cdot z - q_1 \cdot \frac{z^2}{2} = -2,75 + 4,625z - z^2 & (6) \end{cases}$$

Presjek 2-2



Slika 1.3

za presjek 2-2

$$6a \leq z \leq 9a$$

$$\begin{cases} T(z)_{2-2} = Y_A - q_1 \cdot 2a - F_1 + F_2 - \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot \frac{(z-6a)^2}{3a} = 1,625 - \frac{(z-6a)^2}{3a} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} M(z)_{2-2} = -M_A + Y_A \cdot z - F_{q_1}(z-a) - F_1(z-2a) + F_2(z-5a) - \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot \frac{(z-6a)^3}{9a} = \\ = -9,75 + 1,625z - \frac{(z-6a)^3}{9a} \end{cases} \quad (8)$$

Iz analitičkih izraza za moment i transverzalnu silu za presjeke 1-1 i 2-2, lako se može zaključiti da je:

$$\frac{dM_{1-1}}{dz} = T_{1-1}$$

$$\frac{dM_{2-2}}{dz} = T_{2-2}$$

Takođe, diferenciranjem izraza za transverzalnu silu po koordinati u pravcu ose nosača dobijaju se vrijednosti za kontinualno opterećenje sa negativnim predznakom u navedenom presjeku.

Ovo proističe iz matematičke relacije koja povezuje moment savijanja, transverzalnu silu i kontinualno opterećenje u nekom presjeku nosača, tj.:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dT}{dz} = -q(z)$$

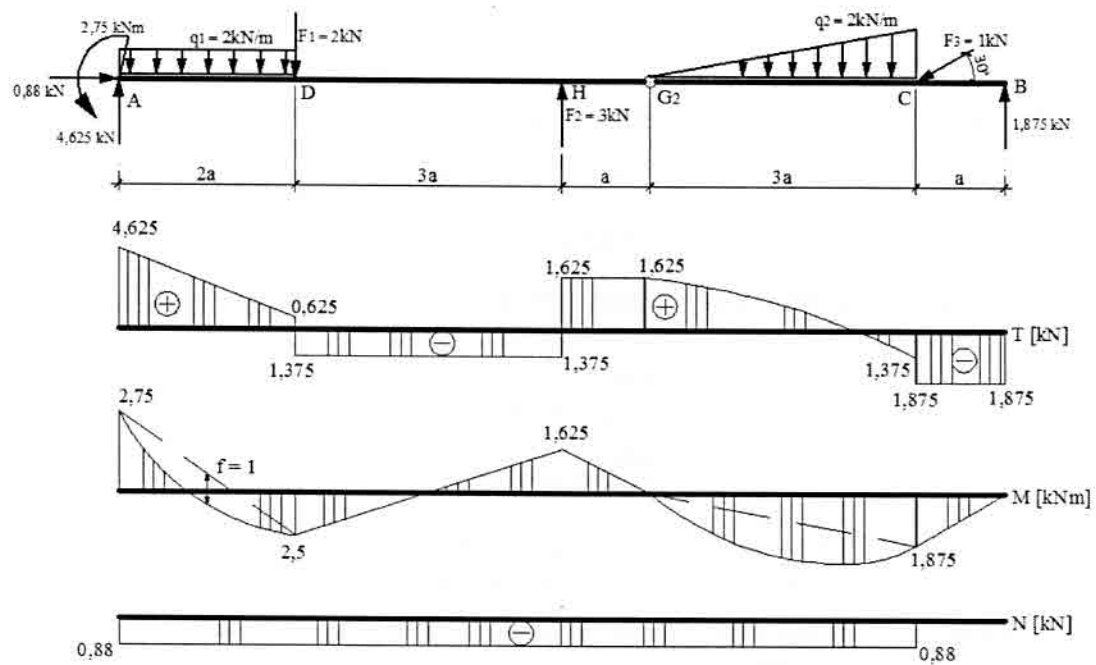
Drugi izvod napadnog momenta po koordinati u pravcu ose nosača jednak je prvom izvodu transverzalne sile po istoj koordinati, jednak je intenzitetu specifičnog opterećenja uzetog sa negativnim predznakom u tom presjeku.

c) Dijagrami presječnih sila za cio nosač AB

Da bi nacrtali dijagrame potrebno je izračunati vrijednosti normalne sile, transverzalne sile i napadnog momenta za pojedina polja koja su omeđena tačkama u kojima djeluju sile i momenti. Pri tome se vodi računa o znaku i koriste se utvrđene konvencije. Kod crtanja dijagrama transverzalnih sila, polazi se od lijevog kraja A nosača i nanose se poprečne sile kako nailaze sa lijeva na desno u smjeru kao što djeluju, sve do kraja B. Dijagram počinje od nule i završava na nuli, prilikom crtanja dijagrama presječnih sila. Na djelovima nosača opterećenim kontinualnim opterećenjem, potrebno je primijeniti funkciju promjene transverzalne sile u cijelom polju opterećenja, kao što je dato izrazima (5) i (7) za presjeke 1-1 i 2-2.

Za crtanje dijagrama napadnog momenta, vrijednosti se računaju u karakterističnim tačkama na krajevima polja opterećenja. Kod kontinualnog opterećenja potrebno je koristiti funkciju promjene napadnog momenta kao što je dato izrazima (6) i (8) za presjeke 1-1 i 2-2.

Dijagrami transverzalne sile, normalne sile i napadnog momenta dati su na slici 1.4.



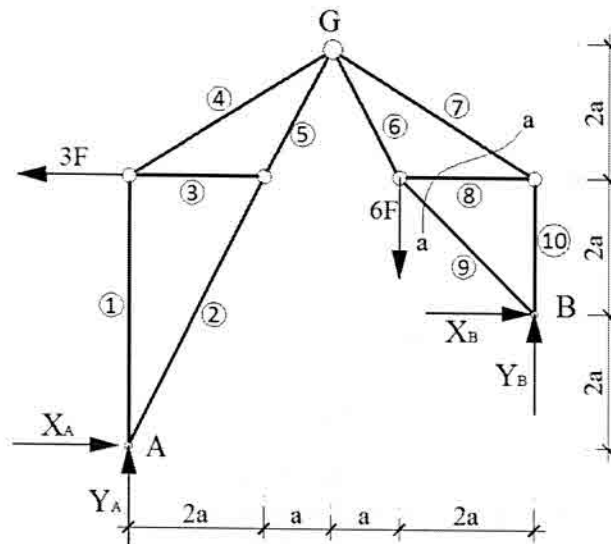
Slika 1.4

2. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Data rešetka se sastoji iz dva dijela međusobno zglobojno spojena u tački G, zbog čega možemo reći da se radi o Gerberovom rešetkastom nosaču. Na slici 2.1 je prikazana rešetka oslobođena od veza, sa reakcijama veza u nepokretnim osloncima A (X_A , Y_A) i B (X_B , Y_B).

Kod Gerberove rešetke, reakcije veza se određuju kao i kod svakog drugog nosača, postavljajući tri jednačine ravnoteže za tijelo u ravni, i četvrti dopunski uslov da je moment u Gerberovom zglobu od svih sila lijevo ili desno od zgloba G jednak nuli. Te jednačine, za ovi rešetku, su:



Slika 2.1

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -X_B \cdot 2a + Y_B \cdot 6a - 6F \cdot 4a + 3F \cdot 4a = 0 \quad (1)$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + X_B - 3F = 0 \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - 6F = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow X_B \cdot 4a + Y_B \cdot 3a - 6F \cdot a = 0 \quad (4)$$

Rješenja ovog sistema su:

$$X_A = 3F, Y_A = 4F, X_B = 0, Y_B = 2F.$$

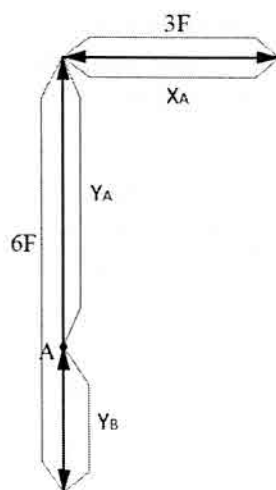
b) Kremonin plan sila

Sada treba provjeriti da li je rešetka unutrašnje statički određena, koristeći vezu između broja štapova (s) i broja čvorova (n).

U ovom slučaju za $s = 10$ i $n = 7$ i jedan Gerberov zglob funkcionalna zavisnost između ovih veličina je: $s = 2n - 3 - g$.

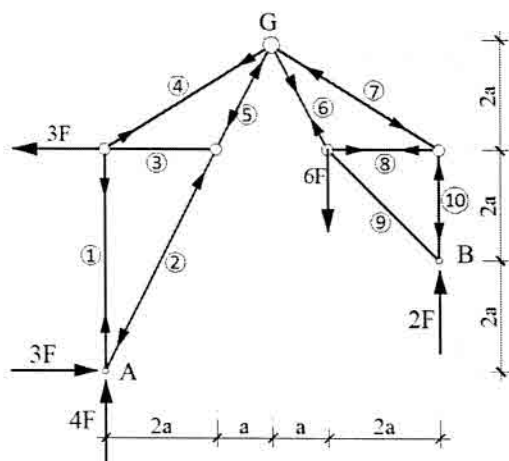
Kako je ovaj uslov zadovoljen ravanska Gerberova rešetka je kruta i statički određena.

Kremonin plan sila za grafičko određivanje sila u svim štapovima crta se nanošenjem aktivnih sila i reakcija veza obilazeći rešetku u izabranom smjeru. Tako se dobija zatvoren poligon sila jer se radi o ravnoteži rešetke u ravni. Kako je rešetka u ravnoteži onda je i svaki njen čvor u ravnoteži.

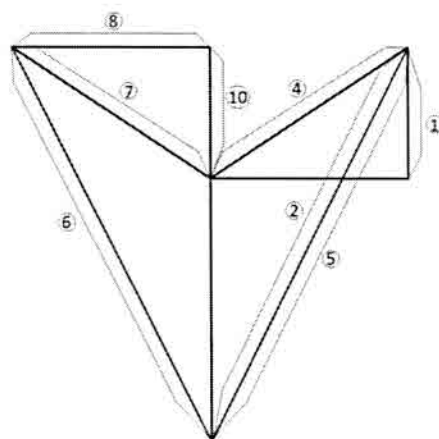


Slika 2.2

Dalje se nanose sile za svaki čvor rešetke, vodeći računa o tome da u svakom sljedećem čvoru broj štapova sa nepoznatim silama ne bude veći od dva. Smjerove sila pri zatvaranju poligona za svaki čvor treba nanositi na crtežu rešetke a ne na Kremoninom planu sila, kako je prikazano na slici 2.3.



Slika 2.3



Slika 2.4

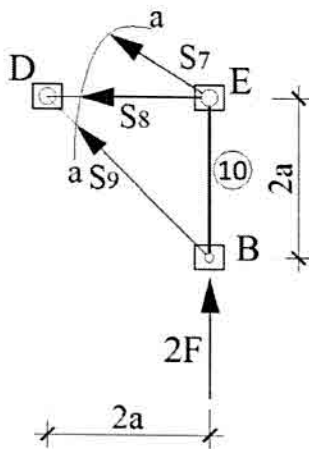
Na kraju se formira tabela u koju se unose očitane vrijednosti sila sa odgovarajućim predznakom ('-' za pritisnuti štap, '+' za zategnuti štap).

Tabela 1

	Zatezanje +	Pritisak -
1	2F	
2		6,6F
3	-	-
4	3,6F	
5		6,6F
6	6,6F	
7		3,6F
8	3F	
9	-	-
10		2F

c) Riterova metoda za presjek a-a:

U presjeku rešetke sa štapovima 7, 8 i 9 treba naći nepoznate sile koristeći Riterov metod. To je analitički metod koji se bazira na ravnoteži jednog dijela rešetke, lijevo ili desno od presjeka. Bira se dio sa manje sile, iz praktičnih razloga, pa u ovom slučaju posmatramo desni dio rešetke sa poznatom reakcijom veze u tački B kao što je prikazano na slici 2.5:



Slika 2.5

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0 &\Rightarrow S_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a = 0 \\ S_9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow S_7 \cdot \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (3a)^2}} + 2F \cdot a = 0$$

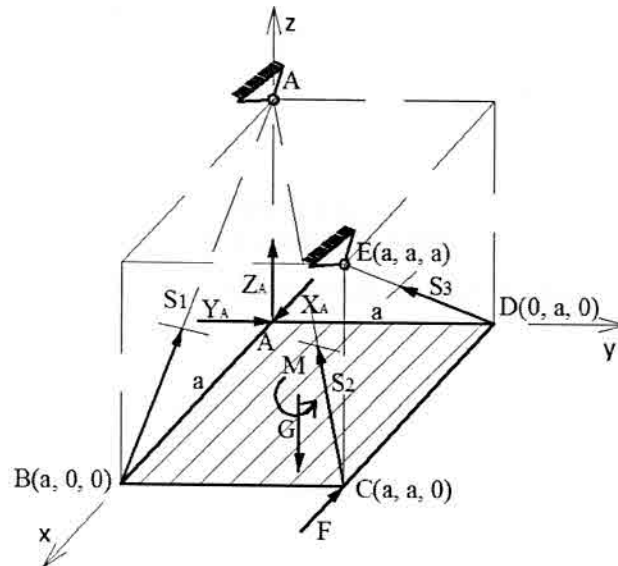
$$S_7 = -3,6F$$

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow S_7 \cdot \frac{3a}{\sqrt{(2a)^2 + (3a)^2}} \cdot 2a + S_8 \cdot 2a = 0$$

$$S_8 = 3F$$

Ovako dobijene vrijednosti za sile u štapovima 7, 8 i 9 poklapaju se sa vrijednostima iz tabele, dobijene Kremoninim planom sila.

3. ZADATAK



Slika 3.1

Na slici 3.1 prikazana je ploča oslobođena od veza. Ploča je opterećena sopstvenom težinom $\vec{G}$ i silom $\vec{F}$ čiji analitički izrazi su:

$$\vec{G} = -G\vec{k}$$

$$\vec{F} = -G\vec{i}$$

i momentom u ravni ploče koji se može napisati kao:

$$\vec{M} = \frac{Ga}{2}\vec{k}$$

Reakcija veze u zglobu A, analitički je data kao:

$$\vec{F}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}.$$

Za nepoznate sile u štapovima $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ i $\vec{S}_3$ pretpostavićemo da su opterećene na zatezanje pa će njihovi analitički izrazi biti:

$$\vec{S}_1 = \left\{ -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\vec{S}_2 = \left\{ -S_2 \frac{\sqrt{3}}{3}, -S_2 \frac{\sqrt{3}}{3}, +S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$\vec{S}_3 = \left\{ S_3 \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Kako uslove ravnoteže postavljamo za ploču, treba postaviti šest jednačina iz kojih ćemo odrediti šest nepoznatih reakcija veza u zglobovima i sile u štapovima.

Jednačine ravnoteže koje će obezbijediti da glavni vektor svih sila koje djeluju na ploču bude jednak nuli su:

$$\sum X = 0; \quad X_A - G - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} + S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (1)$$

makni svuda Fove, makni tačkice... stavi sume ko ovo odje sto stoji...

$$\sum Y = 0; \quad Y_A - S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0; \quad Z_A + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} + S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - G = 0 \quad (3)$$

Za određivanje projekcija momenata od svih sila koje djeluju na ploču ABCD, potrebno je odrediti koordinate tačaka K, B, C, T, D, E pa je K(0, 0, a), B(a, 0, 0), C(a, a, 0), T(a/2, a/2, 0), D(0, a, 0) i E(a, a, a).

Sada su momenti svih sila za koordinatni početak dati sa:

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_A)} = \vec{r}_A \times \vec{F}_A = 0$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_1)} = \vec{r}_B \times \vec{S}_1 = -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} a \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_2)} = \vec{r}_C \times \vec{S}_2 = S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} a \vec{i} - S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} a \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_3)} = \vec{r}_D \times \vec{S}_3 = S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} a \vec{i} - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} a \vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{G})} = \vec{r}_T \times \vec{G} = -G \frac{a}{2} \vec{i} + G \frac{a}{2} \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F})} = \vec{r}_C \times \vec{F} = Ga \vec{k}$$

Osim ovih momenata, od aktivnih sila i reakcija veza, u ravni ploče djeluje moment $\vec{M} = \frac{Ga}{2} \vec{k}$.

Sada ćemo napisati još tri jednačine ravnoteže ploče, koje se odnose na to da glavni moment od svih sila bude jednak nuli. Tako dobijamo:

$$\sum M_x = 0; \quad S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} a + S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} a - G \frac{a}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; \quad -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} a - S_2 \frac{\sqrt{3}}{3} a + G \frac{a}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0; \quad -S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} a + Ga + M = 0 \quad (6)$$

Iz ovih jednačina ravnoteže dobijaju se tražene nepoznate:

$$S_1 = -\frac{G}{2}\sqrt{2}$$

$$S_2 = G\sqrt{3}$$

$$S_3 = \frac{3}{2}G\sqrt{2}$$

$$X_A = 0$$

$$Y_A = -G$$

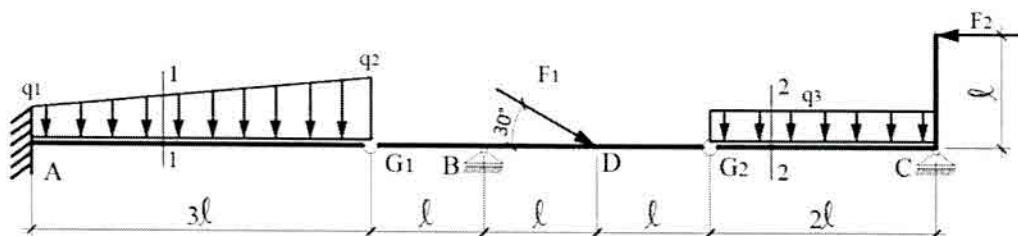
$$Z_A = G$$

1. ZADATAK

Nosač AC sa dva Gerberova zgloba, opterećen je koncentrisanim silama F_1 i F_2 i kontinualnim opterećenjima, kao na slici 1. Odrediti:

- reakcije u osloncima A, B i C;
- napisati analitičke izraze za presječne sile u presjecima 1-1 i 2-2;
- nacrtati dijagrame presječnih sila (N, T, M).

Dato je $l = 1\text{ m}$, $F_1 = 2\text{ kN}$, $F_2 = 2\text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, $q_1 = 1\text{ kN/m}$, $q_2 = 3\text{ kN/m}$ i $q_3 = 2\text{ kN/m}$.

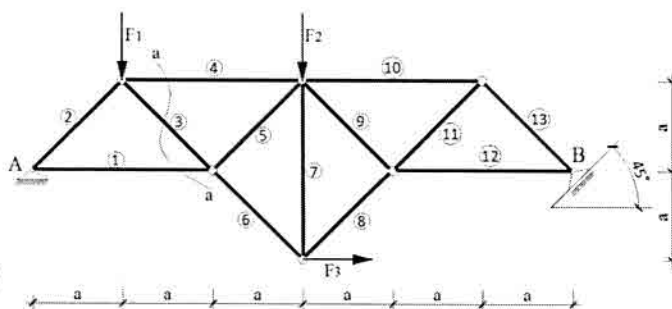


Slika 1

2. ZADATAK

Za rešetkasti nosač opterećen silama $F_1 = F_2 = F_3 = 2\text{ kN}$ i rastojanja $a = 1\text{ m}$, kao na slici 2, odrediti:

- reakcije oslonaca;
- sile u štapovima metodom Kremone;
- za presjek a-a provjeriti sile u štapovima metodom Ritera.



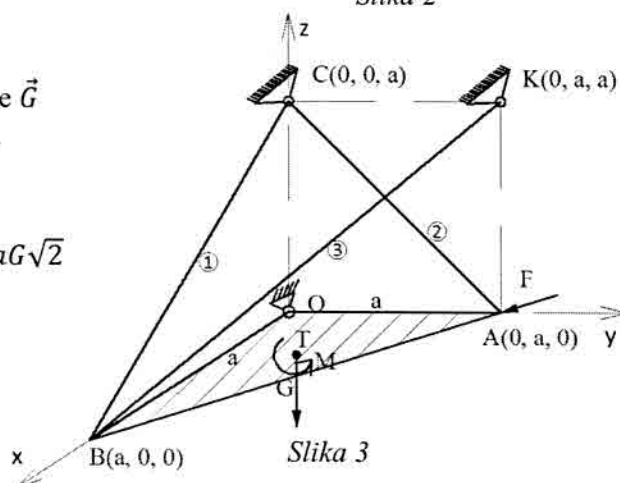
Slika 2

3. ZADATAK

Homogena ploča oblika jednakokrakog trougla težine $\vec{G}$ u položaju prikazanom na slici 3 održava se pomoću sfernog zgloba O i tri štapa, CA, CB i KB.

Ploča je opterećena silom $\vec{F}$ u pravcu hipotenuze, trougla, intenziteta G i spregom sila momenta $\vec{M} = aG\sqrt{2}$ u ravni ploče, koji djeluje u smjeru kazaljke na satu, kao na slici 3.

Odrediti nepoznate reakcije veza u zglobu O i sile u naznačenim štapovima.



Slika 3

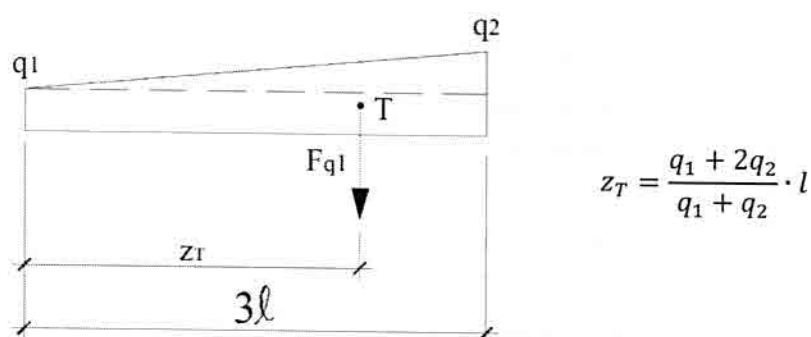
1. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Nosač AC opterećen je, na dijelu AG_1 trapeznim kontinualnim opterećenjem, čije mehaničko dejstvo je jednako intenzitetu koncentrisane sile F_{q_1} ,

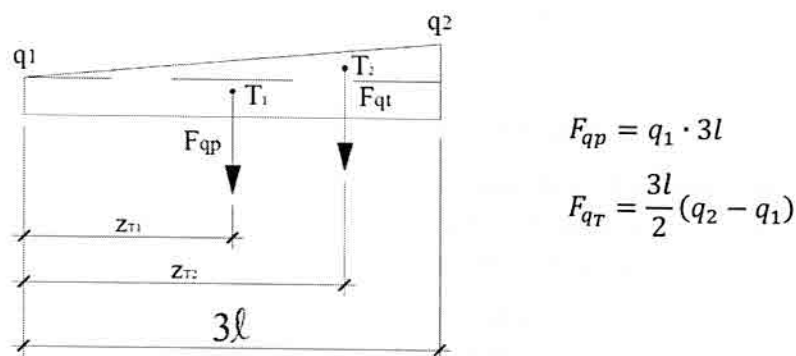
$$F_{q_1} = \frac{3l}{2}(q_1 + q_2) = 6 \text{ kN}$$

Na slici 1.1 prikazan je položaj napadne linije koncentrisane sile F_{q_1} , a njena udaljenost z_T od uklještenja A iznosi:



Slika 1.1

Takođe, kontinualno opterećenje u obliku trapeza, na dijelu nosača AG_1 , možemo posmatrati preko dvije koncentrisane sile F_{qp} i F_{qt} koje se nalaze u težištima pravougaonika i trougla nastalih podjelom datog trapeza pri čemu je $F_{q1} = F_{qp} + F_{qt}$, kao što je prikazano na slici 1.2. Intenziteti ovih sila su:



Slika 1.2

a njihove napadne linije su paralelne y osi i prolaze kroz tačke T_1 (težište pravpugaonika

$z_{T1} = 1.5 l$ i tačku T_2 (težište trougla $z_{T2} = 2 l$).

Nosač AB opterećen je, na dijelu G_2C , ravnomjernim kontinualnim opterećenjem, čije mehaničko dejstvo je jednako intenzitetu koncentrisane sile: $F_{q_2} = 2l \cdot q_3 = 4 kN$ i ova sila djeluje na polovini dužine G_2C .

Kosa sila F_1 ima projekcije na dva pravca i to u pravcu grede (pravac ose z):

$$F_{1z} = F_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3} kN$$

i upravno na pravac grede (pravac ose y):

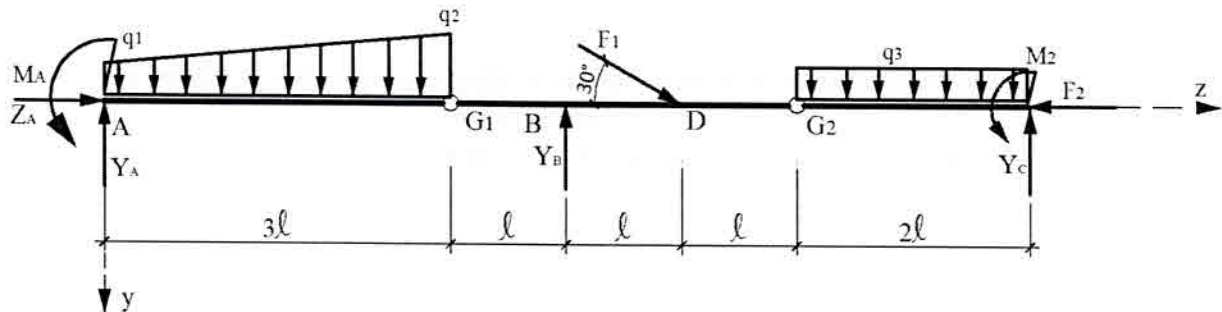
$$F_{1y} = F_1 \sin 30^\circ = 1 kN$$

Redukcijom horizontalne sile F_2 u tačku C djeluje i sila F_2 i moment $M_2 = F_2 \cdot l$.

Sa postojanjem zglobova G_1 i G_2 , nosač AC se sastoji od tri grede spojene u zglobovima G_1 i G_2 , sa lijeve strane uklještena u tački A, a sa desne oslonjena na pokretni oslonac u tački C. Po sredini nalazi se pokretni oslonac B.

Na slici 1.3 prikazan je nosač sa aktivnim opterećenjem i reakcijama veza.

Nepoznate reakcije veza su (Z_A, Y_A, M_A, Y_B, Y_C) i analitički se određuju iz tri uslova ravnoteže za nosač u ravni kao cjelinu i dvije dopunske momentne jednačine za Gerberove zglobove G_1 i G_2 sa lijeve ili sa desne strane.



Slika 1.3

U zglobovima postoje unutrašnje reakcije koje djeluju po principu akcije i reakcije pa je za prvi zglob G_1 ($Y_{G1} = Y_{1G1}, Z_{G1} = Z_{1G1}$) i za drugi G_2 ($Y_{G2} = Y_{1G2}, Z_{G2} = Z_{1G2}$). Pri određivanju reakcija veza, ove sile se ne određuju i njihovo nalaženje nije od interesa za proračun.

Bez Gerberovih zglobova G_1 i G_2 nosač AC bio bi jednostrano uklještena greda u tački A i slobodno oslonjena u tačkama B i C. U tom slučaju imali bi dva puta statički neodređen nosač jer se pet nepoznatih reakcija veza ne mogu dobiti iz tri uslova ravnoteže za nosač u ravni.

Uslovu ravnoteže za nosač u cjelini, i dvije dopunske momentne jednačine za tačke G_1 i G_2 su:

$$\sum M_{G_2}^d = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 2l + M_2 - F_{q_3} \cdot l = 0 \quad (1)$$

$$Y_c \cdot 2 + 2 - 4 \cdot 1 = 0$$

$$Y_c = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M_{G_1}^d = 0 \Rightarrow Y_c \cdot 5a + M_2 - F_{q_3} \cdot 4l - F_1 \sin 30^\circ \cdot 2l + Y_B \cdot l = 0 \quad (2)$$

$$Y_B \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

$$Y_B = 11 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B + Y_c - F_{q_1} - F_{q_3} - F_1 \sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$

$$Y_A + 11 + 1 - 6 - 1 - 4 = 0$$

$$Y_A = -1 \text{ kN}$$

$$\sum M_{G_1}^l = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 3l - M_A - F_{q_1} \cdot 1.25l = 0 \quad (4)$$

$$M_A = -10.5 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + F_1 \cos 30^\circ - F_2 = 0 \quad (5)$$

$$Z_A = 2 - \sqrt{3} = 0.27 \text{ kN}$$

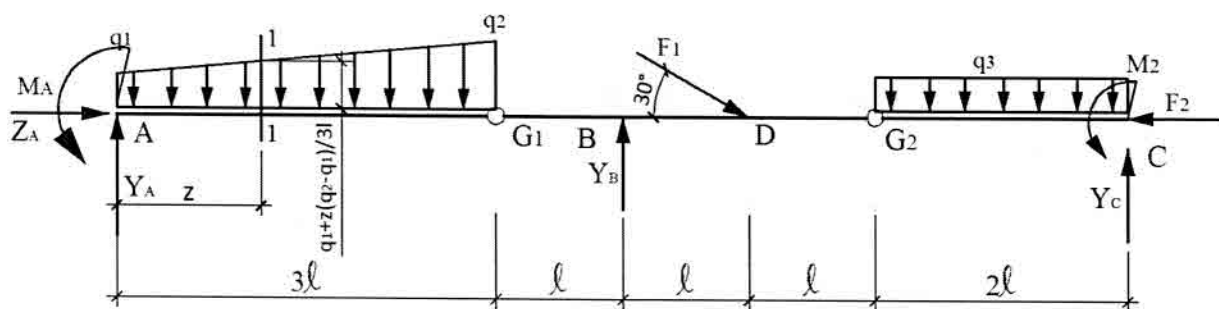
Jednačine ravnoteže su birane tako da se iz svake sljedeće dobije po jedna nepoznata reakcija veze. Tražene reakcije veza su:

$$M_A = -10.5 \text{ kN}, Y_A = -1 \text{ kN}, Z_A = 0.27 \text{ kN}, Y_B = 11 \text{ kN}, Y_c = 1 \text{ kN}$$

b) Analitički izrazi

Analitički izrazi za presječne sile u naznačenim presjecima su:

Dio AG₁:

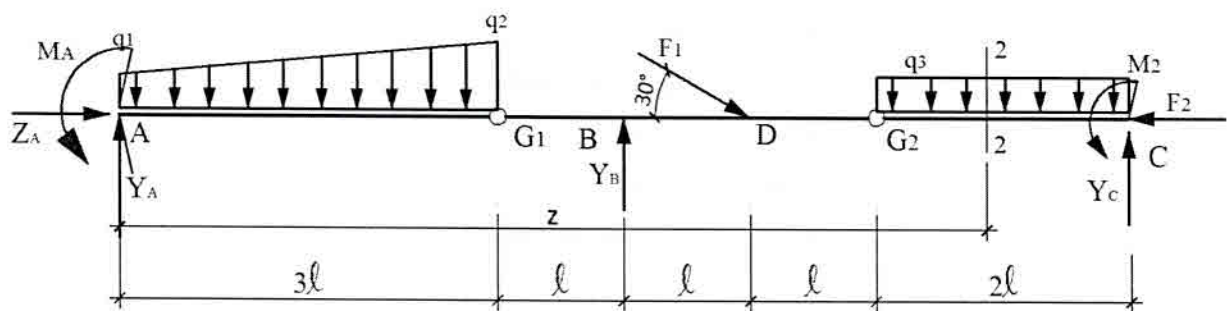


Slika 1.4

za presjek 1-1

$$0 \leq z \leq 3l$$

$$\begin{cases} T(z)_{1-1} = Y_A - \frac{z}{2} \left(q_1 + q_1 + \frac{z}{3l} (q_2 - q_1) \right) = -1 - z - \frac{z^2}{3} \\ M(z)_{1-1} = -M_A + Y_A \cdot z - \left[q_1 \cdot z \cdot \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{3l} (q_2 - q_1) \cdot \frac{z}{3} \right] = \\ = 10,5 - z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{z^3}{9} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1^*) \\ (2^*) \end{matrix}$$



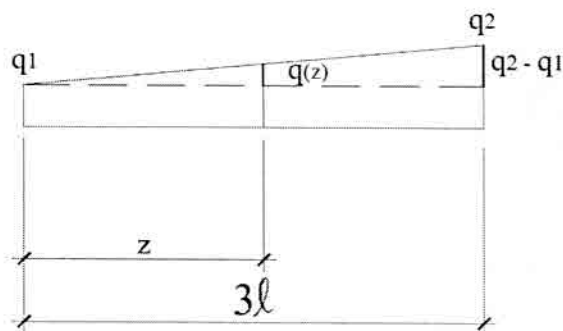
Slika 1.5

za presjek 2-2

$$6l \leq z \leq 8l$$

$$\begin{cases} T(z)_{2-2} = Y_A - F_{q1} + Y_B - F_1 \sin 30^\circ - q_3 \cdot (z - 6l) = 15 - 2z \\ M(z)_{2-2} = -M_A + Y_A \cdot z - F_{q1} (z - 1.75l) + Y_B (z - 4l) - F_1 \sin 30^\circ (z - 5l) - q_3 \frac{(z - 6l)^2}{2} = \\ = -54 + 15z - z^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3^*) \\ (4^*) \end{matrix}$$

Vrijednost specifičnog opterećenja u proizvoljnom presjeku z kod dijela nosača AG₁ dobija se posmatranjem sličnosti trouglova kao na slici 1.6:



Slika 1.6

$$q(z) : (q_2 - q_1) = z : 3l$$

$$q(z) = \frac{z}{3l} (q_2 - q_1)$$

c) Dijagrami presječnih sila

Normalna sila postoji na čitavoj dužini nosača i konstantne je vrijednosti. Skok normalne sile javlja se od projekcije kose sile F_1 , odnosno $F_{1z} = F_1 \cdot \cos \alpha$, u pravcu ose štapa. Dijagram normalne sile prikazan je na slici 1.7.

Na djelovima AG_1 i G_2C analitički izraz transversalne sile je u zavisnosti od dužine nosača z pa se na dijelu AG_1 transversalna sila mijenja po paraboli, relacija (1*), a na dijelu G_2C je linearna, relacija (3*). Na dijelu nosača između Gerberovih zglobova G_1 i G_2 transversalna sila je konstantne vrijednosti sa skokovima koji potiču od koncentrisanih sila reakcije Y_B i vertikalne projekcije $F_{1y} = F_1 \sin \alpha$ od kose sile F_1 . Dijagram transversalne sile na dva mjesta na nosaču siječe nultu liniju, tj. na tim mjestima je $T = 0$, i moment savijanja ima lokalni ekstremum, kao što je prikazano na slici 1.7.

Kod crtanja dijagrama napadnog momenta treba naći vrijednosti u svim karakterističnim tačkama. Vrijednosti napadnog momenta u Gerberima G_1 i G_2 su jednake nuli. Između tih tačaka, s obzirom da na nosač djeluju samo koncentrisane sile, vrijednosti u karakterističnim tačkama G_1 , B , D i G_2 se spajaju pravolinijski.

Kod kontinualnih opterećenja, na djelovima AG_1 i G_2C , nalazimo analitički izraz koji je u funkciji od rastojanja z , pa je promjena napadnog momenta po paraboli trećeg reda a na drugom dijelu G_2C po kvadratnoj paraboli, kao što je u izrazima (2*) i (4*), u prethodnom dijelu zadatka. Dijagram napadnog momenta dat je na slici 1.7.

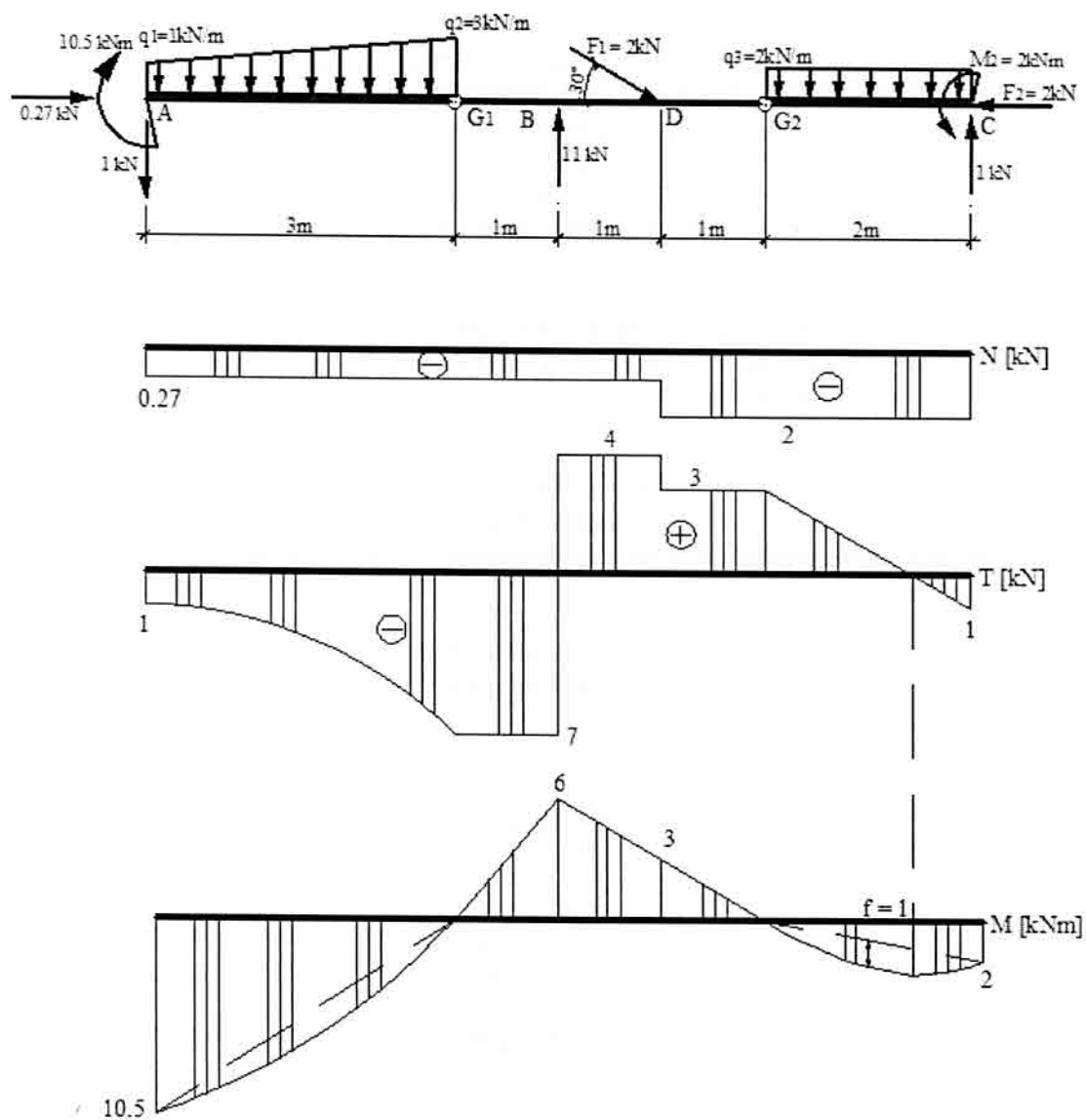
Posmatrajući relacije (1*) i (2*) za presjek 1-1 nosača, odnosno (3*) i (4*) za presjek nosača 2-2, možemo zaključiti da je izvod napadnog momenta po koordinati u pravcu ose nosača jednak vrijednosti transversalne sile u tom presjeku, tj.

$$\frac{dM}{dz} = T$$

Analitički izrazi za transversalnu silu i napadni moment, na djelovima nosača gdje djeluje kontinualno opterećenje omogućavaju praćenje toka njihove promjene duž ose nosača.

Naime, ako napadni moment raste, tada je transversalna sila pozitivna i obrnuto, ako napadni moment opada, tada je transversalna sila negativna.

Napadni moment ima ekstremnu vrijednost, kada je prvi izvod momenta po koordinati u pravcu ose štapa jednak nuli, tj. $F_T = 0$.

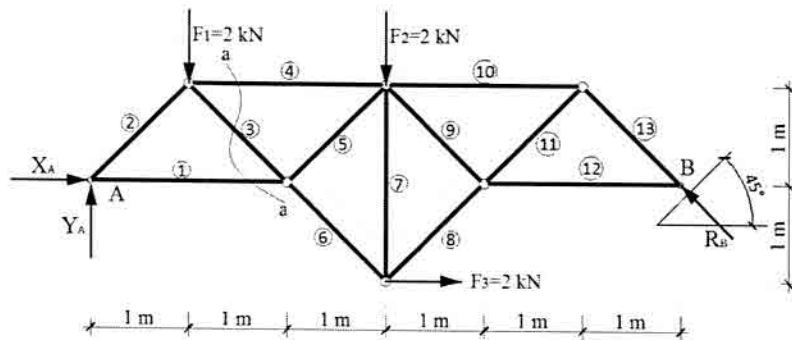


Slika 1.7

2. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Rešetka prikazana na slici 2.1, je spoljašnje statički određena, jer u osloncima A i B ima onoliko nepoznatih reakcija veza koliko ima i jednačina ravnoteže koje se za rešetku mogu napisati.



Slika 2.1

Jednačine ravnoteže za određivanje nepoznatih X_A , Y_A i R_B su:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6a + F_3 \cdot a - F_2 \cdot 3a - F_1 \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$R_B = \sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + F_3 - R_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (2)$$

$$X_A = -1 \text{ kN}$$

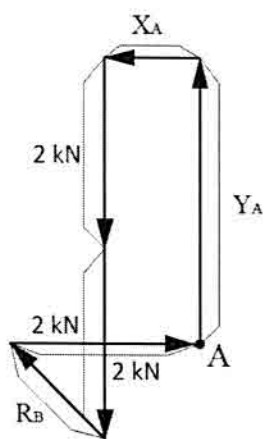
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + R_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_1 - F_2 = 0 \quad (3)$$

$$Y_A = 3 \text{ kN}$$

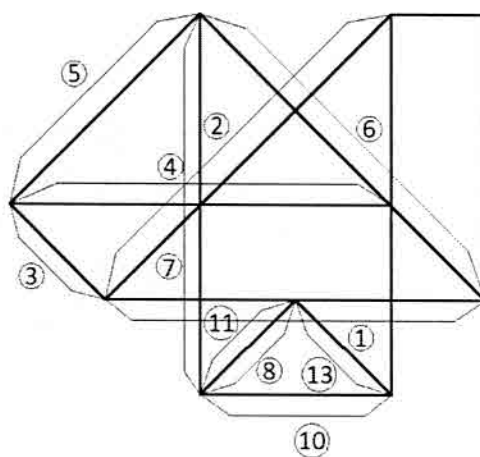
b) Kremonin plan sila

Za zadatu rešetku prvo provjeravamo da li je unutrašnje statički određena, koristeći jednačinu veze između broja štapova (s) i broja čvorova (n). Kako je uslov $s = 2n - 3$, zadovoljen, s obzirom da je u ovom slučaju $n = 8$ i $s = 13$, zaključujemo da je rešetka kruta i unutrašnje statički određena.

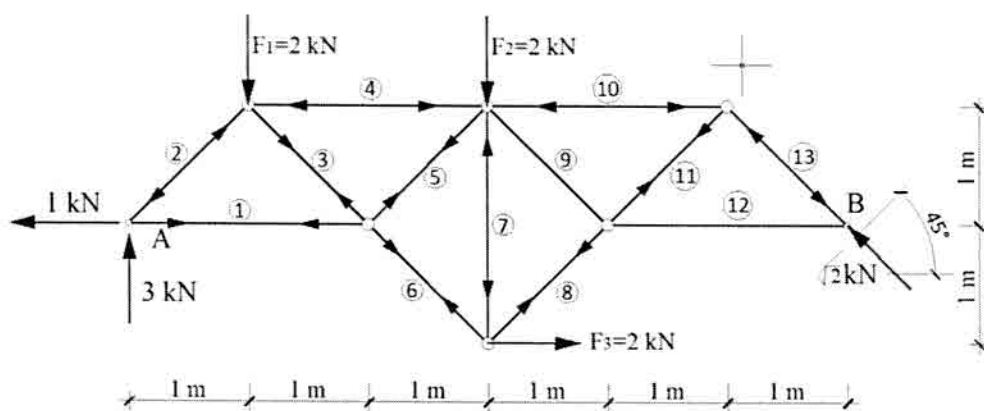
Kremonin plan sila crtamo u usvojenoj razmjeri, nanoseći jednu za drugom sve aktivne sile i reakcije veza, obilazeći rešetku u jednom smjeru tako da dobijamo zatvoren poligon sila kao što je prikazano na slici 2.2. Zatim, u istom smjeru, na istom poligonu, crtamo redom poligone sila za svaki čvor i dobijamo Kremonin plan sila kao na slici 2.3. Sa dobijenog poligona sila mogu se, vodeći računa o razmjeri koja je korišćena pri nanošenju sila, očitati vrijednosti za svaku silu kao i to da li je opterećena na pritisak ili zatezanje, što je strelicama prikazano na slici 2.4.



Slika 2.2



Slika 2.3



Slika 2.4

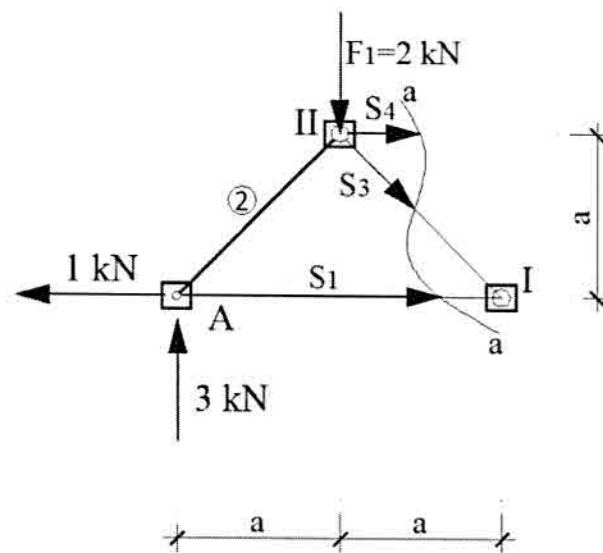
Vrijednosti svih sila u štapovima kao i njihov znak, date su u tabeli 1.

Tabela 1

	Zatezanje +	Pritisak -
1	4	
2		$3\sqrt{2}$
3	$\sqrt{2}$	
4		4
5	$2\sqrt{2}$	
6	$3\sqrt{2}$	
7		4
8	$\sqrt{2}$	
9	-	-
10		2
11	$\sqrt{2}$	
12	-	-
13		$\sqrt{2}$

c/ Riterova metoda za presjek a-a:

Riterova metoda se koristi za određivanje nepoznatih sila u štapovima rešetke u nekom njenom presjeku. Ovom metodom se mogu odrediti najviše tri sile, jer se za tijelo u ravni mogu postaviti najviše tri uslova ravnoteže. Iz praktičnih razloga, posmatra se dio rešetke lijevo ili desno od presjeka, što je u ovom slučaju za određivanje sila u štapovima 1, 3 i 4, dio rešetke lijevo od presjeka:



Slika 2.4

$$\odot \sum M_I = 0 \Rightarrow S_4 \cdot a + 3 \cdot 2a - 2 \cdot a = 0$$

$$S_4 = -4 \text{ kN}$$

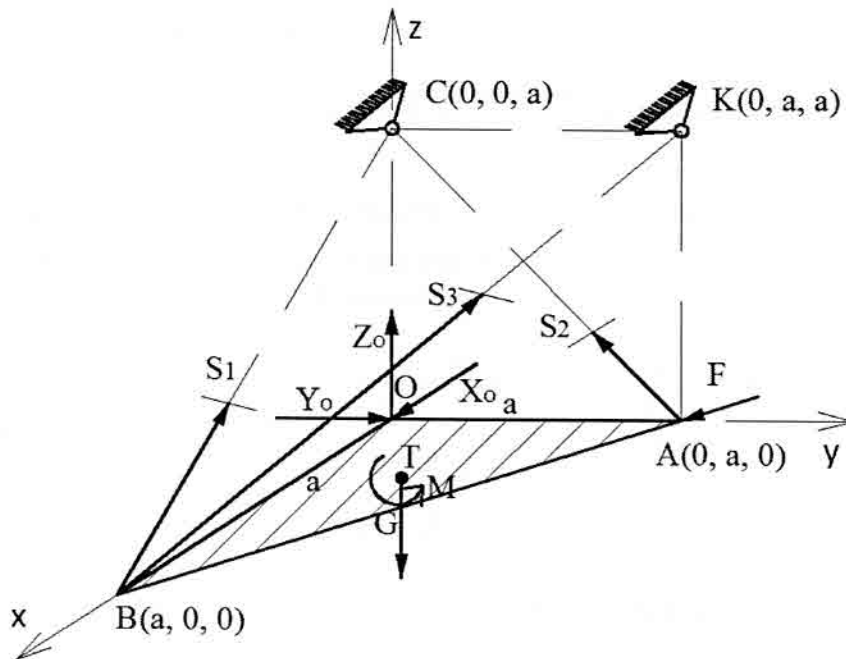
$$\odot \sum M_{II} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot a - 3 \cdot a - 1 \cdot a = 0$$

$$S_1 = 4 \text{ kN}$$

$$\odot \sum M_A = 0 \Rightarrow S_4 \cdot a + S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a + S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a + 2 \cdot a = 0$$

$$S_3 = \sqrt{2} \text{ kN}$$

3. ZADATAK



Slika 3.1

Analitički izrazi za sile kojima je ploča opterećena su:

$$\vec{F} = G \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - G \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{G} = -G \vec{k}$$

U ravni ploče djeluje spreg sila momenta:

$$\vec{M} = aG\sqrt{2} \vec{k}$$

Reakcija veze u zglobo O može biti prikazana u vektorskom obliku:

$$\vec{F}_O = X_O \vec{i} + Y_O \vec{j} + Z_O \vec{k}$$

Nepoznate sile u štapovima $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ i $\vec{S}_3$ mogu se predstaviti kao:

$$\vec{S}_1 = -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} = \left\{ -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\vec{s}_2 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} = \left\{ 0, -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\vec{s}_3 = -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{i} + S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{j} + S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{k} = \left\{ -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3}, S_3 \frac{\sqrt{3}}{3}, S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

ako pretpostavimo da su štapovi opterećeni na zatezanje, tj. da su im smjerovi od ploče.

Sada možemo postaviti jednačine ravnoteže, koje proizilaze iz uslova da je glavni vektor jednak nuli, odnosno da sume od svih sila za tri koordinatna pravca budu jednake nuli:

$$\sum X = 0; \quad X_O + G \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_O - G \frac{\sqrt{2}}{2} - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0; \quad Z_O - G + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \quad (3)$$

Za dati koordinatni sistem koordinate napadnih tačaka svih sila koje djeluju na ploču su:

B(a, 0, 0), A(0, a, 0), K(0, 0, a), C(0, 0, a), T(a/3, a/3, 0), gdje je T napadna tačka sile težine ploče.

Koristeći definisane koordinate, momenti svih sila u odnosu na koordinatni početak su:

$$\vec{M}_O^{(\vec{s}_1)} = \vec{r}_B \times \vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -S_1 \frac{a\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{M}_O^{(\vec{s}_2)} = \vec{r}_A \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} & S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = S_2 \frac{a\sqrt{2}}{2} \vec{i}$$

$$\vec{M}_O^{(\vec{s}_3)} = \vec{r}_B \times \vec{s}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} & S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} & S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = -S_3 \frac{a\sqrt{3}}{3} \vec{j} + S_3 \frac{a\sqrt{3}}{3} \vec{k}$$

$$\vec{M}_O^{(\vec{F})} = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ G \frac{\sqrt{2}}{2} & -G \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -aG \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$$

$$\vec{M}_O^{(\vec{G})} = \vec{r}_r \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{3} & \frac{a}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} = -\frac{aG}{3}\vec{i} + \frac{aG}{3}\vec{j}$$

Preostale tri jednačine ravnoteže za tijelo u prostoru obezbjeđuju da glavni moment od svih sila koje djeluju na ploču bude jednak nuli. To su:

$$\sum M_x = 0; \quad S_2 \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{aG}{3} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; \quad -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2}a - S_3 \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{aG}{3} = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0; \quad S_3 \frac{a\sqrt{3}}{3} - aG \frac{\sqrt{2}}{2} + M = 0 \quad (6)$$

Rješavanjem ovog sistema od šest jednačina sa šest nepoznatih, dobijaju se sljedeće vrijednosti:

$$S_1 = G + \frac{G\sqrt{2}}{3}$$

$$S_2 = \frac{G\sqrt{2}}{3}$$

$$S_3 = -\frac{G\sqrt{6}}{2}$$

$$X_O = \frac{G}{3} - \frac{G\sqrt{2}}{2}$$

$$Y_O = G\sqrt{2} - \frac{G}{3}$$

$$Z_O = \frac{5G}{3}$$

ARHITEKTONSKI FAKULTET U PODGORICI

MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA – Mehanika

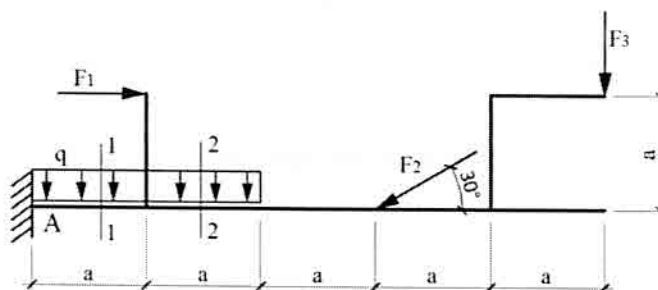
Ispitni rok 6

1. ZADATAK

Za nosač prikazan na slici 1 odrediti:

- reakcije u uklještenju;
- napisati analitičke izraze za presječne sile u presjecima 1-1 i 2-2;
- nacrtati dijagrame presječnih sila (N, T, M).

Dato je $a = 1\text{ m}$, $F_1 = 2\text{ kN}$, $F_2 = 2\text{ kN}$, $F_3 = 2\text{ kN}$, $q = 1\text{ kN/m}$.



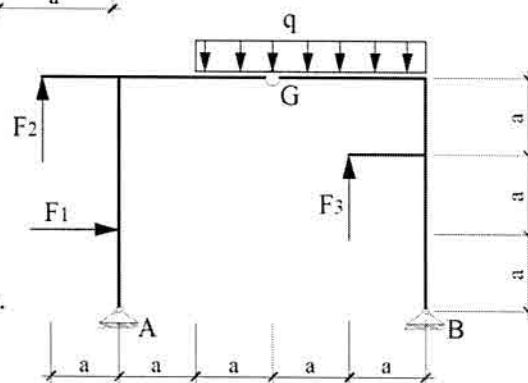
Slika 1

2. ZADATAK

Za ramovski nosač prikazan na slici 2 odrediti:

- reakcije u nepokretnim osloncima A i B;
- nacrtati dijagrame presječnih sila (N, T, M).

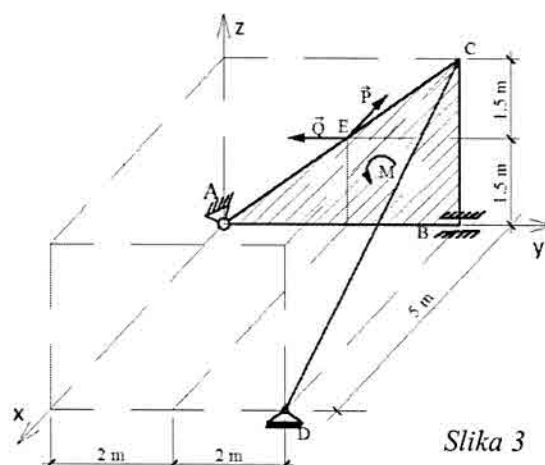
Dato je $a = 1\text{ m}$, $F_1 = 4\text{ kN}$, $F_2 = 2\text{ kN}$, $F_3 = 3\text{ kN}$, $q = 2\text{ kN/m}$.



Slika 2

3. ZADATAK

Homogena trougaona ploča težine $G=20\text{ kN}$ opterećena je silom $P=15\text{ kN}$ (paralelna osi x) i silom $Q=10\text{ kN}$ (paralelna osi y) i koncentrisanim momentom $M=30\text{ kNm}$ (koji djeluje u ravni ploče).
Odrediti reakcije oslonaca i silu u štapu CD.



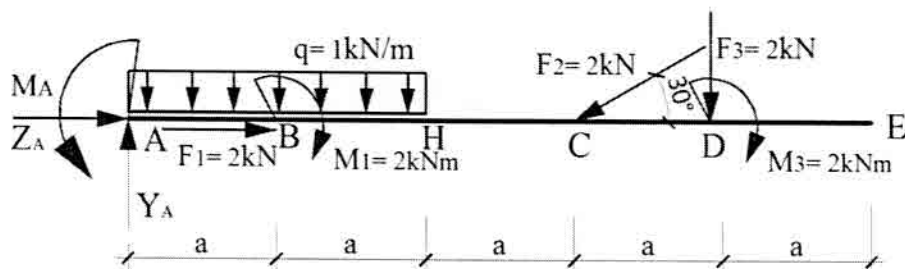
Slika 3

1. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Nosač prikazan na slici je konzola opterećena ravnomjernim kontinualnim opterećenjem $q = 1 \text{ kN/m}$ čije mehaničko dejstvo se može zamijeniti koncentrisanom silom $F_q = q \cdot 2a = 2 \text{ kN}$, koja djeluje u težištu ove površine odnosno na polovini dužine $2a$.

Takođe konzola je opterećena kosom silom F_2 pod uglom $\alpha = 30^\circ$ u odnosu na nosač, i sa dva ekscentrična opterećenja, horizontalnom silom F_1 koja se redukuje u tačku B nosača kao i spreg momenata $M_1 = F_1 \cdot a$ u istoj tački, i vertikalnom silom F_3 koja se zajedno sa spregom momenata $M_3 = F_3 \cdot a$ redukuje u tačku D konzole kao na slici 1.1.



Slika 1.1

Osim aktivnih sila kao reakcije veze u uklještenju A javljaju se tri nepoznate (Z_A , Y_A i M_A) za čije određivanje je potrebno pisati tri uslova ravnoteže za nosač u ravni.

Konzola opterećena aktivnim silama i silama koje su reakcije veza data je na slici 1.1.

Jednačine ravnoteže su:

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + F_1 - F_2 \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$Z_A = 2 - \sqrt{3} = -0.27 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A - F_q - F_2 \sin 30^\circ - F_3 = 0 \quad (2)$$

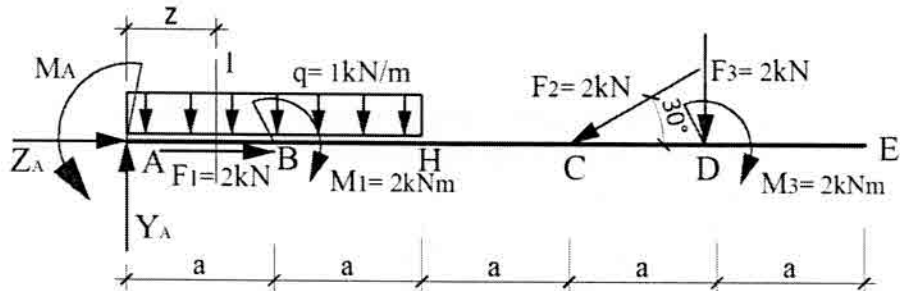
$$Y_A = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - M_1 - F_q \cdot a - F_2 \sin 30^\circ \cdot 3a - F_3 \cdot 4a - M_3 = 0 \quad (3)$$

$$M_A = 17 \text{ kNm}$$

Rješavanjem ovih jednačina dobijamo tražene reakcije veza.

b) Analitički izrazi

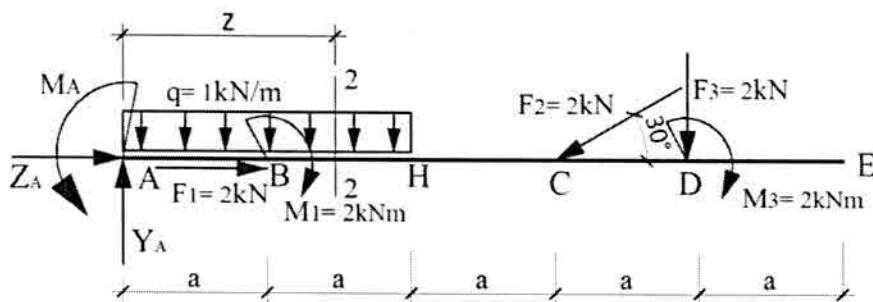


Slika 1.2

Dio AH:

Presjek 1-1 $T(z) = Y_A - q \cdot z = 5 - z$ (1*)

$0 \leq z \leq 1 \text{ m}$ $M(z) = -M_A + Y_A \cdot z - q \frac{z^2}{2} = -17 + 5z - \frac{z^2}{2}$ (2*)



Slika 1.3

Presjek 2-2 $T(z) = Y_A - q \cdot z = 5 - z$ (3*)

$1 \text{ m} \leq z \leq 2 \text{ m}$ $M(z) = -M_A + Y_A \cdot z - q \frac{z^2}{2} + M_1 = -15 + 5z - \frac{z^2}{2}$ (4*)

c) Dijagrami presječnih sila

Dijagrama aksijalnih sila, postoji na dijelu AC konzole i ima konstantnu vrijednost. Skok nastaje od sile F_1 u tački B, kao na slici 1.4.

Za crtanje transverzalne sile i napadnog momenta, neophodno je naći njihove vrijednosti u karakterističnim tačkama A, B, H, C, D i E.

Transverzalna sila na dijelu AH se mijenja linearno po formuli (1*) i (3*), dok na dijelu HE ima konstantne vrijednosti u određenim poljima HC, CD i DE, što se može vidjeti na slici 1.4.

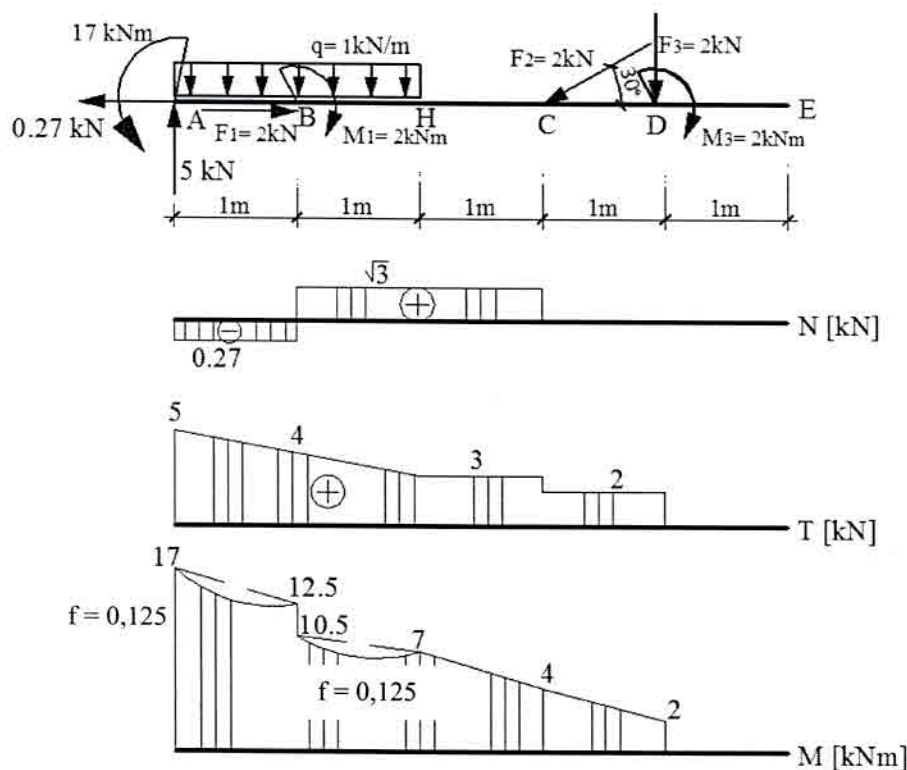
Napadni moment se na dijelu AH mijenja po kvadratnoj paraboli po formuli (2*) i (4*), a na dijelu HE vrijednosti momenta računaju se u karakterističnim tačkama i pravolinijski spajaju, kao na slici 1.4.

Očigledno je da postoji veza između vrijednosti transverzalne sile i momenta jer je:

$$\frac{dM}{dz} = T,$$

tj. prvi izvod napadnog momenta po koordinati u pravcu ose nosača jednak je vrijednosti transverzalne sile u tom presjeku.

Kao što se na slici 1.4 može primijetiti, na cijeloj dužini AD nosača, transverzalna sila je pozitivna a napadni moment raste.



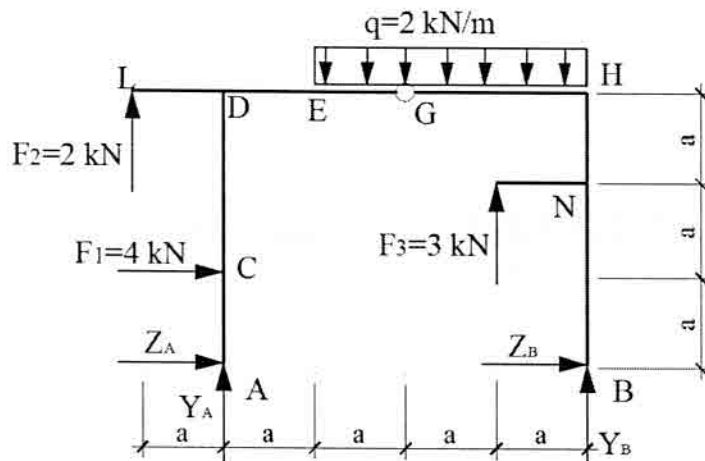
Slika 1.4

2. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Dati okvirni nosač sastoji se od dva nosača spojena Gerberovim zglobom. Opterećen je sa ravnomjernim kontinualnim opterećenjem na dijelu EH i tri koncentrisane sile F_1 , F_2 i F_3 . Nosač oslobođen veza, sa reakcijama veza u osloncima A (Z_A , Y_A) i B (Z_B , Y_B) prikazan je na slici 2.1.

Za određivanje reakcija veza postavimo tri jednačine ravnoteže za nosač u ravni i jednu dopunsku momentnu jednačinu za Gerberov zglob. Te jednačine su:



Slika 2.1

$$\oplus \sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 4a + F_1 \cdot a + F_2 \cdot 5a - q \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} + F_3 \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$Y_A \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 1 = 0$$

$$Y_A = -2 \text{ kN}$$

$$\ominus \sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 4a + F_3 \cdot 3a - F_2 \cdot a - q \cdot 3a \cdot \left(\frac{3a}{2} + a\right) - F_1 \cdot a = 0 \quad (2)$$

$$Y_B \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + a\right) - 4 \cdot 1 = 0$$

$$Y_B = 3 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_G^d = 0 &\Rightarrow Y_B \cdot 2a + Z_B \cdot 3a + F_3 \cdot a - q \cdot 2a \cdot a = 0 \\ 3 \cdot 2 + Z_B \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$Z_B = -\frac{5}{3} \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_G^l = 0 &\Rightarrow Y_A \cdot 2a - Z_A \cdot 3a - F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot 3a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0 \\ -2 \cdot 2 - Z_A \cdot 3a - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$Z_A = -\frac{7}{3} \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B + F_1 = 0$$

b) Dijagrami presječnih sila

Određivanje funkcija N, T i M u poprečnim presjecima nosača:

Dio AD:

Presjek 1-1	$N = Y_A$
Za $0 \leq y \leq a$ (AC)	$T = -Z_A$
	$M = -Z_A \cdot y$
Presjek 2-2	$N = Y_A$
Za $a \leq y \leq 3a$ (CD)	$T = -Z_A - F_1$
	$M = -Z_A \cdot y - F_1(y - a)$

Dio LH:

Presjek 1-1	$N = 0$
Za $0 \leq z \leq a$ (LD)	$T = F_2$
	$M = F_2 \cdot z$
Presjek 2-2	$N = Z_A + F_1$
Za $a \leq z \leq 2a$ (DE)	$T = F_2 + Y_A$

Presjek 3-3

Za $2a \leq z \leq 5a$ (EH)

$$M = F_2 \cdot z + Y_A(z - a) - F_1 \cdot 2a - Z_A \cdot 3a$$

$$N = Z_A + F_1$$

$$T = F_2 + Y_A - q(z - 2a)$$

$$M = F_2 \cdot z + Y_A(z - a) - F_1 \cdot 2a - Z_A \cdot 3a - q \frac{(z-2a)^2}{2}$$

Dio BH:

Presjek 1-1

Za $0 \leq y \leq 2a$ (BN)

$$N = Y_B$$

$$T = Z_B$$

$$M = Z_B \cdot y$$

Presjek 2-2

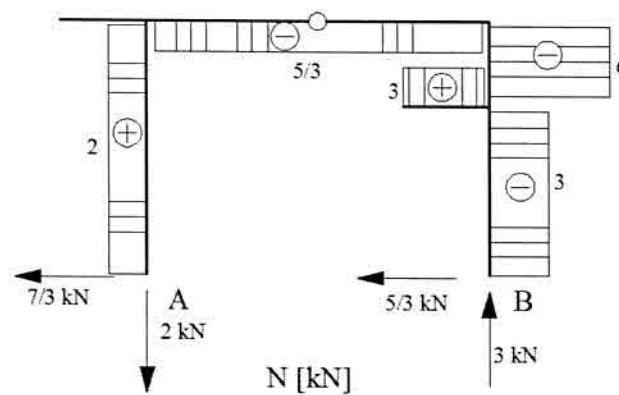
Za $2a \leq y \leq 3a$ (NH)

$$N = Y_B + F_3$$

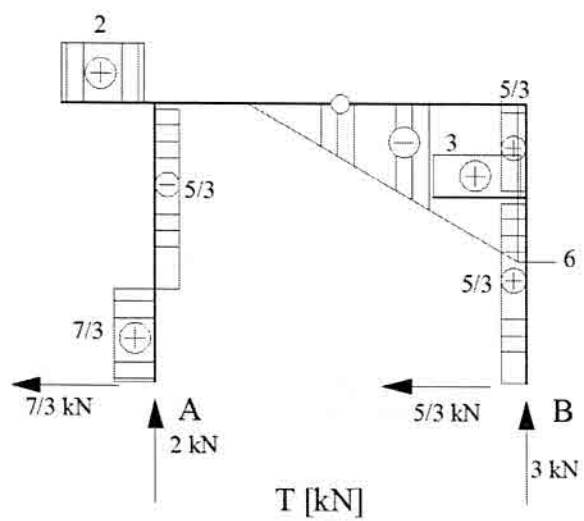
$$T = Z_B$$

$$M = Z_B \cdot y - F_3 \cdot a$$

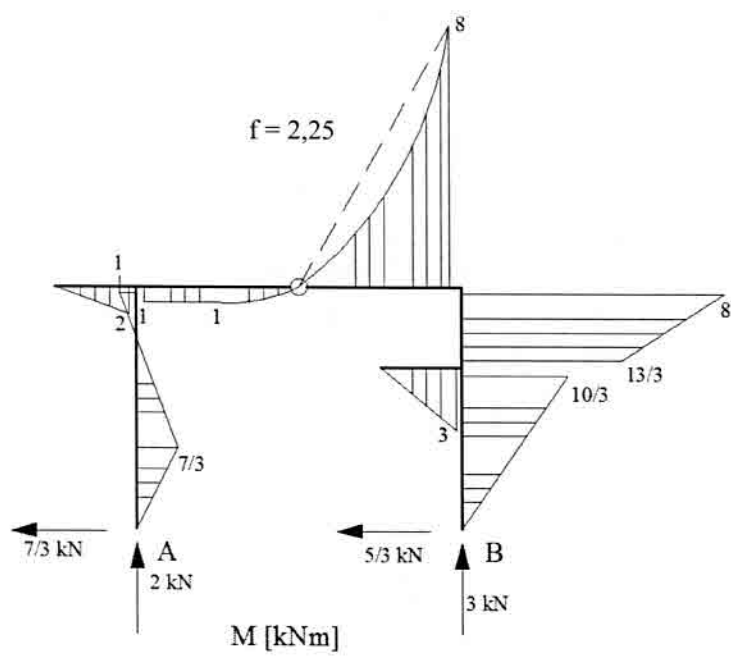
Dijagrami za normalnu silu, transversalnu silu i napadni moment za koje su date funkcije prikazani su na slikama 2.2, 2.3 i 2.4.



Slika 2.2

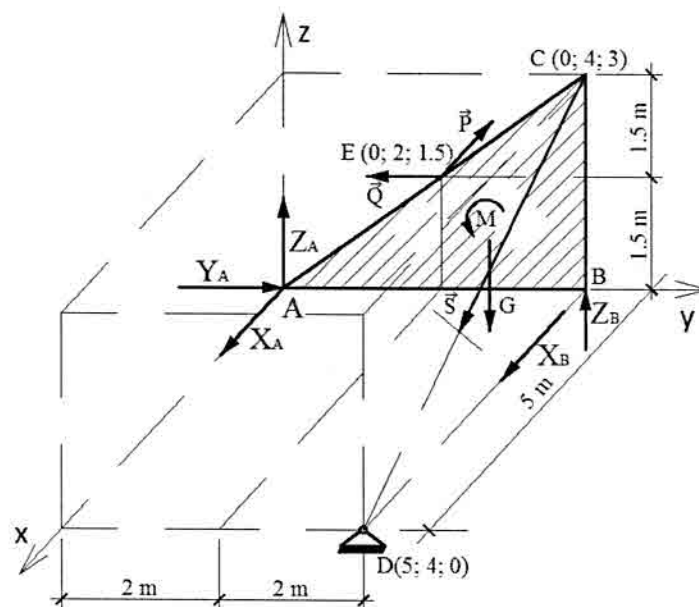


Slika 2.3



Slika 2.4

3. ZADATK



Slika 3.1

U težištu ploče ABC djeluje vertikalno naniže sila teže G , pa je $\vec{G} = -20\vec{k}$. Na ploču u tački E djeluju sile $\vec{P} = -15\vec{i}$ i $\vec{Q} = -10\vec{j}$. U ravni ploče djeluje moment $\vec{M} = 30\vec{i}$.

Na slici 3.1 prikazana je ploča oslobođena od veza sfernog zgloba A preko tri međusobno upravne komponente X_A , Y_A , Z_A , kolinearne sa koordinatnim osama.

Kod cilindričnog zgloba B kada ploču oslobodimo veze, reakcije X_B i Z_B leže u ravni paralelnoj sa x_Az , s obzirom da se osa cilindričnog zgloba B poklapa sa y osom.

Pretpostavimo da je CD laki štap, opterećen na zatezanje, tj. sila $\vec{S}$ je usmjerena od ploče ka tački D. Sila $\vec{S}$ leži u ravni paralelnoj xAz pa se projektuje na x i na z osu. Koristeći pravougli trougao DBC sila $\vec{S}$ se može prikazati:

$$\vec{S} = \frac{5S}{\sqrt{34}}\vec{i} - \frac{3S}{\sqrt{34}}\vec{k}$$

Moment sile $\vec{S}$ za tačku A prema definiciji je:

$$\vec{M}_A^S = \overrightarrow{AC} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 3 \\ \frac{5S}{\sqrt{34}} & 0 & -\frac{3S}{\sqrt{34}} \end{vmatrix} = -\frac{12S}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{15S}{\sqrt{34}}\vec{j} - \frac{20S}{\sqrt{34}}\vec{k}$$

Da bi se ostvarila ravnoteža posmatranog sistema, potrebno je da je suma projekcija svih sila na koordinatne ose jednaka nuli:

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A + X_B - 15 + S \cdot \frac{5}{\sqrt{5^2+3^2}} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A - 10 = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B - G - S \cdot \frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}} = 0 \quad (3)$$

Primjenjujući Varijanovu teoremu za moment sila za koordinatne ose dobija se:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 10 \cdot 1,5 - G \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + M - S \cdot \frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}} \cdot 4 + Z_B \cdot 4 = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -15 \cdot 1,5 + S \cdot \frac{5}{\sqrt{5^2+3^2}} \cdot 3 = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow P \cdot 2 - S \cdot \frac{5}{\sqrt{5^2+3^2}} \cdot 4 - X_B \cdot 4 = 0 \quad (6)$$

Rješavajući ovaj sistem od 6 jednačina sa 6 nepoznatih, dobijaju se tražene nepoznate reakcije veza.

$$\text{Iz (2)} \Rightarrow Y_A = 10 \text{ kN}$$

$$\text{Iz (5)} \Rightarrow 22,5 - S \cdot \frac{15}{\sqrt{5^2+3^2}} = 0 \Rightarrow S = 8,7464 \text{ kN}$$

$$\text{Iz (4)} \Rightarrow -15 + 53,333 - 30 + 18 - Z_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow Z_B = -6,583 \text{ kN}$$

$$\text{Iz (6)} \Rightarrow 30 - 30 + X_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow X_B = 0$$

$$\text{Iz (1)} \Rightarrow X_A - 15 + 7,5 = 0 \Rightarrow X_A = -7,5 \text{ kN}$$

$$\text{Iz (3)} \Rightarrow Z_A + 6,583 - 20 - 4,5 = 0 \Rightarrow Z_A = 31,08 \text{ kN}$$

ARHITEKTONSKI FAKULTET U PODGORICI

MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA – Mehanika

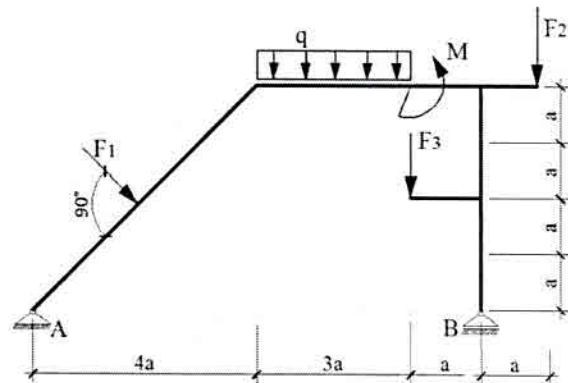
Ispitni rok 7

1. ZADATAK

Za okvirni nosač, opterećen kao na slici 1, odrediti:

- reakcije u osloncima A i B;
- nacrtati dijagrame presječnih sila (N, T, M);

Dato je $a = 1\text{ m}$, $F_1 = 2\sqrt{2}\text{ kN}$, $F_2 = 3\text{ kN}$, $F_3 = 2\text{ kN}$, $q = 2\text{ kN/m}$ i $M = 6\text{ kNm}$.



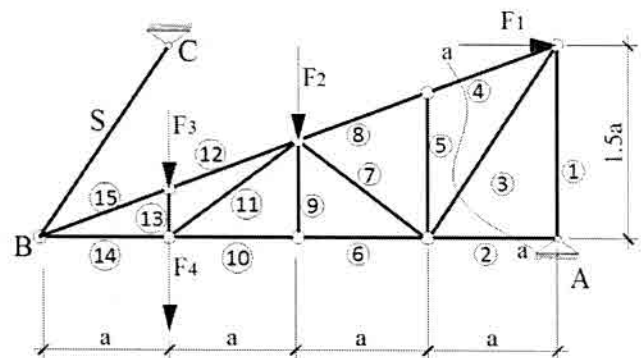
Slika 1

2. ZADATAK

Za rešetkasti nosač, opterećen silama

$F_1 = 2\text{ kN}$, $F_2 = 1.5\text{ kN}$, $F_3 = 1\text{ kN}$ i $F_4 = 1\text{ kN}$, kao na slici 2, odrediti:

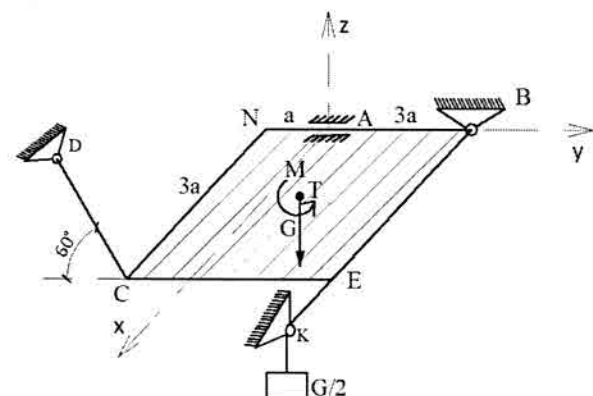
- reakcije oslonaca;
- sile u štapovima metodom Kremone;
- za presjek a-a provjeriti sile metodom Ritiera.



Slika 2

3. ZADATAK

Homogena pravougaona ploča težine $\vec{G}$ u horizontalnom položaju održava se pomoću sfernog zgloba B, cilindričnog zgloba A i štapa CD, kao na slici 3. Za ploču je vezano užo, prebačeno preko kotura K, na čijem je kraju teg težine $\vec{G}/2$. U ravni ploče djeluje moment $\vec{M} = Ga$ u smjeru obrtanja suprotnom kretanju kazaljke na satu. Odrediti nepoznate reakcije veza u zglobovima A i B i silu u štapa CD.

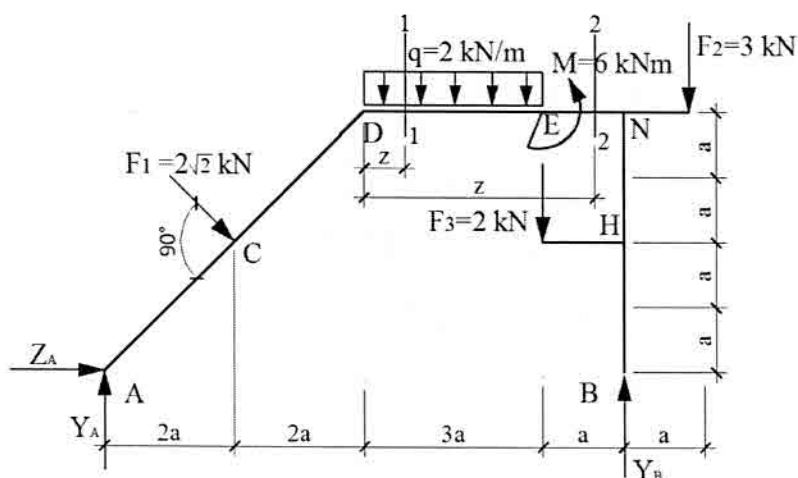


Slika 3

1. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Reakcije veza se dobijaju iz jednačina ravnoteže, za sistem aktivnih sila i momenata i reakcija veza, prikazanih na slici 1.1. Postoje tri nepoznate reakcije veza u osloncima A i B i tri jednačine ravnoteže za nosač u ravni iz kojih ćemo ih odrediti. Za dati okvirni nosač, te jednačine su:



Slika 1.1

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 8a - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6a + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a - q \cdot 3a \cdot \left(\frac{3a}{2} + 1\right) - M + F_2 \cdot a - F_3 \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$Y_A \cdot 8 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right) - 6 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$Y_A = 3.5 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 8a - F_3 \cdot 7a - F_2 \cdot 9a + M - q \cdot 3a \cdot \left(\frac{3a}{2} + 4\right) - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a = 0 \quad (2)$$

$$Y_B \cdot 8 - 2 \cdot 7 - 3 \cdot 9 + 6 - 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 4\right) - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$Y_B = 9.5 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (3)$$

$$Z_A = -2 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - q \cdot 3a - F_2 - F_3 = 0$$

Rješenje ovog sistema su tražene nepoznate reakcije veza.

b) Dijagrami presječnih sila

Da bi nacrtali statičke dijagrame sila u presjecima za nosač, koji su dati na slikama 1.2, 1.3 i 1.4, potrebno je naći funkcionalnu zavisnost između ovih veličina i položaja poprečnog presjeka u kojem se određuju sile. One su za cijeli nosač date kako slijedi:

Dio AD:

Tačka C	$F_{aC}^l = Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_A \frac{\sqrt{2}}{2}$ $F_{tC}^l = Y_A \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A \frac{\sqrt{2}}{2}$ $M_C^l = \left(Y_A \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 2\sqrt{2}$ $F_{aC}^d = Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_A \frac{\sqrt{2}}{2}$ $F_{tC}^d = Y_A \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} - F_1$ $M_C^d = \left(Y_A \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 2\sqrt{2}$
---------	---

Tačka D	$F_{aD}^l = Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_A \frac{\sqrt{2}}{2}$ $F_{tD}^l = Y_A \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} - F_1$ $M_D^l = \left(Y_A \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 4\sqrt{2} - F_1 \cdot 2\sqrt{2}$ $F_{aD}^d = Z_A + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ $F_{tD}^d = Y_A - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ $M_D^d = \left(Y_A \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 4\sqrt{2} - F_1 \cdot 2\sqrt{2}$
---------	---

Dio DN:

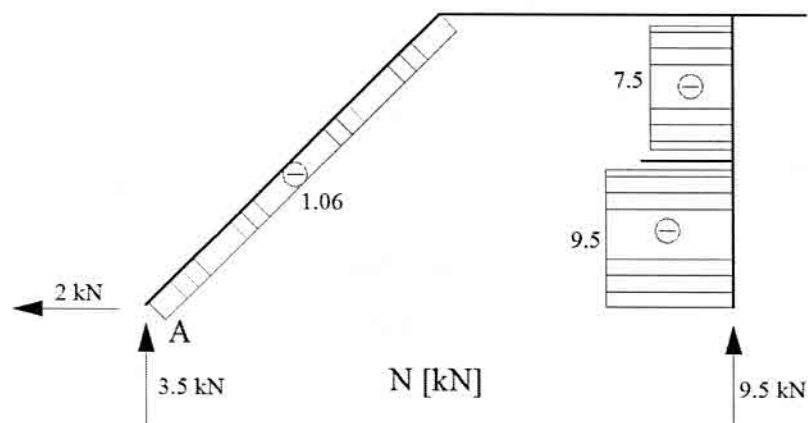
Presjek 1-1	$F_a = Z_A + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$
$0 \leq z \leq 3a$ (DE)	$F_t = Y_A - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - q \cdot z$ $M = Y_A(4 + z) - Z_A \cdot 4 - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} (2 + z) - q \frac{z^2}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{Presjek 2-2} \quad F_a &= Z_A + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 3a \leq z \leq 4a \text{ (EN)} \quad F_t &= Y_A - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - q \cdot 3 \\
 M &= Y_A(4+z) - Z_A \cdot 4 - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} (2+z) \\
 &\quad - F_q \left(\frac{3}{2} + z \right) - M
 \end{aligned}$$

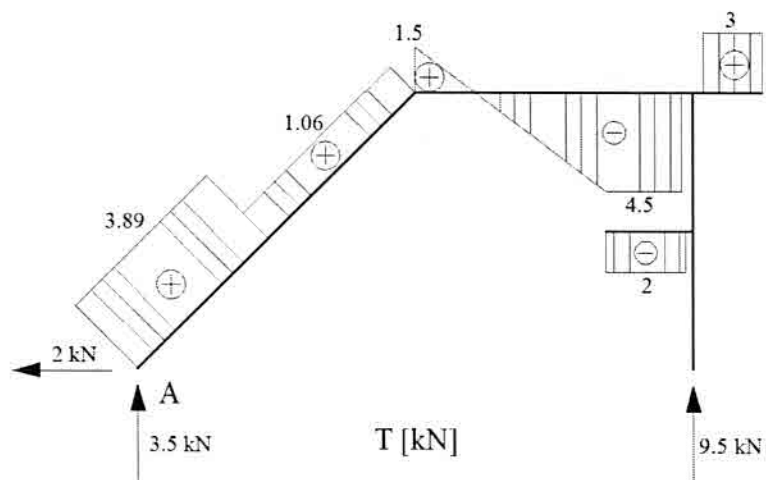
Dio BN:

$$\begin{aligned}
 \text{Presjek 1-1} \quad F_a &= Y_B \\
 0 \leq y \leq 2a \text{ (BH)} \quad F_t &= 0 \\
 M &= 0 \\
 \text{Presjek 2-2} \quad F_a &= Y_B - F_3 \\
 2a \leq y \leq 4a \text{ (HN)} \quad F_t &= 0 \\
 M &= F_3 \cdot a
 \end{aligned}$$

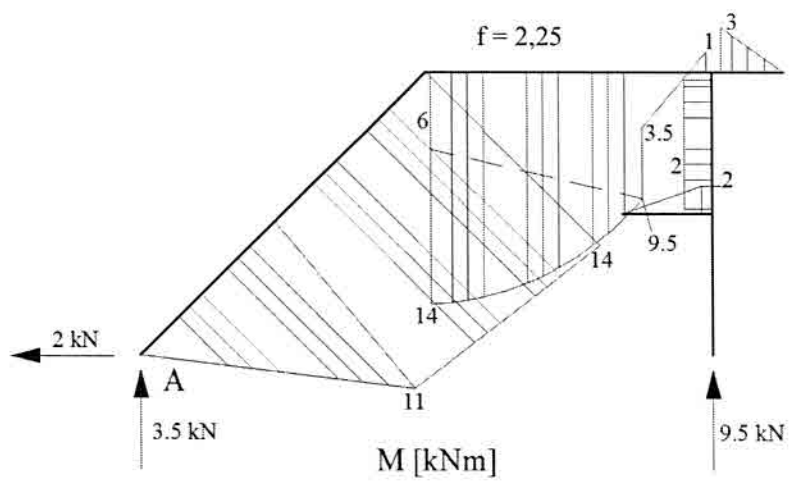
U tačku H, dijela BN, vertikalna sila F_3 se redukuje na vertikalnu silu F_3 i spreg sila momenta $M = F_3 \cdot a$.



Slika 1.2



Slika 1.3

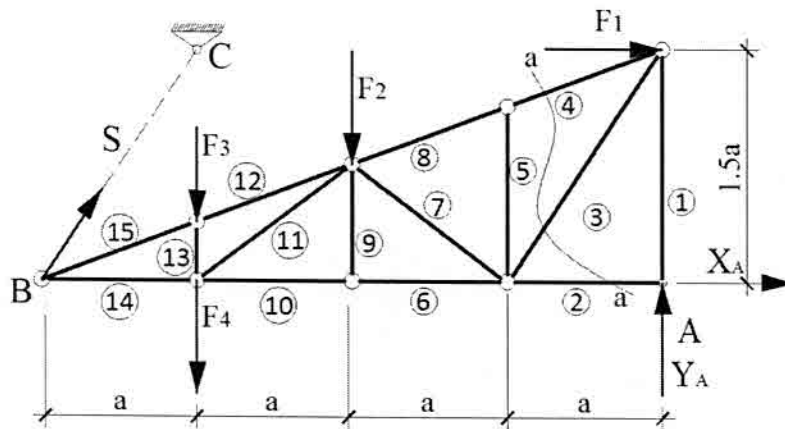


Slika 1.4

2. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

U položaju prikazanom na slici 2.1 rešetka se održava pomoću nepokretnog oslonca A i štapa BC. Od aktivnog opterećenja na ploču djeluju sile F_1 , F_2 , F_3 i F_4 , a kada se oslobodi veza, još tri reakcije veza. Rešetka je spoljašnje statički određena i za određivanje tri nepoznate reakcije veza postavljaju se tri jednačine ravnoteže.



Slika 2.1

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow S \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 4a - F_3 \cdot 3a - F_4 \cdot 3a - F_2 \cdot 2a + F_1 \cdot 1.5a = 0 \quad (1)$$

$$S = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A + F_1 + S \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = 0 \quad (2)$$

$$X_A = -3 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A - F_3 - F_4 - F_2 + S \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 0 \quad (3)$$

$$Y_A = 2 \text{ kN}$$

b) Kremonin plan sila

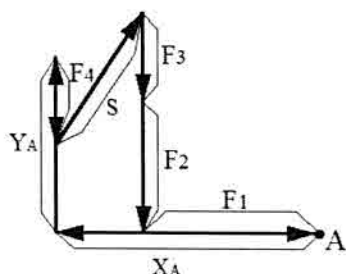
Osnovni zadatak kod rešetke jeste odrediti sile u štapovima. Da bi odredili sile u štapovima, potrebno je provjeriti da li je rešetka unutrašnje statički određena, vodeći računa da broj štapova (s) i broj čvorova (n) zadovoljavaju relaciju:

$$s = 2n - 3 \quad (4)$$

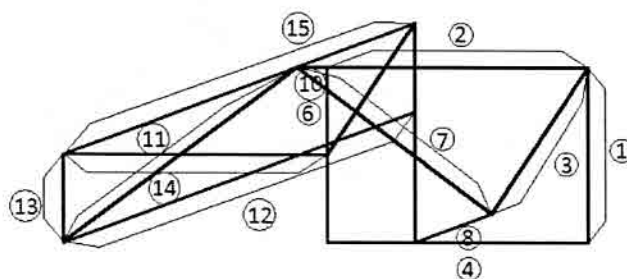
Za $s = 15$ i $n = 9$, relacija (4) je zadovoljena, pa se zaključuje da je rešetka unutrašnje statički određena i da je kinematički nepromjenljiva.

Kod određivanja sila grafičkom metodom, Kremoninim planom sila, prvi korak je određivanje osnovnog poligona sila. Polygon sila prikazan na slici 2.2, crtamo obilazeći rešetku u jednom smjeru i u tom smjeru obilazimo svaki čvor pri crtanju poligona sila za čvorove, kao što je prikazano na slici 2.3. Poligoni sila crtaju se u određenoj razmjeri.

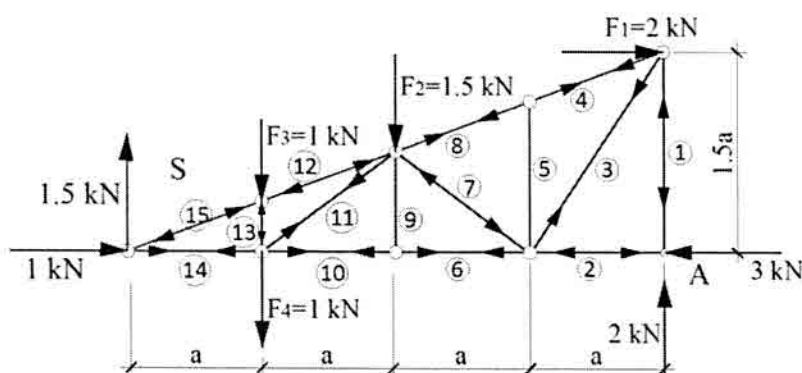
Da bi rešetka bila u ravnoteži treba da je svaki čvor u ravnoteži, što znači da će svi ovi poligoni biti zatvoreni. Zatvarajući poligone za čvorove određuju se intenziteti sila i njihov znak, što je prikazano na slici 2.4.



Slika 2.2



Slika 2.3



Slika 2.4

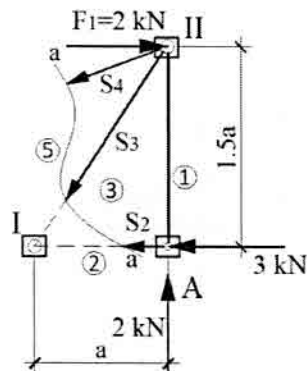
Vrijednosti svih sila u štapovima date su u tabeli 1.

Tabela 1

	Zatezanje +	Pritisak -
1		2
2		3
3	2	
4	0.949	
5	-	-
6	0.332	
7		3.763
8	0.949	
9	-	-
10	0.332	
11	3.335	
12		4.272
13		1
14	3	
15		4.272

c) Riterova metoda za presjek a-a:

Riterovom analitičkom metodom određuju se nepoznate sile, najviše tri, u nekom presjeku rešetke. Pošto su određene reakcije veza posmatra se dio rešetke lijevo ili desno od presjeka. Obično se bira dio sa manje sile iz praktičnih razloga, a ovom slučaju to je dio rešetke desno od presjeka, kao što je prikazano na slici 2.5.



Slika 2.5

Iz tri momentne jednačine ravnoteže za izabrani dio rešetke dobijaju se sile u štapovima S_2 , S_3 i S_4 za presjek a-a, koje su već nađene Kremoninim planom sila.

$$\sum M_I = 0 \Rightarrow S_4 \cdot \frac{4}{\sqrt{18.25}} \cdot 1.5a - 2 \cdot 1.5a - S_4 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{18.25}} \cdot a + 2 \cdot a = 0$$

$$S_4 = 0.949 \text{ kN}$$

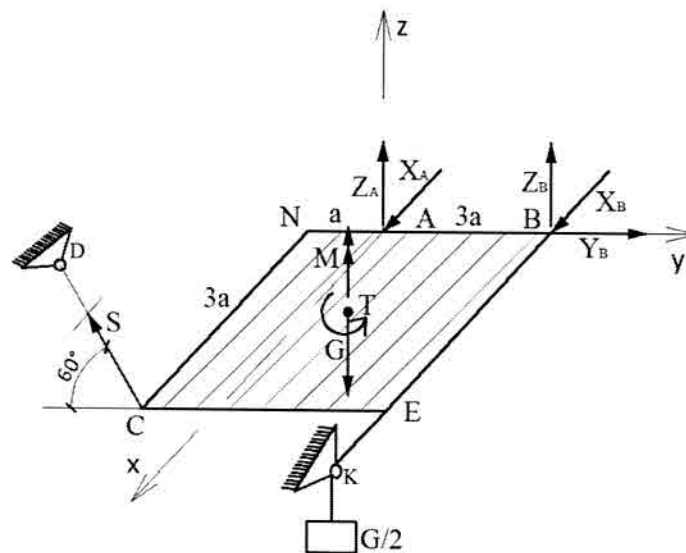
$$\sum M_{II} = 0 \Rightarrow S_2 \cdot 1.5a + 3 \cdot 1.5a = 0$$

$$S_2 = -3 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow S_4 \cdot \frac{4}{\sqrt{18.25}} \cdot 1.5a + S_3 \frac{1}{\sqrt{3.25}} \cdot 1.5a - 2 \cdot 1.5a = 0$$

$$S_3 = 2 \text{ kN}$$

3. ZADATAK



Slika 3.1

Da bi mogli razmatrati ravnotežu ploče potrebno je prvo osloboditi je od veza, a njihovo dejstvo zamijeniti reakcijama veza kao što je prikazano na slici 3.1. U sfernom zglobu B djeluju tri reakcije veze i to X_B , Y_B i Z_B a kod cilindričnog ležišta A dvije međusobno upravne reakcije X_A i Z_A . Osa cilindričnog ležišta A se poklapa sa y osom pa u tom pravcu nema reakcije. Pretpostavimo da je štap opterećen na zatezanje i sila S je usmjerena od ploče, kao što je prikazano na slici 3.1.

Sila $\vec{S}$ određena je sa:

$$\vec{S} = -\frac{S}{2}\vec{j} + \frac{S\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

Vektorski oblik reakcija u osloncima A i B su:

$$\vec{F}_B = X_B\vec{i} + Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}$$

$$\vec{F}_A = X_A\vec{i} + Z_A\vec{k}$$

Od aktivnih opterećenja ploča ima težinu $\vec{G}$ u tački težišta T:

$$\vec{G} = -G\vec{k}$$

i moment sprega sila:

$$\vec{M} = Ga\vec{k}$$

S obzirom da je užo vezano u tački E za ploču neistegljivo, onda se sila $\vec{G}/2$ od tega prenosi u tačke E paralelno x osi kao što je prikazano na slici 3.1, i određena je u sljedećem obliku:

$$\vec{F} = \frac{G}{2}\vec{i}$$

Postavljeni su izrazi za sve sile koje djeluju na ploču, pa se mogu napisati prva tri uslova ravnoteže koji obezbjeđuju da su komponente glavnog vektora sistema sila jednake nuli:

$$\sum X = 0; \quad X_A + X_B + G/2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_B - S/2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0; \quad Z_A + Z_B + \frac{\sqrt{3}}{2}S - G = 0 \quad (3)$$

Za preostala tri uslova ravnoteže treba odrediti projekcije momenata svih sila, u odnosu na koordinatni početak. S tim u vezi, prvo se određuju koordinate napadnih tačaka svih sila koje djeluju na ploču.

Za dati koordinatni sistem koordinate tačaka su: A(0, 0, 0), B(0, 3a, 0), C(3a, -a, 0) i T(a, 3a/2, 0), gdje je T napadna tačka težine ploče.

Momenti sila u odnosu na koordinatni početak su:

$$\vec{M}_A^{(\vec{S})} = \vec{r}_C \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3a & -a & 0 \\ 0 & -\frac{S}{2} & \frac{S\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{Sa\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{3aS\sqrt{3}}{2}\vec{j} - \frac{3}{2}aS\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F})} = \vec{r}_E \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3a & 3a & 0 \\ \frac{G}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}Ga\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{G})} = \vec{r}_T \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3}{2}a & a & 0 \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} = -aG\vec{i} + \frac{3}{2}aG\vec{j}$$

Jednačine ravnoteže koje obezbjeđuju da su komponente glavnog momenta datog sistema sila koji djeluje na ploču, jednak nuli, su:

$$\sum M_x = 0; -3aZ_B - \frac{a\sqrt{3}}{2}S - aG = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; -\frac{3a\sqrt{3}}{2}S + \frac{3}{2}aG = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0; -3aX_B - \frac{3}{2}aS - \frac{3}{2}Ga + Ga = 0 \quad (6)$$

Rješavajući postavljeni sistem od šest jednačina sa šest nepoznatih, X_A , Z_A , X_B , Y_B , Z_B i S , za njih se dobijaju sljedeće vrijednosti:

$$X_A = \frac{G}{6}(5 + \sqrt{3})$$

$$Z_A = G$$

$$X_B = \frac{G}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Y_B = \frac{S}{2}$$

$$Z_B = -\frac{G}{2}$$

$$S = \frac{G\sqrt{3}}{3}$$

ARHITEKTONSKI FAKULTET U PODGORICI

MEHANIKA I OTPORNOST MATERIJALA – Mehanika

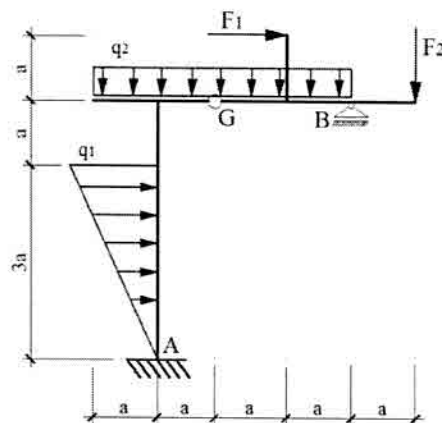
Ispitni rok 8

1. ZADATAK

Za ram AB, opterećen kao na slici, odrediti:

- reakcije u osloncima A i B;
- nacrtati dijagrame presječnih sila (N, T, M);

Dato je $a = 1\text{ m}$, $F_1 = 2\text{ kN}$, $F_2 = 3\text{ kN}$, $q_1 = 3\text{ kN/m}$ i $q_2 = 2\text{ kN/m}$.

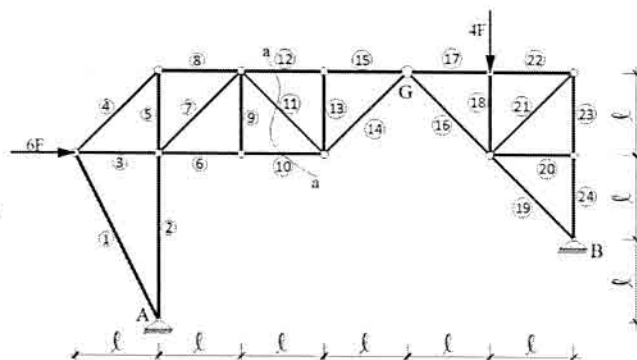


Slika 1

2. ZADATAK

Za rešetkasti nosač opterećen silama $6F$ i $4F$, kao na slici 2, odrediti:

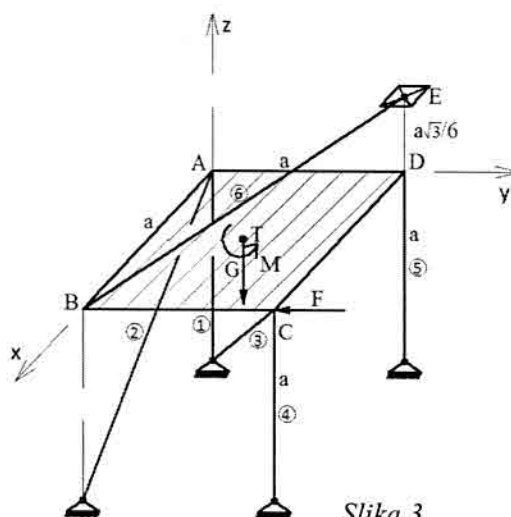
- reakcije oslonaca;
- sile u štapovima metodom Kremone;
- za presjek a-a provjeriti sile metodom Ritera.



Slika 2

3. ZADATAK

Homogena kvadratna ploča stranice a i težine G u položaju prikazanom na slici 3 održava se pomoću šest štapova. U ravni ploče djeluje spreg sila momenta $\vec{M} = 2aG$, a u tački C ploče, paralelno osi y djeluje sila F u suprotnom smjeru. Odrediti sile u štapovima ako je intenzitet sile F jednak težini G ploče a rastojanje $ED = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.



Slika 3

a) Reakcije oslonaca

Kada se okvir na slici 1.1, oslobodi od veza u uklještenju u tački A i u osloncu B, javljaju se reakcije veza (Z_A , Y_A , M_A , Y_B) koje određujemo iz tri uslova ravnoteže za nosač u ravni, kao cjelini, i dodatne momentne jednačine za Gerberov zglobov G. Ove jednačine glase:

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 2a - F_2 \cdot 3a - F_1 \cdot a - q_2 \cdot 2a \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$Y_B \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$Y_B = 7.5 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B \cdot 3a + M_A - F_2 \cdot 4a - F_1 \cdot 5a - 4a^2 q_2 - \frac{1}{2} q_1 \cdot 3a \cdot 2a = 0 \quad (2)$$

$$7.5 \cdot 3 + M_A - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot 2 = 0$$

$$M_A = 16.5 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_A + F_1 + \frac{1}{2} q_1 \cdot 3a = 0 \quad (3)$$

$$Z_A + 2 + \frac{1}{2} 3 \cdot 3 = 0$$

$$Z_A = -6.5 \text{ kN}$$

$$\sum M_G^l = 0 \Rightarrow Y_A \cdot a - M_A - Z_A \cdot 4a - \frac{1}{2} q_1 \cdot 3a \cdot 2a - q_2 \cdot 2a \cdot a = 0 \quad (4)$$

$$Y_A \cdot 1 - 16.5 + 6.5 \cdot 4 - \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$Y_A = 3.5 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - F_2 - q \cdot 4a = 0$$

Rješavanjem ovih jednačina dobijamo tražene reakcije veza.

b) Dijagrami presječnih sila

Da bi nacrtali dijagrame presječnih sila (N, T, M) potrebno je odrediti promjenu ovih funkcija u svakom presjeku nosača.

Analitički izrazi za funkcije M, T i N u poprečnim presjecima nosača su:

Dio A – D:

Presjek 1-1

$$N = Y_A$$

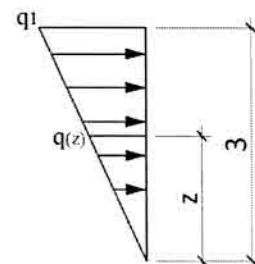
$$0 \leq y \leq 3a \text{ (AC)}$$

$$T = -Z_A - \frac{1}{2} q(z) \cdot z$$

$$M = -M_A - Z_A \cdot z - \frac{1}{2} q(z) \cdot z \cdot \frac{z}{3}$$

$$q(z): q_1 = z:3$$

$$q(z) = z$$



Presjek 2-2

$$N = Y_A$$

$$3a \leq y \leq 4a \text{ (CD)}$$

$$T = -Z_A - \frac{1}{2} q_1 \cdot 3a$$

$$q(z): q_1 = z: 3$$

$$M = -M_A - Z_A \cdot z - \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot q_1 (z - 2a)$$

$$q(z) = z$$

Dio N-H:

Presjek 1-1

$$N = 0$$

$$0 \leq z \leq a \text{ (ND)}$$

$$T = -q_2 \cdot z$$

$$M = -\frac{1}{2} q_2 \cdot z^2$$

Presjek 2-2

$$N = Z_A + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot q_1$$

$$a \leq z \leq 3a \text{ (DE)}$$

$$T = Y_A - q_2 \cdot z$$

$$M = Y_A(z - a) - M_A - q \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot q_1 \cdot 2a - Z_A \cdot 4a$$

Presjek 3-3

$$N = F_a = Z_A + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot q_1 + F_1$$

$$3a \leq z \leq 4a \text{ (EB)}$$

$$T = Y_A - q_2 \cdot z$$

$$M = Y_A(z - a) - M_A - q \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot q_1 \cdot 2a - Z_A \cdot 4a - F_1 \cdot a$$

Presjek 4-4

$$N = Z_A + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot q_1 + F_1$$

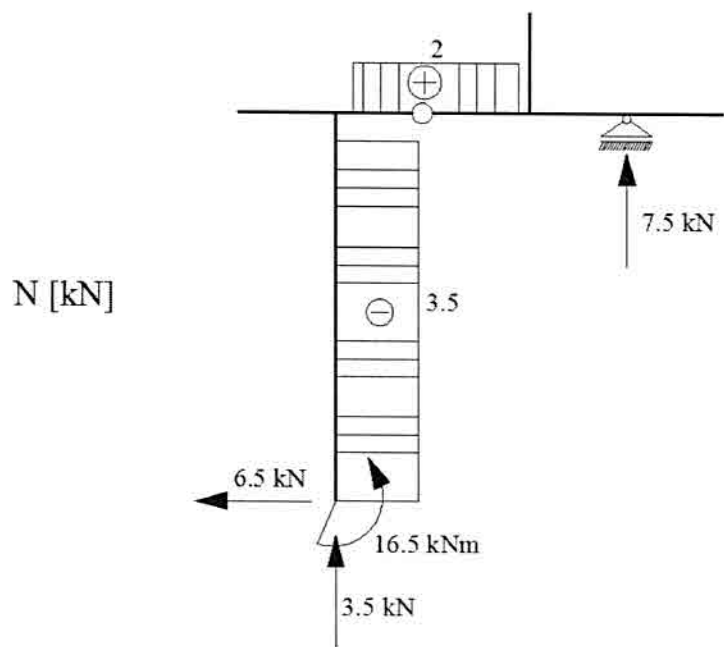
$$4a \leq z \leq 5a \text{ (HB)}$$

$$T = Y_A - q_2 \cdot 4a + Y_B$$

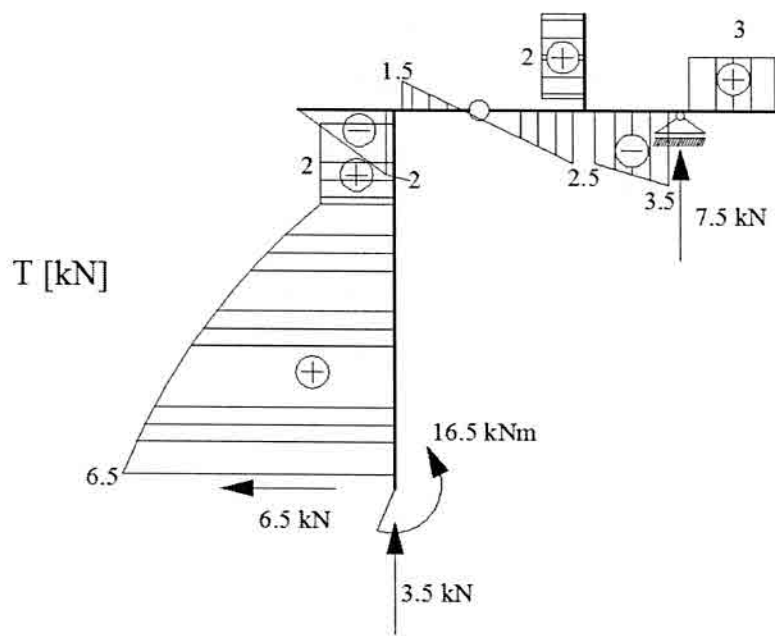
$$M = Y_A(z - a) - M_A - Z_A \cdot 4a - q_2 \cdot 4a(z - 2a) - F_1 \cdot a -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot q_1 \cdot 2a + Y_A(z - 4a)$$

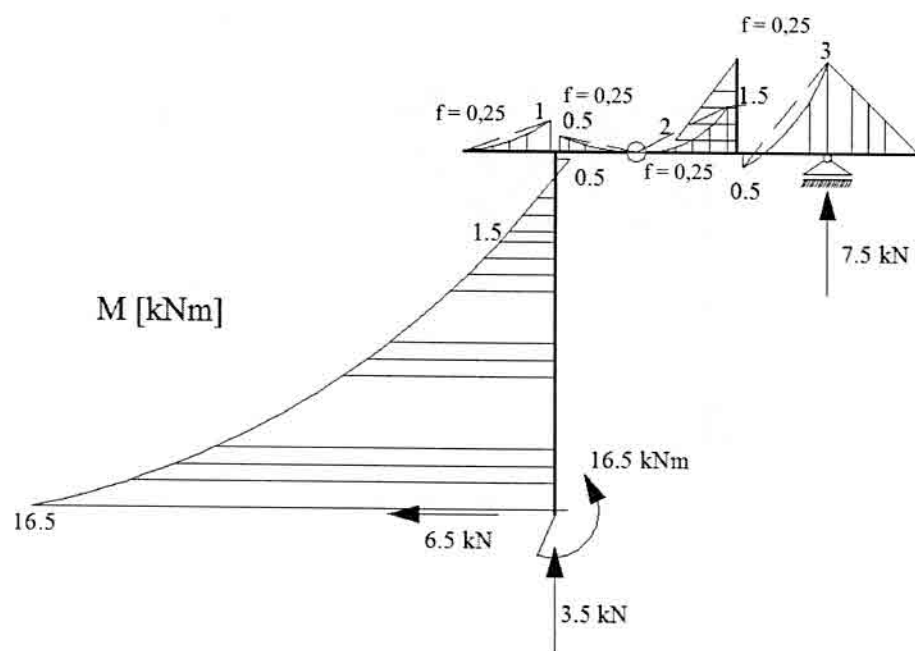
Na slikama 1.2, 1.3 i 1.4, nacrtani su dijagrami normalne sile, transverzalne sile i napadnog momenta izračunati preko navedenih analitičkih izraza za svaki presjek.



Slika 1.2



Slika 1.3

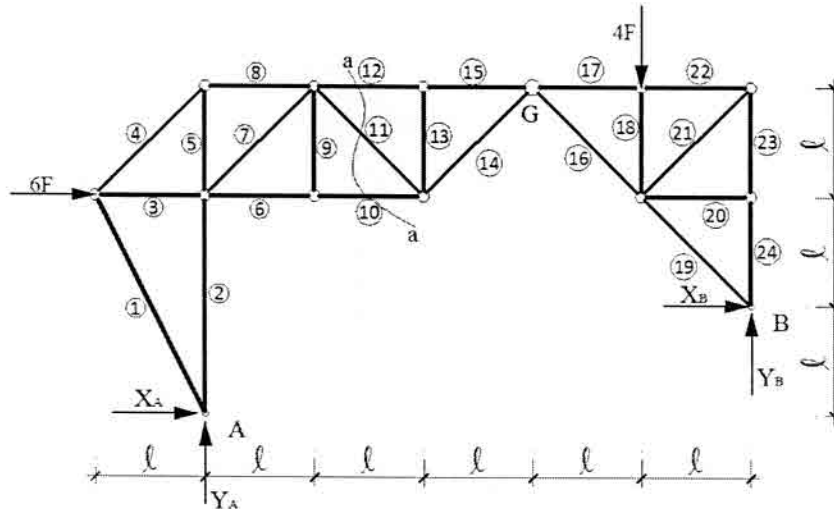


Slika 1.4

2. ZADATAK

a) Reakcije oslonaca

Na slici 2.1 prikazana je Gerberova rešetka, sastavljena od dva dijela spojena zgobom u tački G. Kada se rešetka oslobodi veza u tačkama A i B, na tim mjestima postavljaju se po dvije reakcije veza za svaki oslonac X_A , Y_A i X_B , Y_B , koje se određuju iz sljedećih uslova ravnoteže



Slika 2.1

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -X_B \cdot l + Y_B \cdot 5l - 4F \cdot 4l + 6F \cdot 2l = 0 \quad (1)$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A + X_B + 6F = 0 \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - 4F = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_G^d = 0 \Rightarrow X_B \cdot 2l + Y_B \cdot 2l - 4F \cdot l = 0 \quad (4)$$

Osim prve tri jednačine ravnoteže za sistem u ravni, kod Gerberove rešetke postavljamo i dopunsku četvrtu jednačinu i to momentnu jednačinu za Gerberov zglob G, sa lijeve ili desne strane od zgloba.

Iz postavljene četiri jednačine, dobijaju se nepoznate reakcije veza:

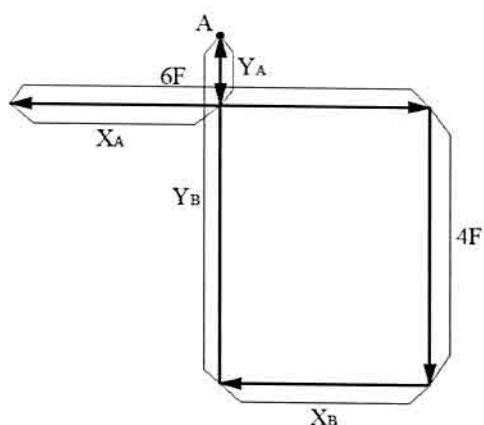
$$X_A = -3F, Y_A = -F, X_B = -3F, Y_B = 5F.$$

b) Kremonin plan sila

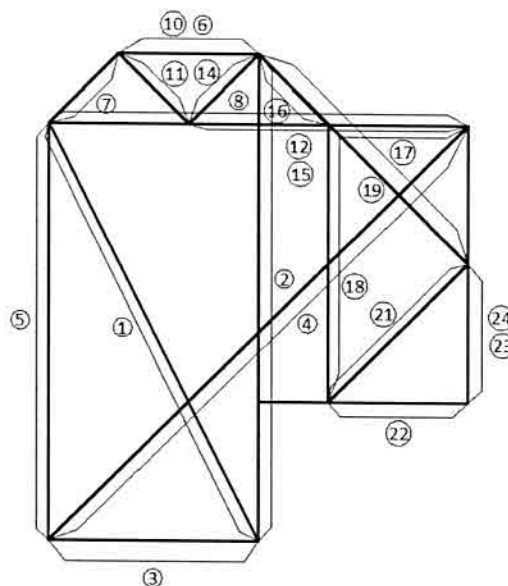
Da li je rešetka unutrašnje statički određena i kinematički stabilna provjerićemo pomoću izraza $s = 2n - 3 - g$, kod koga je (s) broj štapova, (n) broj čvorova i (g) broj Gerberovih zglobova. Za $s = 24$, $n = 14$ i $g = 1$, ova rešetka jeste unutrašnje statički određena i nepromjenljiva figura.

Prvi korak u određivanju nepoznatih sila u svim štapovima rešetke, koristeći grafičku metodu Kremonin plan sila, jeste nacrtati poligon sila, koji se crta nanošenjem svih aktivnih sila i reakcija veza, obilazeći rešetku u izabranom smjeru, kao što je prikazano na slici 2.2. Ako je rešetka u ravnoteži, poligon će biti zatvoren. Zatim, posmatramo ravnotežu svakog čvora kao sistema sučeljenih sila. Sile u svakom čvoru obilazimo u istom smjeru u kome smo obilazili rešetku. Čvorove biramo tako da u svakom sledećem čvoru imamo najviše dvije nepoznate sile u štapovima a sve sile nanosimo u određenoj razmjeri. Kremonin plan sila za datu rešetku prikazan je na slici 2.3:

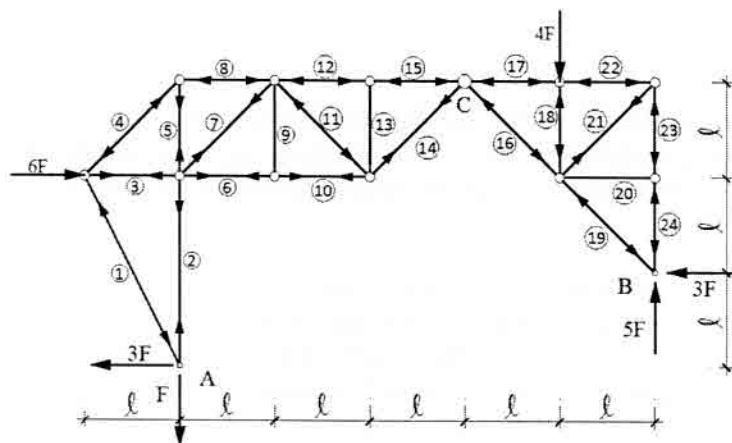
Sa dobijenog poligona sila mogu se, vodeći računa o razmjeri koja je korišćena pri nanošenju sila, naći vrijednosti za svaku silu, što je strelicama prikazano na slici 2.4.



Slika 2.2



Slika 2.3



Slika 2.4

Vodeći računa o razmjeri kojom smo nanosili sile, sada sa Kremoninog plana možemo očitati vrijednosti svih sila. One su prikazane u tabeli 1 i iz nje se vidi intenzitet i znak sile, pomoću koga određujemo da li je štap opterećen na pritisak ili na zatezanje.

Tabela 1

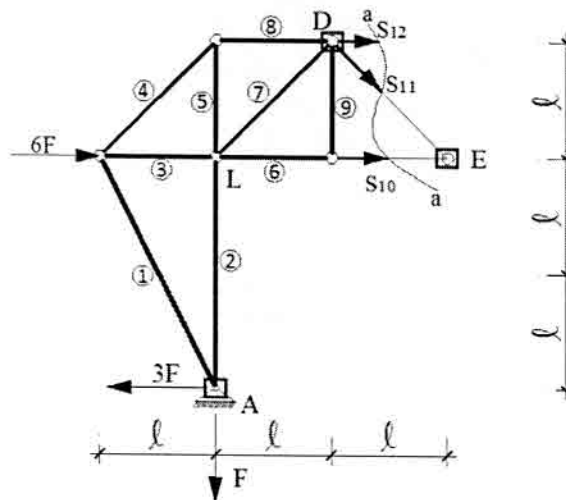
	Zatezanje +	Pritisak -
1		$3\sqrt{5}F$
2	$7F$	
3	$3F$	
4		$6\sqrt{2}F$
5	$6F$	
6	$2F$	
7	$\sqrt{2}F$	
8		$6F$
9	-	-
10	$3F$	
11		$\sqrt{2}F$
12		$4F$

	Zatezanje +	Pritisak -
13	-	-
14	$\sqrt{2}F$	
15		$6F$
16		$\sqrt{2}F$
17		$2F$
18		$4F$
19		$3\sqrt{2}F$
20	-	-
21	$2\sqrt{2}F$	
22		$2F$
23		$2F$
24		$2F$

c) Riterova metoda za presjek a-a:

Riterov analitički metod koristi se za određivanje nepoznatih sila u presjeku rešetke. U ovom zadatku, to će biti zamišljeni presjek preko traženih štapova 10, 11 i 12. Iz praktičnih razloga, posmatraćemo ravnotežu rešetke lijevo od tog presjeka kako je prikazano na slici 2.5.

Jednačine ravnoteže su:



Slika 2.5

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow S_{10} \cdot l + 6F \cdot l + F \cdot l - 3F \cdot 3l = 0$$

$$S_{10} = 3F$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow S_{12} \cdot l + 3F \cdot 2l - F \cdot l = 0$$

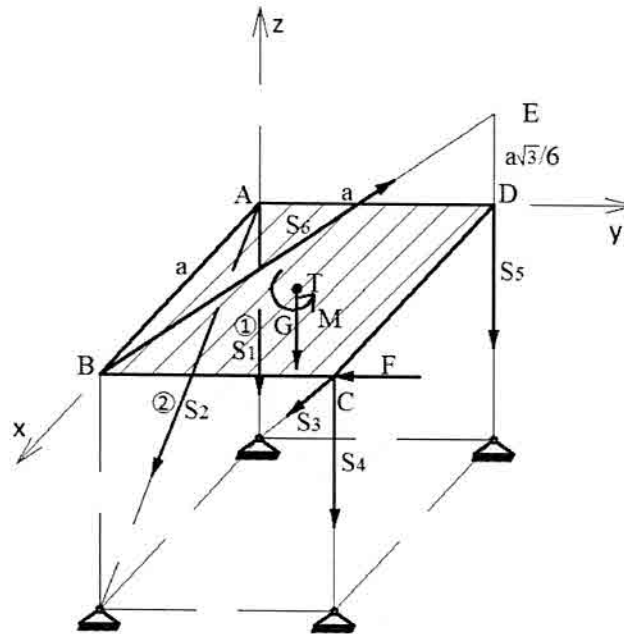
$$S_{12} = -4F$$

$$\sum M_L = 0 \Rightarrow S_{12} \cdot l + S_{11} \cdot l\sqrt{2} + 3F \cdot 2l = 0$$

$$S_{11} = -F\sqrt{2}$$

Ove vrijednosti sila u štapovima, nađene analitičkom Riterovom metodom presjeka, poklapaju se sa vrijednostima sila dobijenih Kremoninim planom i prikazanim u tabeli 1.

3. ZADATAK



Slika 3.1

U ravnotežnom položaju posmatranu kvadratnu ploču pridržava šest štapova za koje ćemo pretpostaviti da su laki i opterećeni na zatezanje, što znači da sile u štapovima djeluju od ploče. Tako, za reakcije veza, imamo šest nepoznatih sila u štapovima.

Kao aktivne sile na ploču djeluju njena težina $\vec{G} = -G\vec{k}$ u presjeku dijagonala i sila $\vec{F} = -G\vec{j}$ koja djeluje u tački C.

Da bi napisali jednačine ravnoteže za proizvoljan prostorni sistem sila, treba naći analitički izraz za svaku silu:

$$\vec{S}_1 = -S_1\vec{k}$$

$$\vec{S}_2 = S_2\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - S_2\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

$$\vec{S}_3 = -S_3\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} - S_3\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} - S_3\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$$

$$\vec{S}_4 = -S_4\vec{k}$$

$$\vec{S}_5 = -S_5\vec{k}$$

$$\vec{S}_6 = -S_6\frac{2\sqrt{3}}{5}\vec{i} + S_6\frac{2\sqrt{3}}{5}\vec{j} + S_6\frac{1}{5}\vec{k}$$

$$\overline{BE}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 = \sqrt{\frac{75}{36}}a^2$$

$$\overline{BE} = \frac{5\sqrt{3}}{6}a$$

Sada se mogu postaviti tri jednačine ravnoteže koje se odnose na komponente glavnog vektora sistema sila koje obezbjeđuju da je on jednak nuli.

$$\sum X = 0; \quad S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - S_6 \frac{2\sqrt{3}}{5} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0; \quad -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} + S_6 \frac{2\sqrt{3}}{5} - G = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0; \quad -S_1 - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - S_4 - S_5 + S_6 \frac{1}{5} - G = 0 \quad (3)$$

Da bi odredili projekcije momenata od svih sila koje djeluju na ploču, potrebno je odrediti koordinate napadnih tačaka tih sila, a to su: A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(a, a, 0), D(0, a, 0) i T(a/2, a/2, 0), gdje je T napadna tačka sile težine ploče.

Momenti svih sila u odnosu na koordinatni početak su:

$$\vec{M}_A^{(\vec{s}_1)} = 0$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{s}_2)} = 0$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{s}_3)} = \vec{r}_C \times \vec{S}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} & -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} & -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = -S_3 \frac{a\sqrt{3}}{3} \vec{i} + S_3 \frac{a\sqrt{3}}{3} \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{s}_4)} = \vec{r}_C \times \vec{S}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & -S_4 \end{vmatrix} = -aS_4 \vec{i} + aS_4 \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_5)} = \vec{r}_D \times \vec{S}_5 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -S_5 \end{vmatrix} = -aS_5\vec{i}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{S}_6)} = \vec{r}_B \times \vec{S}_6 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ -S_6\frac{2\sqrt{3}}{5} & +S_6\frac{2\sqrt{3}}{5} & S_6\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -S_6\frac{a}{5}\vec{j} + S_6\frac{2a\sqrt{3}}{5}\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{G})} = \vec{r}_T \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} = -\frac{a}{2}G\vec{i} + \frac{a}{2}G\vec{j}$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F})} = \vec{r}_C \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & -G & 0 \end{vmatrix} = -aG\vec{k}$$

U ravni ploče djeluje spreg sila momenta $\vec{M} = M\vec{k}$.

Jednačine ravnoteže koje obezbjeđuju da glavni moment datog sistema sila koji djeluje na ploču, bude jednak nuli, su:

$$\sum M_x = 0; \quad -S_3\frac{a\sqrt{3}}{3} - aS_4 - aS_5 - \frac{a}{2}G = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; \quad S_3\frac{a\sqrt{3}}{3} + aS_4 - S_6\frac{a}{5} + \frac{a}{2}G = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0; \quad S_6\frac{2a\sqrt{3}}{5} - aG + M = 0 \quad (6)$$

Rješavajući sistem jednačina od (1) do (6) kao sistem od šest jednačina sa šest nepoznatih, dobijamo tražene sile u štapovima:

$$S_1 = \frac{G}{2}\left(5 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$S_2 = -3G\sqrt{2}$$

$$S_3 = -2G\sqrt{3}$$

$$S_4 = \frac{G}{2}\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$S_5 = \frac{G\sqrt{3}}{4}$$

$$S_6 = -\frac{5}{6}G\sqrt{3}$$

Literatura

Mehanika

J.L.Meriam and L.G.Kraig. Engineering mechanics: Statics. J.Wiley and Sons, Inc., New York, USA, 5th edition 2003. ISBN 0-471-26607-8.

L.Vujošević. Mehanika I –Statika, NIO „Pobjeda“, Titograd, 1979.

L.Rusov. Mehanika – Statika. Privredni pregled, Beograd, 1973.

N.Naerlovic-Veljković. Mehanika I, peto izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1996 .

Stanko Brčić. Tehnička mehanika I, Akademska misao, Beograd, 2012.

L.Vujošević, D.Blagojević : Zbirka rešenih zadataka iz statike sa izvodima iz teorije, Naučna knjiga, 1981.

S.Brčić, D.Grbić, D.Šumarac, R.Mandić, Z.Mišković : Mehanika I - Zbirka ispitnih zadataka, Naučna knjiga, Beograd, 1992.