Услов равнотеже система сучељних сила:

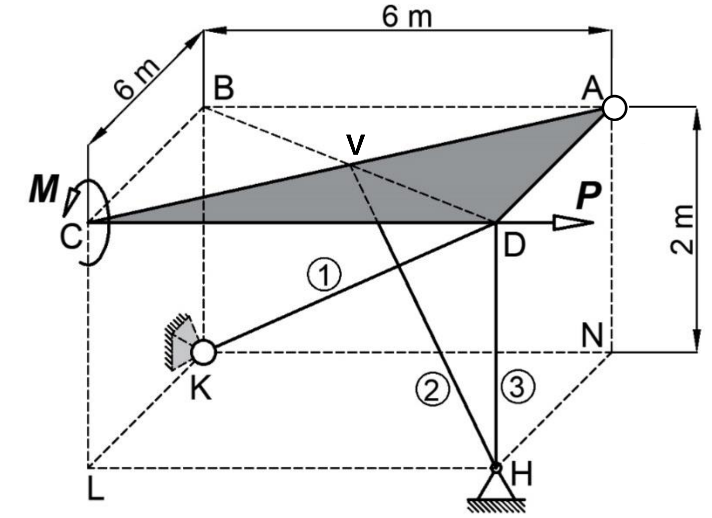
$$\vec{F}_r = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_{r_x} = 0 \\ F_{r_y} = 0 \\ F_{r_z} = 0 \end{cases}$$

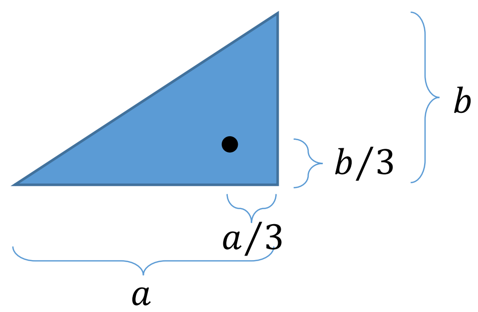
Услови равнотеже система сила који НИЈЕ сучељни:

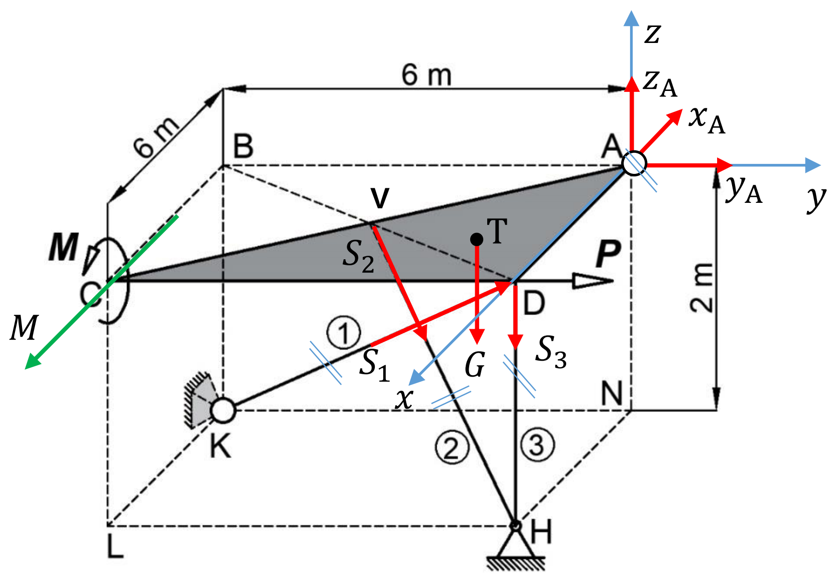
$$\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_{R_x} = 0 \\ F_{R_y} = 0 \\ F_{R_z} = 0 \end{cases}, \qquad \vec{M}_R = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_{R_x} = 0 \\ M_{R_y} = 0 \\ M_{R_z} = 0 \end{cases}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 1

Одредити реакције веза хомогене плоче тежине $G = 4\,\mathrm{kN}$ приказане на слици. На плочу дјелује сила P интензитета 7 kN. У тачки C, око правца BC, дјелује момент M интензитета 1 kNm, чији је смјер дејства приказан на слици. Плоча је у тачки A везана за сферни зглоб, а у тачкама D и V за лаке круте штапове.







Силе

$$\vec{P} = P\vec{j} = 7\vec{j}$$

$$\vec{G} = -G\vec{k} = -4\vec{k}$$

$$\vec{R}_{\mathrm{A}} = -x_{\mathrm{A}}\vec{i} + y_{\mathrm{A}}\vec{j} + z_{\mathrm{A}}\vec{k}$$

$$\vec{S}_1 = S_1\vec{e}_{\mathrm{KD}} = S_1\frac{\overrightarrow{\mathrm{KD}}}{\mathrm{KD}} = S_1\frac{6\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{36 + 36 + 4}} = \frac{6S_1}{\sqrt{76}}\vec{i} + \frac{6S_1}{\sqrt{76}}\vec{j} + \frac{2S_1}{\sqrt{76}}\vec{k}$$

$$\vec{S}_2 = S_2\vec{e}_{\mathrm{VH}} = S_2\frac{\overrightarrow{\mathrm{VH}}}{\mathrm{VH}} = S_2\frac{3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{9 + 9 + 4}} = \frac{3S_2}{\sqrt{22}}\vec{i} + \frac{3S_2}{\sqrt{22}}\vec{j} - \frac{2S_2}{\sqrt{22}}\vec{k}$$

$$\vec{S}_3 = S_3\vec{e}_{\mathrm{DH}} = S_3\frac{\overrightarrow{\mathrm{DH}}}{\mathrm{DH}} = S_3\frac{-2\vec{k}}{2} = -S_3\vec{k}$$

$$\vec{S}_3 = -S_3\vec{k}$$

Моменти сила

$$\vec{M} = M\vec{i} = \vec{i}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{A}}^{\vec{P}} = \vec{r}_{\mathrm{D}} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 42\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{A}}^{\vec{G}} = \vec{r}_{\mathrm{T}} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 16\vec{j}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{A}}^{\vec{R}_{\mathrm{A}}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{A}}^{\vec{S}_1} = \vec{r}_{\mathrm{D}} \times \vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ \frac{6S_1}{\sqrt{76}} & \frac{6S_1}{\sqrt{76}} & \frac{2S_1}{\sqrt{76}} \end{vmatrix} = -\frac{12S_1}{\sqrt{76}}\vec{j} + \frac{36S_1}{\sqrt{76}}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{A}}^{\vec{S}_2} = \vec{r}_{\mathrm{V}} \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 0 \\ \frac{3S_2}{\sqrt{22}} & \frac{3S_2}{\sqrt{22}} & -\frac{2S_2}{\sqrt{22}} \end{vmatrix} = \frac{6S_2}{\sqrt{22}}\vec{i} + \frac{6S_2}{\sqrt{22}}\vec{j} + \frac{18S_2}{\sqrt{22}}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{A}}^{\vec{S}_3} = \vec{r}_{\mathrm{D}} \times \vec{S}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3 \end{vmatrix} = 6S_3\vec{j}$$

Услови равнотеже

$$\vec{F}_R=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}F_{R_x}=0\Rightarrow -\boxed{x_\mathrm{A}}+\dfrac{6\boxed{S_1}}{\sqrt{76}}+\dfrac{3\boxed{S_2}}{\sqrt{22}}=0\ldots(1)\\ F_{R_y}=0\Rightarrow 7+\boxed{y_\mathrm{A}}+\dfrac{6\boxed{S_1}}{\sqrt{76}}+\dfrac{3\boxed{S_2}}{\sqrt{22}}=0\ldots(2)\\ F_{R_z}=0\Rightarrow -4+\boxed{z_\mathrm{A}}+\dfrac{2\boxed{S_1}}{\sqrt{76}}-\dfrac{2\boxed{S_2}}{\sqrt{22}}-\boxed{S_3}=0\ldots(3)\end{cases}$$

$$\vec{M}_R=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}M_{R_x}=0\Rightarrow 1+8+\dfrac{6\boxed{S_2}}{\sqrt{22}}=0\ldots(4)\\ M_{R_y}=0\Rightarrow 16-\dfrac{12\boxed{S_1}}{\sqrt{76}}+\dfrac{6\boxed{S_2}}{\sqrt{22}}+6\boxed{S_3}=0\ldots(5)\\ M_{R_z}=0\Rightarrow 42+\dfrac{36\boxed{S_1}}{\sqrt{76}}+\dfrac{18\boxed{S_2}}{\sqrt{22}}=0\ldots(6)\end{cases}$$

$$(4)\Rightarrow \boldsymbol{S_2}=-\frac{\mathbf{3\sqrt{22}}}{\mathbf{2}}$$

$$(6)\Rightarrow 42+\frac{36S_1}{\sqrt{76}}-\frac{18}{\sqrt{22}}\frac{3\sqrt{22}}{2}=0\Rightarrow \boldsymbol{S_1}=-\frac{\mathbf{5\sqrt{76}}}{\mathbf{12}}$$

$$(5)\Rightarrow 16+\frac{12}{\sqrt{76}}\frac{5\sqrt{76}}{12}-\frac{6}{\sqrt{22}}\frac{3\sqrt{22}}{2}+6S_3=0\Rightarrow \boldsymbol{S_3}=\mathbf{-2}$$

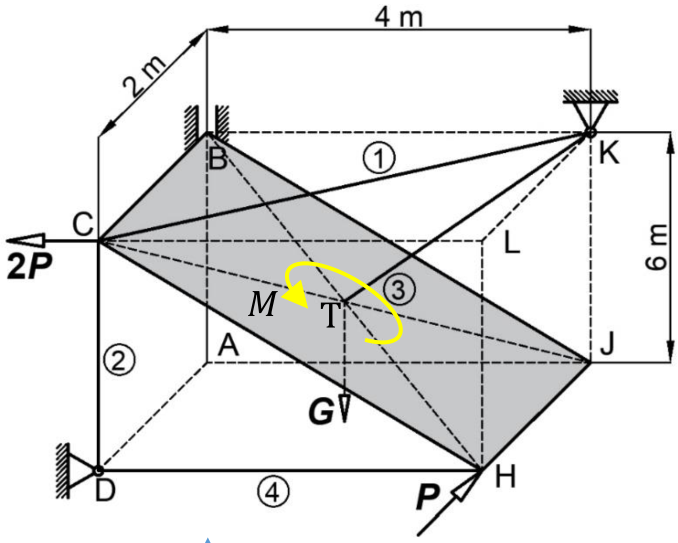
$$(1)\Rightarrow -x_\mathrm{A}-\frac{6}{\sqrt{76}}\frac{5\sqrt{76}}{12}-\frac{3}{\sqrt{22}}\frac{3\sqrt{22}}{2}=0\Rightarrow \boldsymbol{x_\mathrm{A}}=\mathbf{-7}$$

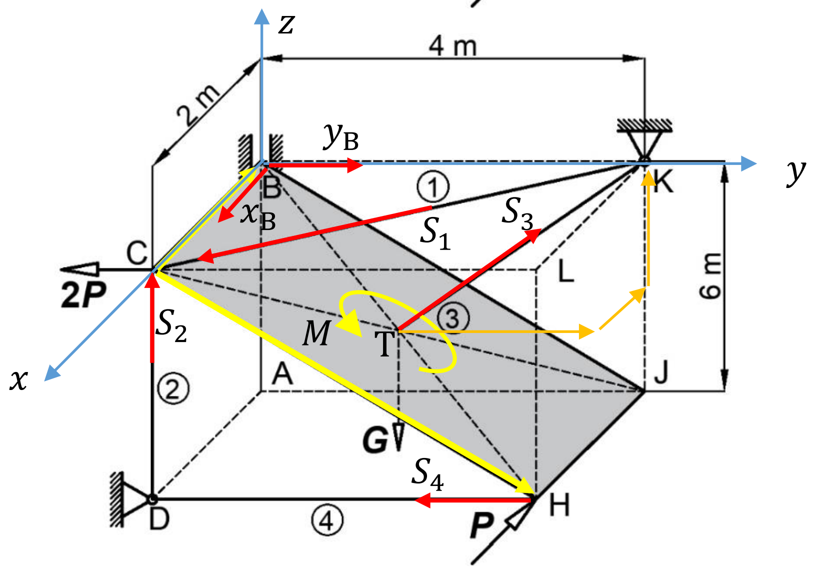
$$(2)\Rightarrow 7+y_\mathrm{A}-\frac{6}{\sqrt{76}}\frac{5\sqrt{76}}{12}-\frac{3}{\sqrt{22}}\frac{3\sqrt{22}}{2}=0\Rightarrow \boldsymbol{y_\mathrm{A}}=\mathbf{0}$$

$$(3)\Rightarrow -4+z_\mathrm{A}-\frac{2}{\sqrt{76}}\frac{5\sqrt{76}}{12}+\frac{2}{\sqrt{22}}\frac{3\sqrt{22}}{2}+2=0\Rightarrow \boldsymbol{z_\mathrm{A}}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 2

Одредити реакције веза хомогене плоче тежине $G = 2\,\mathrm{kN}$ приказане на слици. На плочу дјелује сила P интензитета $3\,\mathrm{kN}$ и сила $2P$. У равни плоче дјелује момент M интензитета $4\,\mathrm{kNm}$, чији је смјер дејства приказан на слици. Плоча је у тачки B везана за цилиндрично лежиште, а у тачкама C, H и T за лаке круте штапове.





Момент дјелује у равни плоче. Ако га посматрамо кроз правило десне руке, онда је момент управан (нормалан) на плочу. Момент у векторском запису добијамо као производ интензитета момента и јединичног вектора нормале.

Како да добијемо јединични вектор који је у правцу нормале на плочу? Добијамо га тако што уземемо било који вектор који је правца нормале на плочу и подијелимо га сопственим интензитетом.

$$\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{CH}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{n} = \frac{12\vec{j} + 8\vec{k}}{\sqrt{144+64}} = \frac{12}{\sqrt{208}}\vec{j} + \frac{8}{\sqrt{208}}\vec{k}$$

$$\vec{M} = M\vec{e}_n = 4\left(\frac{12}{\sqrt{208}}\vec{j} + \frac{8}{\sqrt{208}}\vec{k}\right) = \frac{48}{\sqrt{208}}\vec{j} + \frac{32}{\sqrt{208}}\vec{k}$$

<u>Силе</u>

$$\vec{P} = -P\vec{i} = -3\vec{i}$$

$$2\vec{P} = -2P\vec{j} = -6\vec{j}$$

$$\vec{G} = -G\vec{k} = -2\vec{k}$$

$$\vec{R}_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}}\vec{i} + y_{\mathrm{B}}\vec{j}$$

$$\vec{S}_1 = S_1\vec{e}_{\mathrm{KC}} = S_1\frac{\overrightarrow{\mathrm{KC}}}{\mathrm{KC}} = S_1\frac{2\vec{i} - 4\vec{j}}{\sqrt{4+16}} = \frac{2S_1}{\sqrt{20}}\vec{i} - \frac{4S_1}{\sqrt{20}}\vec{j}$$

$$\vec{S}_2 = S_2\vec{k}$$

$$\vec{S}_3 = S_3\vec{e}_{\mathrm{TK}} = S_3\frac{\overrightarrow{\mathrm{TK}}}{\mathrm{TK}} = S_3\frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{1+4+9}} = -\frac{S_3}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2S_3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3S_3}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{S}_4 = -S_4\vec{j}$$

<u>Моменти</u>

$$\vec{M} = \frac{48}{\sqrt{208}}\vec{j} + \frac{32}{\sqrt{208}}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{\vec{P}} = \vec{r}_{\mathrm{H}} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 18\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{2\vec{P}} = \vec{r}_{\mathrm{C}} \times 2\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{\vec{G}} = \vec{r}_{\mathrm{T}} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{\vec{R}_{\mathrm{B}}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{\vec{S}_1} = \vec{r}_{\mathrm{C}} \times \vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ \frac{2S_1}{\sqrt{20}} & -\frac{4S_1}{\sqrt{20}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{8S_1}{\sqrt{20}}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{\vec{S}_2} = \vec{r}_{\mathrm{C}} \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 \end{vmatrix} = -2S_2\vec{j}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{\vec{S}_3} = \vec{r}_{\mathrm{T}} \times \vec{S}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -\dfrac{S_3}{\sqrt{14}} & \dfrac{2S_3}{\sqrt{14}} & \dfrac{3S_3}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \frac{12S_3}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{4S_3}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{B}}^{\vec{S}_4} = \vec{r}_{\mathrm{H}} \times \vec{S}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & -S_4 & 0 \end{vmatrix} = -6S_4\vec{i} - 2S_4\vec{k}$$

<u>Услови равнотеже</u>

$$\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_{R_x} = 0 \Rightarrow -3 + \boxed{x_{\mathrm{B}}} + \dfrac{2\boxed{S_1}}{\sqrt{20}} - \dfrac{\boxed{S_3}}{\sqrt{14}} = 0 \ldots (1) \\ F_{R_y} = 0 \Rightarrow -6 + \boxed{y_{\mathrm{B}}} - \dfrac{4\boxed{S_1}}{\sqrt{20}} + \dfrac{2\boxed{S_3}}{\sqrt{14}} - \boxed{S_4} = 0 \ldots (2) \\ F_{R_z} = 0 \Rightarrow -2 + \boxed{S_2} + \dfrac{3\boxed{S_3}}{\sqrt{14}} = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

$$\vec{M}_R = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_{R_x} = 0 \Rightarrow -4 + \dfrac{12\boxed{S_3}}{\sqrt{14}} - 6\boxed{S_4} = 0 \ldots (4) \\ M_{R_y} = 0 \Rightarrow \dfrac{48}{\sqrt{208}} + 18 + 2 - 2\boxed{S_2} = 0 \ldots (5) \\ M_{R_z} = 0 \Rightarrow \dfrac{32}{\sqrt{208}} + 12 - 12 - \dfrac{8\boxed{S_1}}{\sqrt{20}} + \dfrac{4\boxed{S_3}}{\sqrt{14}} - 2\boxed{S_4} = 0 \ldots (6) \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow \boldsymbol{S_2} = \frac{24}{\sqrt{208}} + 10 = \mathbf{11{,}66}$$

$$(3) \Rightarrow -2 + 11{,}66 + \frac{3S_3}{\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S_3} = -\mathbf{12{,}05}$$

$$(4) \Rightarrow -4 - \frac{12}{\sqrt{14}} \cdot 12{,}05 - 6S_4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S_4} = -\mathbf{7{,}11}$$

$$(6) \Rightarrow \frac{32}{\sqrt{208}} - \frac{8S_1}{\sqrt{20}} - \frac{4}{\sqrt{14}}12{,}05 + 2 \cdot 7{,}11 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S_1} = \mathbf{1{,}99}$$

$$(1) \Rightarrow -3 + x_{\mathrm{B}} + \frac{2}{\sqrt{20}}1{,}99 + \frac{12{,}05}{\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_{\mathrm{B}}} = -\mathbf{1{,}11}$$

$$(2) \Rightarrow -6 + y_{\mathrm{B}} - \frac{4}{\sqrt{20}}1{,}99 - \frac{2}{\sqrt{14}}12{,}05 + 7{,}11 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y_{\mathrm{B}}} = \mathbf{7{,}11}$$