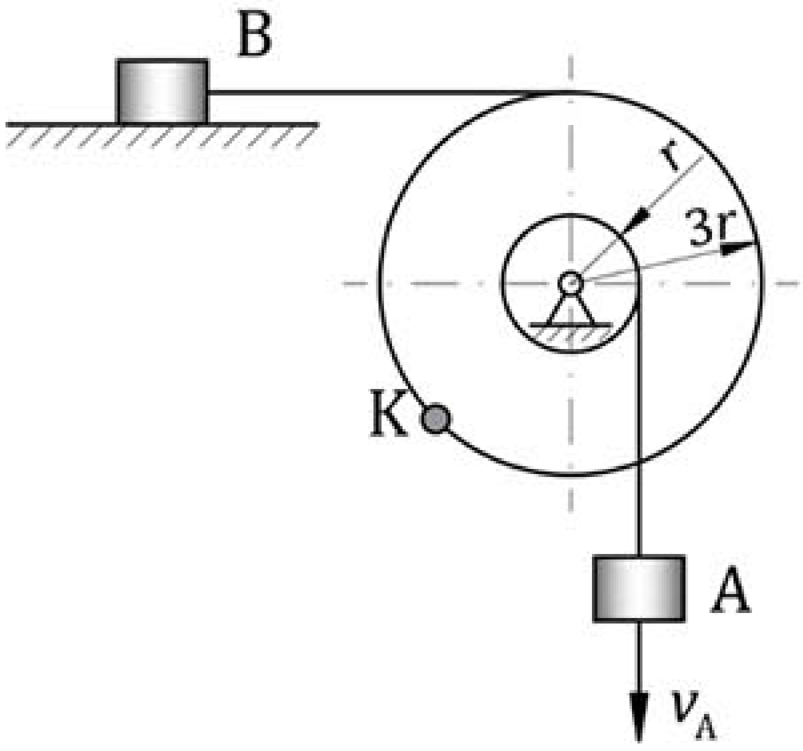
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕХНИЧКЕ МЕХАНИКЕ II

1. Положај тачке мијења се према закону $\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin^2 t\,\vec{j}$.

- Одредити линију путање и путању тачке.
- На путањи назначити вектор положаја тачке у тренутку $t_\pi = \pi$ s.
- Одредити убрзање тачке у тренутку $t_\pi = \pi$ s.
- Одредити угао између брзине и убрзања тачке у тренутку $t_{\pi/3} = \pi/3$ s.

2. Брзина тијела A мијења се према закону $v_A = 4t + 2$. Ако је $r = 0{,}5$ m, одредити:

- почетну брзину тијела B;
- коначну једначину кретања тијела B;
- убрзање тачке K у тренутку $t_2 = 2$ s;
- временски тренутак у коме је диск описао два пуна круга.



Први колоквијум

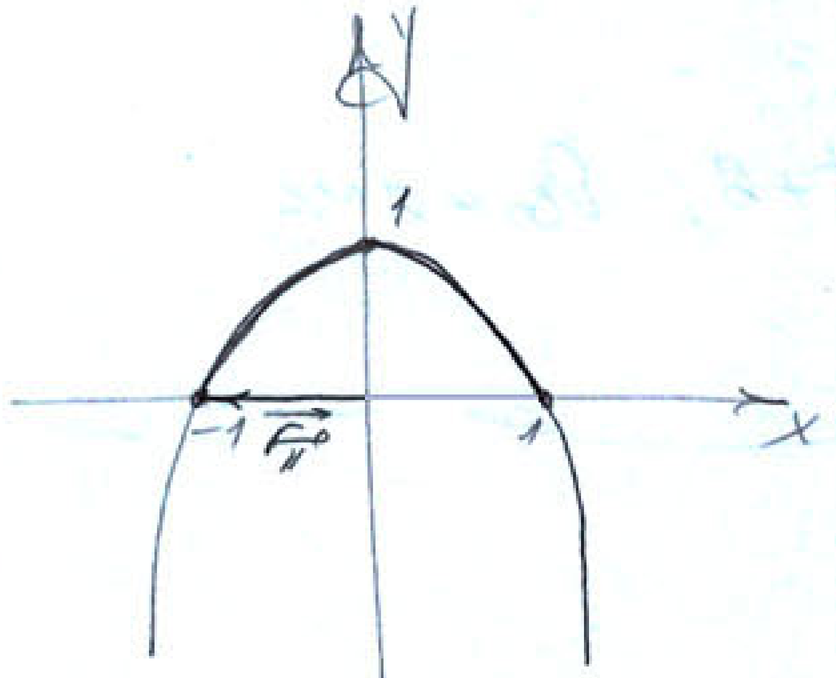
(1) $\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin^2 t\,\vec{j}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin^2 t \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x^2 &= \cos^2 t \\ y &= \sin^2 t \end{aligned}\right\} \quad x^2 + y = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = 1 - x^2}}$$

$t \in [0, +\infty)$

$x \in [-1, 1]$

$y \in [0, 1]$



$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\sin t \\ \dot{y} &= 2\sin t\cos t \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\cos t \\ \ddot{y} &= -2\sin t\sin t + 2\cos t\cos t \\ &= -2\sin^2 t + 2\cos^2 t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \ddot{x}_\pi &= +1 \\ \ddot{y}_\pi &= 2 \end{aligned}$$

$$\underline{a_\pi} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = \underline{\underline{2{,}24\ m/s^2}}$$

$$\vec{r}_\pi = \cos\pi\,\vec{i} + \sin^2\pi\,\vec{j} = -\vec{i} + 0\vec{j}$$

$\alpha = \angle(\vec{v}_{\pi/3}, \vec{a}_{\pi/3})$

$$\vec{v}_{\pi/3} = -\sin\frac{\pi}{3}\vec{i} + 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\vec{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$v_{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}$$

$$\vec{a}_{\pi/3} = -\cos\frac{\pi}{3}\vec{i} + \left(-2\sin^2\frac{\pi}{3} + 2\cos^2\frac{\pi}{3}\right)\vec{j}$$

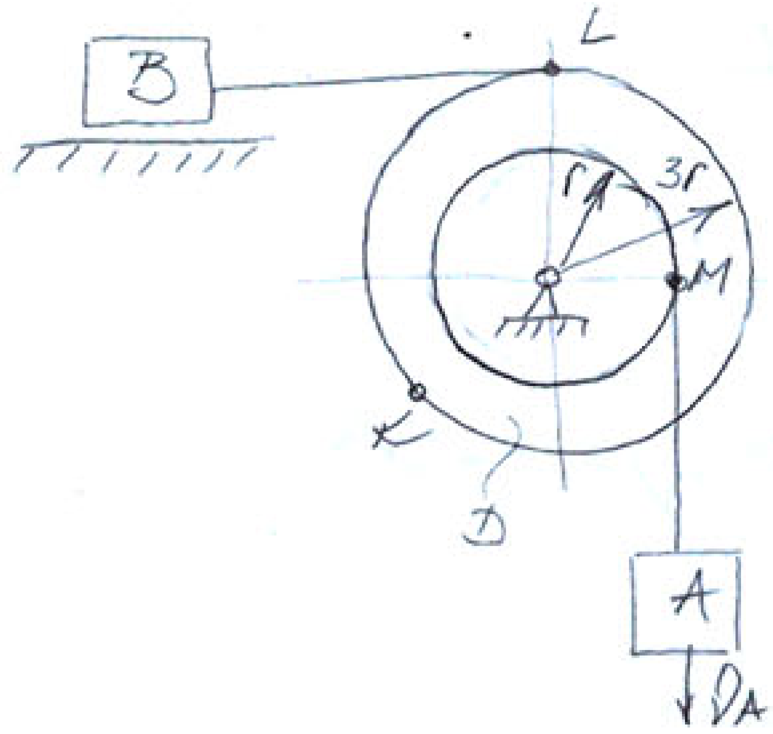
$$= -\frac{1}{2}\vec{i} + \left(-2\cdot\frac{3}{4} + 2\,\frac{1}{4}\right)\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}$$

$$a_{\pi/3} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_{\pi/3}\cdot\vec{a}_{\pi/3}}{v_{\pi/3}\,a_{\pi/3}} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}\right)}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{30}}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{30}}{4}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -0{,}316 \Rightarrow \alpha = 108{,}43^\circ$$

②



$v_A = 4t+2$

$$\left.\begin{aligned} v_M &= v_A \\ v_M &= r\omega_D \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_D = \frac{v_A}{r} = \frac{4t+2}{0,5}$$

$\omega_D = 8t+4$

$v_B = v_L = 3r\cdot\omega_D = 3r\cdot(8t+4) = 1,5(8t+4) = 12t+6;\quad v_{B0} = 6$ м/с

$\underline{\underline{S_B}} = \int_0^t (12t+6)\,dt = \underline{\underline{6t^2+6t}}$

$\varepsilon_D = \dot{\omega}_D = 8$

$$\left.\begin{aligned} a_{K\tau} &= 3r\cdot\varepsilon_D = 1,5\cdot 8 = 12 \text{ м/с}^2 \\ a_{Kn_2} &= 3r\cdot\omega_{D_2}^2 = 1,5\cdot(8\cdot 2+4)^2 = 600 \text{ м/с}^2 \end{aligned}\right\} a_{K_2} = \sqrt{12^2+600^2} = 600,12 \text{ м/с}^2$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_D &= \int_0^t (8t+4)\,dt = 4t^2+4t \\ N_D^* &= 2 \Rightarrow \varphi_D^* = 2\cdot 2\pi = 4\pi \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &4t^{*2}+4t^*-4\pi = 0 \\ &t^{*2}+t^*-\pi = 0 \end{aligned}$$

$$t^*_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi}}{2} = \begin{cases} \cancel{\dfrac{-1-\sqrt{1+4\pi}}{2}} \\ \dfrac{-1+\sqrt{1+4\pi}}{2} = 1,34 \text{ с} \end{cases}$$
