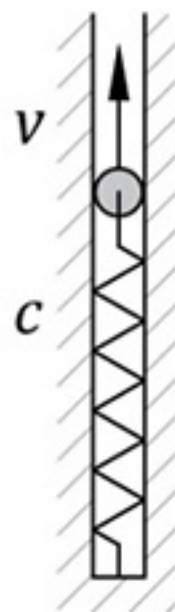


ЗАВРШНИ ИСПИТ ИЗ ТЕХНИЧКЕ МЕХАНИКЕ II

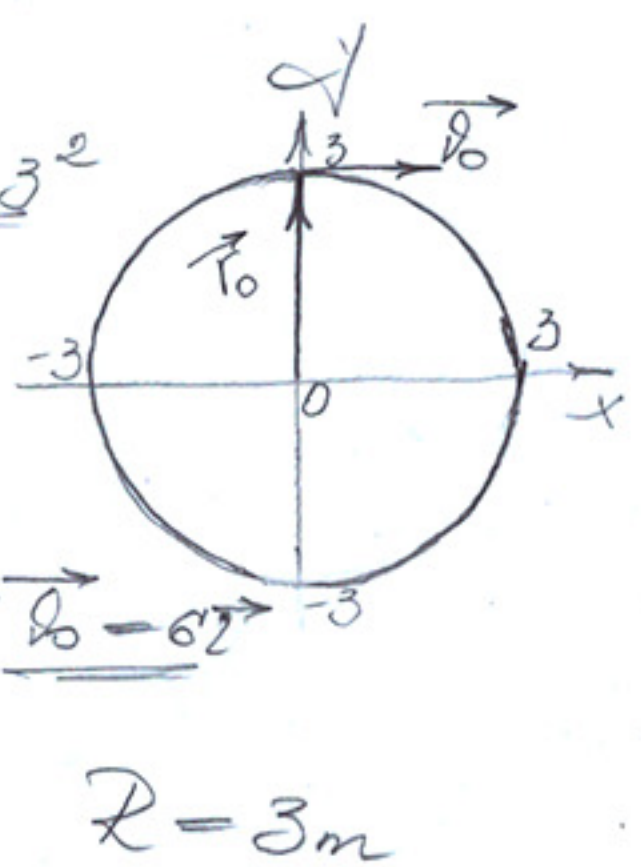
1. Коначна једначина кретања тачке је $\vec{r} = 3 \sin(2t) \vec{i} + 3 \cos(2t) \vec{j}$. Одредити:
 - линију путање и путању тачке;
 - векторе почетне брзине и почетног положаја (назначити их на слици);
 - пут који тачка пређе у току треће секунде и угао који опише за тај период;
 - угаоно убрзање тачке.

2. Куглица масе 0,5 kg избацује се навише из вертикалне глатке цијеви, дејством силе у опрузи крутости $c = 100 \text{ N/m}$ која је у почетном положају била сабијена за 20 cm, непознатом почетном брзином. На излазу из цијеви куглица има брзину од 2,019 m/s и у том положају је опруга недеформисана.
 - Користећи се основном једначином динамике одредити брзину куглице на почетку кретања.
 - Претходни резултат провјерити примјеном закона о промјени кинетичке енергије тачке.
 - Колико пута треба повећати крутост опруге да би куглица масе 2 kg на излазу из цијеви имала исту брзину?
 - Одредити максималну висину пењања у односу на почетни положај.



① $\vec{r} = 3 \sin(2t) \vec{i} + 3 \cos(2t) \vec{j}$

$x = 3 \sin(2t) \Rightarrow x^2 = 3^2 \sin^2(2t)$
 $y = 3 \cos(2t) \Rightarrow y^2 = 3^2 \cos^2(2t)$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$
 $t \in [0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3, 3] \\ y \in [-3, 3] \end{cases}$



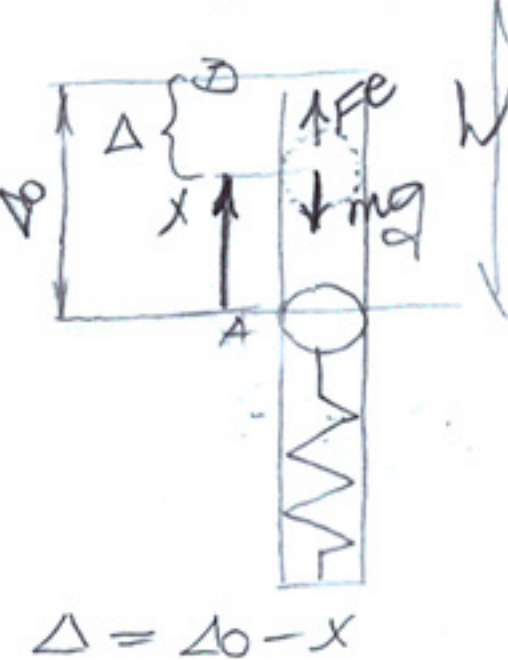
$v_x = \dot{x} = 3 \cos(2t) \cdot 2 = 6 \cos(2t) \Rightarrow v_{x0} = 6 \cdot 1 = 6$
 $v_y = \dot{y} = -3 \sin(2t) \cdot 2 = -6 \sin(2t) \Rightarrow v_{y0} = -6 \cdot 0 = 0$
 $\Rightarrow \vec{v}_0 = 3 \cdot 0 \vec{i} + 3 \cdot 1 \vec{j} = 3 \vec{j}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36 \cos^2(2t) + 36 \sin^2(2t)} = 6 \text{ m/s}$

$s_{2-3} = \int_2^3 v dt = \int_2^3 6 dt = 6t \Big|_2^3 = 18 - 12 = 6 \text{ m} \Rightarrow \underline{\underline{t_{2-3} = \frac{s_{2-3}}{v} = \frac{6}{6} = 1 \text{ rad}}}$

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(6)}{dt} = 0 \Rightarrow 3E = 0 \Rightarrow \underline{\underline{E=0}}$
 $a_t = R \cdot E = 3E$

② $m = 0,5 \text{ kg}$ $c = 100 \text{ N/m}$ $\Delta_0 = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ $v_B = 2,019 \text{ m/s}$ $\Delta_B = 0$



$m \vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m a = F^c - m g = c \cdot \Delta - m g$

$m a = c(\Delta_0 - x) - m g \quad | : m$

$a = \frac{c}{m} (\Delta_0 - x) - g$
 $a = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{v dv}{dx} \int_{v_0}^v \Rightarrow \int v dv = \int (\frac{c}{m} (\Delta_0 - x) - g) dx$

$\frac{2,019^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{c}{m} (\Delta_0 x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^{\Delta_0} - g x \Big|_0^{\Delta_0}$

$\frac{2,019^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{100}{0,5} (0,2 \cdot 0,2 - \frac{0,2^2}{2}) - 9,81 \cdot 0,2 \Rightarrow \underline{\underline{v_0 = 0}}$

$E_{KB} - E_{KA} = A^m + A^c \Rightarrow \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = -m g \Delta_0 + \frac{1}{2} c (\Delta_0^2 - \Delta_A^2)$

$\frac{m v_A^2}{2} = \frac{m v_B^2}{2} + m g \Delta_0 - \frac{1}{2} c \Delta_0^2 \Rightarrow v_A^2 = \frac{2}{m} (\frac{m v_B^2}{2} + m g \Delta_0 - \frac{1}{2} c \Delta_0^2)$

$\underline{\underline{v_A = \frac{2}{\sqrt{0,5}} (\frac{0,5 \cdot 2,019^2}{2} + 0,5 \cdot 9,81 \cdot 0,2 - \frac{1}{2} 100 \cdot 0,2^2) = 0 = v_0}}$

$\frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = -m g \Delta_0 + \frac{1}{2} c \Delta_0^2 \Rightarrow c^* = \frac{2}{\Delta_0^2} (\frac{m v_B^2}{2} + m g \Delta_0)$

$c^* = \frac{2}{0,2^2} (\frac{2 \cdot 2,019^2}{2} + 2 \cdot 9,81 \cdot 0,2) = 400 \text{ N/m} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{c^*}{c} = \frac{400}{100} = 4}}$

$E^c - E_B = -m g (h - \Delta_0) \Rightarrow \frac{m v_B^2}{2} = +m g (h - \Delta_0) \Rightarrow h = \frac{v_B^2}{2g} + \Delta_0$

$\underline{\underline{h = \frac{2,019^2}{2 \cdot 9,81} + 0,2 = 0,4078 \text{ m}}}$