Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 30.5.2022.

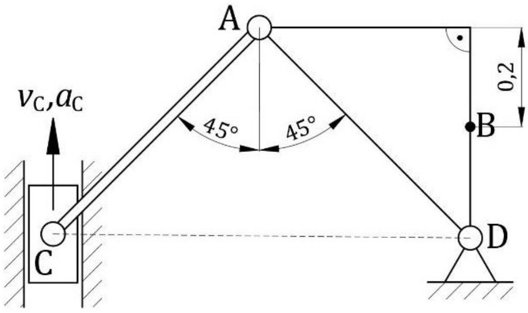
ПОПРАВНИ ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ ТЕХНИЧКЕ МЕХАНИКЕ II

1. Брзина материјалне тачке се мијења према закону $\vec{v} = (3 - 4t^2)\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath}$. Кретање је започела из положаја $\vec{r}_0 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. Одредити:

- интензитет убрзања тачке на почетку кретања;
- временски тренутак у коме ће угао између брзине и убрзања износити 90°;
- произвољни положај тачке;
- полупречник закривљености путање у тренутку $t_2 = 2$ s.

2. У положају механизма приказаном на слици клизач C има брзину од 1 m/s и убрзање од 2 m/s^2. Ако је $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2}$ m, за приказани положај механизма одредити:

- брзину зглоба A;
- брзину тачке B;
- пол брзина троугла;
- убрзање зглоба A.



ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{v} = (3 - 4t^2)\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath}, \qquad \vec{r}_0 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

<u>интензитет убрзања тачке на почетку кретања</u>

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3 - 4t^2) = -8t \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}t^3 = 3t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{64t^2 + 9t^4}$$

$$a_0 = \sqrt{64t_0^2 + 9t_0^4} = \sqrt{64 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0^4} = 0$$

<u>временски тренутак у коме ће угао између брзине и убрзања износити 90°</u>

$$\vec{v}^* \cdot \vec{a}^* = v^* \cdot a^* \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{v}^* \cdot \vec{a}^* = 0 \\ &\vec{v}^* \cdot \vec{a}^* = \left[\left(3 - 4t^{*2}\right)\vec{\imath} + t^{*3}\vec{\jmath}\right] \cdot \left[-8t^*\vec{\imath} + 3t^{*2}\vec{\jmath}\right] = \left(4t^{*2} - 3\right)8t^* + 3t^{*5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(4t^{*2} - 3\right)8t^* + 3t^{*5} = 0$$

Под условом да је $t^* \neq 0$, претходни израз можемо да подијелимо са t^*:

$$\left(4t^{*2} - 3\right)8 + 3t^{*4} = 0$$

$$3t^{*4} + 32t^{*2} - 24 = 0$$

$$t^{*2} = k$$

$$3k^2 + 32k - 24 = 0$$

$$k_{1/2} = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 288}}{6} = \frac{-32 \pm 36{,}22}{6} = \begin{cases} 0{,}7036 \\ \end{cases}$$

$$t^* = \sqrt{k} = \sqrt{0{,}7036} = 0{,}839 \text{ s}$$

<u>произвољни положај тачке</u>

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 3 - 4t^2 \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{x} dx = \int_{0}^{t} (3 - 4t^2)dt \Rightarrow x = -1 + 3t - \frac{4t^3}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= t^3 \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{2}^{y} dy = \int_{0}^{t} t^3 dt \Rightarrow y = 2 + \frac{t^4}{4}$$

$$\vec{r} = \left(-1 + 3t - \frac{4t^3}{3}\right)\vec{\imath} + \left(2 + \frac{t^4}{4}\right)\vec{\jmath}$$

<u>полупречник закривљености путање у тренутку $t_2 = 2$ s</u>

$$\vec{v} = (3 - 4t^2)\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath} \Rightarrow v = \sqrt{(3 - 4t^2)^2 + (t^3)^2} = \sqrt{9 - 24t^2 + 16t^4 + t^6}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-48t + 64t^3 + 6t^5}{2\sqrt{9 - 24t^2 + 16t^4 + t^6}}$$

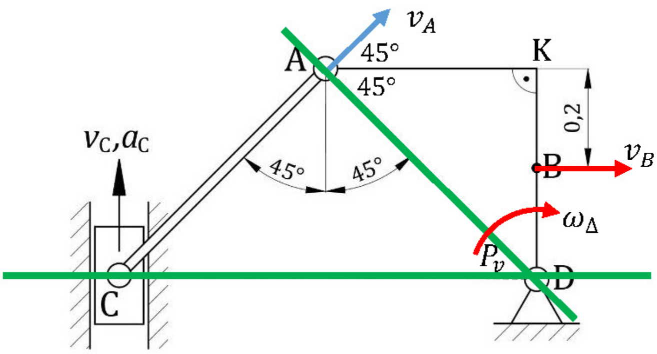
$$a_{t_2} = \frac{-96 + 512 + 192}{2\sqrt{9 - 96 + 256 + 64}} = 19{,}916$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \sqrt{64 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^4} = 20 \\ a_2 &= \sqrt{a_{t_2}^2 + a_{n_2}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{a_{t_2}^2 + a_{n_2}^2} = 20 \Rightarrow a_{n_2}^2 = 20^2 - 19{,}916^2 \Rightarrow a_{n_2} = 1{,}834$$

$$\left.\begin{aligned} a_{n_2} &= 1{,}834 \\ a_{n_2} &= \frac{v_2^2}{R_{k_2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{v_2^2}{R_{k_2}} = 1{,}834 \Rightarrow R_{k_2} = \frac{v_2^2}{1{,}834} = \frac{9 - 24 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^4 + 2^6}{1{,}834} = 127{,}021$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$v_C = 1\ \mathrm{m/s}\,, \qquad a_C = 2\ \mathrm{m/s^2}\,, \qquad \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2}\ \mathrm{m}$$



брзина зглоба А

Зглоб А ротира око непомичног ослонца D, па је његова брзина управна на линију која их спаја. Полуга АС врши равно кретање. Брзине је најједноставније наћи преко пола брзина. Пола брзина налазимо у пресјеку нормала на брзине двије тачке које припадају ИСТОМ тијелу. У конкретном случају, тачке С и А. Тренутни пол брзина штапа АС се поклапа са тачком D.

$$\overline{CP_v}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AP_v}^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \overline{CP_v} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} v_C &= \overline{CP_v}\omega_{AC} \\ v_A &= \overline{AP_v}\omega_{AC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot \omega_{AC} \\ v_A &= \sqrt{2}\omega_{AC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega_{AC} &= 1/2 \\ v_A &= \sqrt{2}/2 = 0{,}707 \end{aligned}\right\}$$

брзина тачке B

$$\overline{AK} = \overline{KD} = \overline{AD}\sin 45^\circ = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

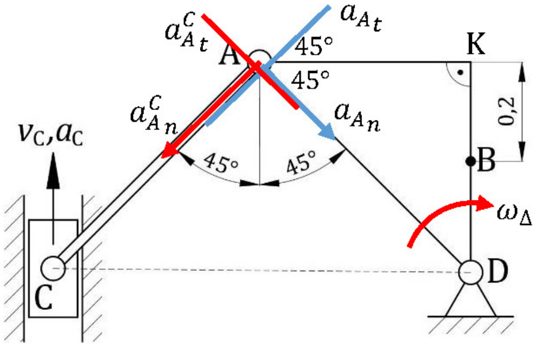
$$\overline{BD} = \overline{KD} - 0{,}2 = 0{,}8 = \frac{4}{5}$$

$$\left.\begin{aligned} v_A &= \overline{AD}\omega_\Delta \\ v_B &= \overline{BD}\omega_\Delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sqrt{2}/2 &= \sqrt{2}\omega_\Delta \\ v_B &= 4/5\ \omega_\Delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega_\Delta &= 1/2 \\ v_B &= 4/5 \cdot 1/2 = 2/5 = 0{,}4 \end{aligned}\right\}$$

пол брзина троугла

Троугао врши кружно кретање. Такво кретање је специјални случај равног кретања. Пол брзина је тачка чија је брзина једнака нули. У конкретном случају, непомични ослонац је тачка чија је брзина све вријеме током кретања једнака нули. Према томе, тачка D је пол брзина троугла.

убрзање зглоба А



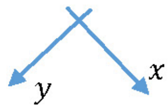
$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{A_t}^C + \vec{a}_{A_n}^C$$

$$\underline{\vec{a}_{A_t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{A_n}}} = \underline{\underline{\vec{a}_C}} + \underline{\vec{a}^C_{A_t}} + \underline{\underline{\vec{a}^C_{A_n}}}$$

$$a_{A_n} = \overline{AD}\,\omega_\Delta^2 = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$a^C_{A_n} = \overline{AC}\,\omega_{AC}^2 = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\underline{\vec{a}_{A_t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{A_n}}} = \underline{\underline{\vec{a}_C}} + \underline{\vec{a}^C_{A_t}} + \underline{\underline{\vec{a}^C_{A_n}}}$$



$$x\colon a_{A_n} = -a_C\frac{\sqrt{2}}{2} + a^C_{A_t}$$

$$y\colon a_{A_t} = -a_C\frac{\sqrt{2}}{2} + a^C_{A_n} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$a_A = \sqrt{a_{A_n}^2 + a_{A_t}^2} = \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{18}{16}} = \sqrt{\frac{20}{16}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{1{,}25} = 1{,}118$$