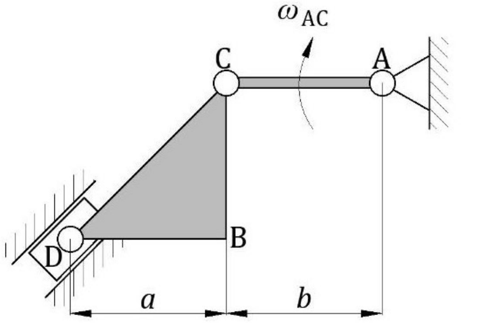
Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 27.6.2023.

ПОПРАВНИ ЗАВРШНОГ ИСПИТА ИЗ ТЕХНИЧКЕ МЕХАНИКЕ II

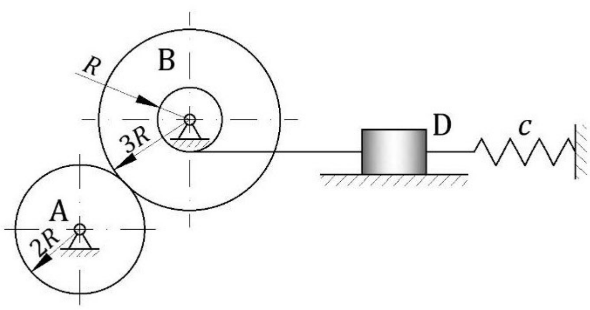
1. У положају механизма приказаном на слици угаона брзина штапа AC дужине 3 m износи $2\ \mathrm{s}^{-1}$, а угаоно убрзање $1\ \mathrm{s}^{-2}$. Катета једнакокраког правоуглог троугла износи 8 m. За приказани положај одредити:

- угаону брзину троугла;
- брзину тачке B;
- убрзање клизача D;
- положај тачке на штапу AC чија је брзина по бројној вриједности пет пута мања од убрзања зглоба C.



2. Систем приказан на слици доводи се у кретање из равнотежног положаја тако што се тијелу D, које може да се клиза по глаткој хоризонталној подлози, саопшти почетна брзина од 2 m/s удесно. Између дискова A и B нема проклизавања. Сва три тијела имају масу од по 2 kg, дужина R износи 10 cm, крутост c 50 N/m, $i_B = 3R$, а дужина ужета на дијелу између тијела D и диска B 6,36 m.

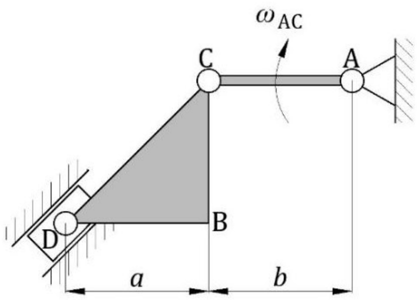
- Користећи се диференцијалним једначинама кретања одредити пут који тијело D пређе до заустављања.
- Резултат провјерити помоћу закона о промјени кинетичке енергије система.
- За случај да тијело D није везано ужетом за остатак система, како изгледа коначна једначина његовог кретања?
- За претходни случај одредити брзину тијела D након три секунде од почетка кретања.



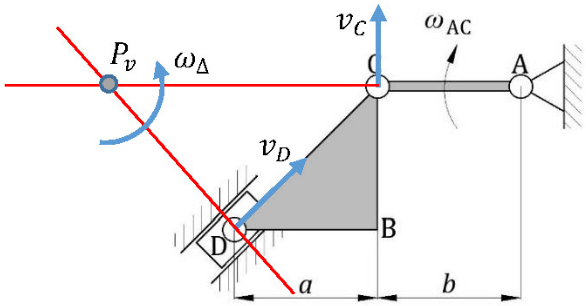
ПРВИ ЗАДАТАК

У положају механизма приказаном на слици угаона брзина штапа AC дужине 3 m износи 2 s^{-1}, а угаоно убрзање 1 s^{-2}. Катета једнакокраког правоуглог троугла износи 8 m. За приказани положај одредити:

- угаону брзину троугла;
- брзину тачке B;
- убрзање клизача D;
- положај тачке на штапу AC чија је брзина по бројној вриједности пет пута мања од убрзања зглоба C.



Угаона брзина троугла

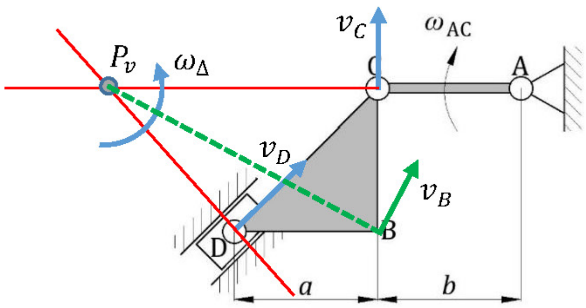


$$\overline{CP_v} = 2a = 16\ \mathrm{m}$$

$$\left.\begin{aligned} v_C &= \overline{AC}\omega_{AC} \\ v_C &= \overline{CP_v}\omega_\Delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{AC}\omega_{AC} = \overline{CP_v}\omega_\Delta \Rightarrow \omega_\Delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP_v}}\omega_{AC}$$

$$\boldsymbol{\omega_\Delta} = \frac{3}{16}2 = \frac{3}{8} = \mathbf{0{,}375\ s^{-1}}$$

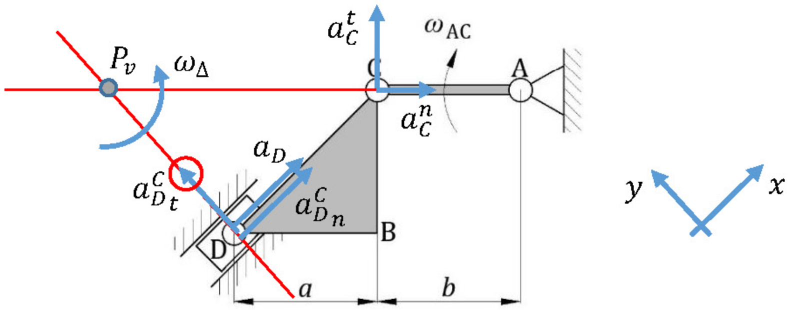
Брзина тачке B



$$\overline{BP_v} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CP_v}^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{1+4} = 8\sqrt{5}\ \mathrm{m}$$

$$v_B = \overline{BP_v}\omega_\Delta = 8\sqrt{5}\cdot 0{,}375 = \mathbf{3\sqrt{5} = 6{,}71\ m/s}$$

Убрзање клизача D



$$\overline{DC} = a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

$$a_{C_t} = \overline{AC}\varepsilon_{AC} = 3 \cdot 1 = 3\ \mathrm{m/s^2}, \qquad a_{C_n} = \overline{AC}\omega_{AC}^2 = 3 \cdot 2^2 = 12\ \mathrm{m/s^2}$$

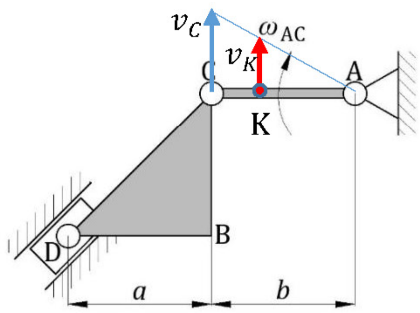
$$a_{D_n}^C = \overline{CD}\omega_\Delta^2 = 8\sqrt{2} \cdot 0{,}375^2 = 1{,}125\sqrt{2}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{D_t}^C + \vec{a}_{D_n}^C = \vec{a}_{C_t} + \vec{a}_{C_n} + \vec{a}_{D_t}^C + \vec{a}_{D_n}^C$$

$$x: a_D = a_{C_t}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{C_n}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{D_n}^C$$

$$\boldsymbol{a_D} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 12\frac{\sqrt{2}}{2} + 1{,}125\sqrt{2} = \mathbf{8{,}625\sqrt{2} = 12{,}2\ \ m/s^2}$$

Положај тачке на штапу АС чија је брзина по бројној вриједности пет пута мања од убрзања зглоба C



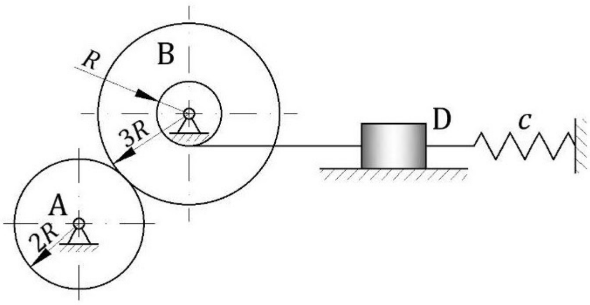
$$\left.\begin{aligned} a_{C_t} &= 3 \\ a_{C_n} &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_C = \sqrt{9 + 144} = \sqrt{153}$$

$$\left.\begin{aligned} v_K &= \overline{AK}\omega_{AC} \\ v_K &= \frac{\sqrt{153}}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{AK}\omega_{AC} = \frac{\sqrt{153}}{5} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{AK}} = \frac{\sqrt{153}}{5\omega_{AC}} = \frac{\sqrt{153}}{10} = \mathbf{1{,}237\ m}$$

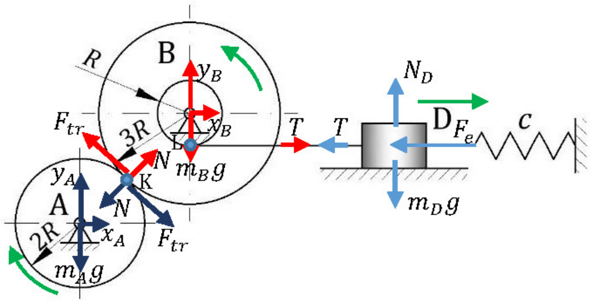
ДРУГИ ЗАДАТАК

Систем приказан на слици доводи се у кретање из равнотежног положаја тако што се тијелу D, које може да се клиза по глаткој хоризонталној подлози, саопшти почетна брзина од 2 m/s удесно. Између дискова A и B нема проклизавања. Сва три тијела имају масу од по 2 kg, дужина R износи 10 cm, крутост c 50 N/m, $i_B = 3R$, а дужина ужета на дијелу између тијела D и диска B 6,36 m.

- Користећи се диференцијалним једначинама кретања одредити пут који тијело D пређе до заустављања.
- Резултат провјерити помоћу закона о промјени кинетичке енергије система.
- За случај да тијело D није везано ужетом за остатак система, како изгледа коначна једначина његовог кретања?
- За претходни случај одредити брзину тијела D након три секунде од почетка кретања.



<u>Пут који тијело D пређе до заустављања (диференцијалне једначине кретања)</u>



$$F_e = c\Delta = cx$$

$$\left.\begin{aligned} v_L &= v_D \\ v_L &= R\omega_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_B = \frac{v_D}{R} \Rightarrow \varepsilon_B = \frac{a_D}{R}, \qquad \left.\begin{aligned} v_K &= 3R\omega_B \\ v_K &= 2R\omega_A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_A = \frac{3}{2}\omega_B = \frac{3}{2}\frac{v_D}{R} \Rightarrow \varepsilon_A = \frac{3}{2}\frac{a_D}{R}$$

$$m_D = m_B = m_A = m = 2\ \mathrm{kg}$$

$$\left.\begin{aligned} m_D a_D &= -T - F_e \\ I_B\varepsilon_B &= T\cdot R - F_{tr}\cdot 3R \\ I_A\varepsilon_A &= F_{tr}\cdot 2R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} m_D a_D &= -T - cx \\ m_B i_B^2 \frac{a_D}{R} &= T\cdot R - F_{tr}\cdot 3R \\ \frac{m_A(2R)^2}{2}\frac{3}{2}\frac{a_D}{R} &= F_{tr}\cdot 2R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} ma_D &= -T - cx \\ m9R^2\frac{a_D}{R} &= T\cdot R - F_{tr}\cdot 3R \\ \frac{m4R^2}{2}\frac{3}{2}\frac{a_D}{R} &= F_{tr}\cdot 2R \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} ma_D &= -T - cx \\ 9ma_D &= T - 3F_{tr} \\ 3ma_D &= 2F_{tr} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 10ma_D &= -cx - 3F_{tr} \\ 3ma_D &= 2F_{tr} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{10}{3}ma_D &= -\frac{cx}{3} - F_{tr} \\ \frac{3}{2}ma_D &= F_{tr} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{10}{3} + \frac{3}{2}\right)ma_D = -\frac{cx}{3} \Rightarrow 29a_D = -cx \Rightarrow a_D = -\frac{50}{29}x$$

$$\left.\begin{aligned} a_D &= -\frac{50}{29}x \\ a_D &= \frac{dv_D}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{dx}}{dx} = \frac{v_D dv_D}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_D dv_D = -\frac{50}{29}x dx \Rightarrow \int_2^{v_D^*=0} v_D dv_D = -\frac{50}{29}\int_0^{x^*} x dx$$

$$-\frac{2^2}{2} = -\frac{50}{29}\frac{x^{*2}}{2} \Rightarrow -2 = -\frac{25}{29}x^{*2} \Rightarrow \boldsymbol{x^*} = \sqrt{\frac{58}{25}} = \mathbf{1,523\ m}$$

<u>Пут који тијело D пређе до заустављања (закон о промјени кинетичке енергије система)</u>

$$E_k = E_{k_D} + E_{k_A} + E_{k_B} = \frac{m_D v_D^2}{2} + \frac{I_B \omega_B^2}{2} + \frac{I_A \omega_A^2}{2} = \frac{m v_D^2}{2} + \frac{m 9R^2 \frac{v_D^2}{R^2}}{2} + \frac{\frac{m4R^2}{2}\frac{9}{4}\frac{v_D^2}{R^2}}{2}$$

$$E_k = m v_D^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{29}{4} m v_D^2$$

$$E_{k_1} - E_{k_0} = A_{01}^{F_e}$$

$$\frac{29}{4} m v_{D_1}^2 - \frac{29}{4} m v_{D_0}^2 = \frac{1}{2} c\left(\Delta_0^2 - \Delta_1^2\right)$$

$$-\frac{29}{4} m v_{D_0}^2 = \frac{1}{2} c\left(-x^{*2}\right)$$

$$-\frac{29}{2} 2 v_{D_0}^2 = 50\left(-x^{*2}\right)$$

$$\boldsymbol{x^*} = \sqrt{\frac{29}{50}} v_{D_0} = \sqrt{\frac{29}{50}} 2 = \mathbf{1,523\ m}$$

<u>Коначна једначина осциловања тијела D</u>

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5 \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} = 0,4 \\ \sin\alpha &= \frac{x_0}{A} = \frac{0}{0,4} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,4\sin 5t}$$

<u>Брзина тијела D након три секунде од почетка кретања</u>

$$v_D = \frac{dx}{dt} = 0,4\cos(5t)\cdot 5 = 2\cos(5t)$$

$$\boldsymbol{v_{D_3}} = 2\cos(15) = \mathbf{-1,519\ m/s}$$