Tehnička mehanika II

Literatura:

1. Đ. S. Đukić, T. M. Atanacković, Mehanika, Novi Sad, 1993.
2. Pisana predavanja
3. D. Kuzmanović i dr., Zbirka zadataka iz Mehanike, Beograd, 2012.

1. Kinematika tačke

Pod tačkom se u kinematici podrazumijeva geometrijska tačka čiji se položaj u prostoru mijenja tokom vremena.

Osnovni zadaci kinematike tačke:

a) Utvrđivanje postupaka za definisanje kretanja tačke, tj za određivanje položaja tačke u odnosu na dati sistem referencije u bilo kom trenutku vremena.

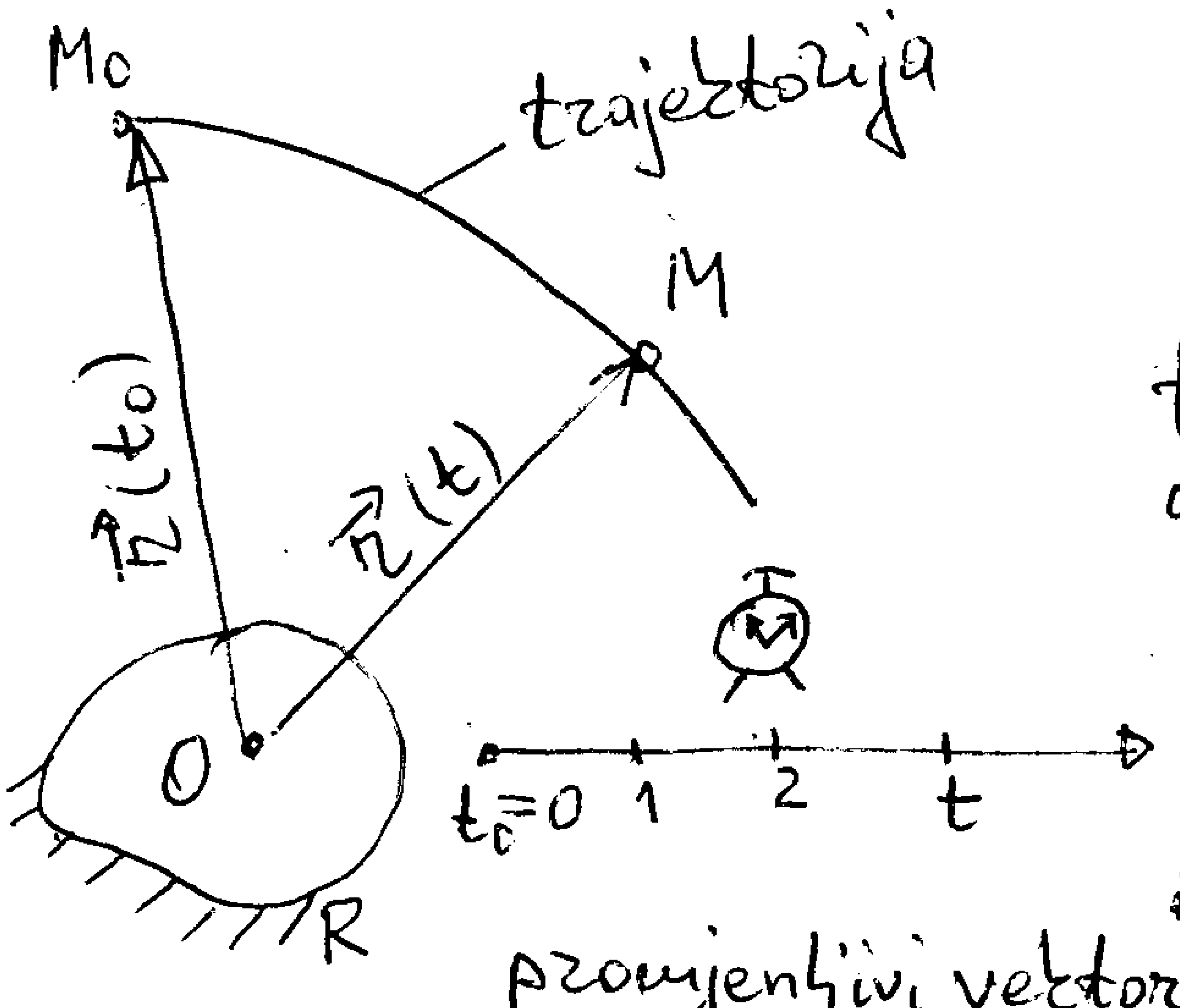
b) Određivanje, na osnovu poznatog zakona kretanja, kinematičkih karakteristika kretanja tačke (trajektorije, brzine, ubrzanja i dr.).

Zamišljena neprekidna linija koju opisuje pokretna tačka u prostoru naziva se <u>putanjom</u> ili <u>trajektorijom</u> te tačke.

Kretanje tačke posmatraćemo u odnosu na uslovno apsolutno nepokretni sistem referencije.

1.1 Postupci za definisanje kretanja tačke

a) Vektorski postupak



Položaj tačke M koja se kreće potpuno je određen vektorom $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ čiji je početak u nekoj uočenoj tački O referentnog tijela R (referentna tačka), a kraj u pokretnoj tački M.

Vektor $\vec{r}$ zove se vektor položaja tačke M (radijus-vektor tačke M).

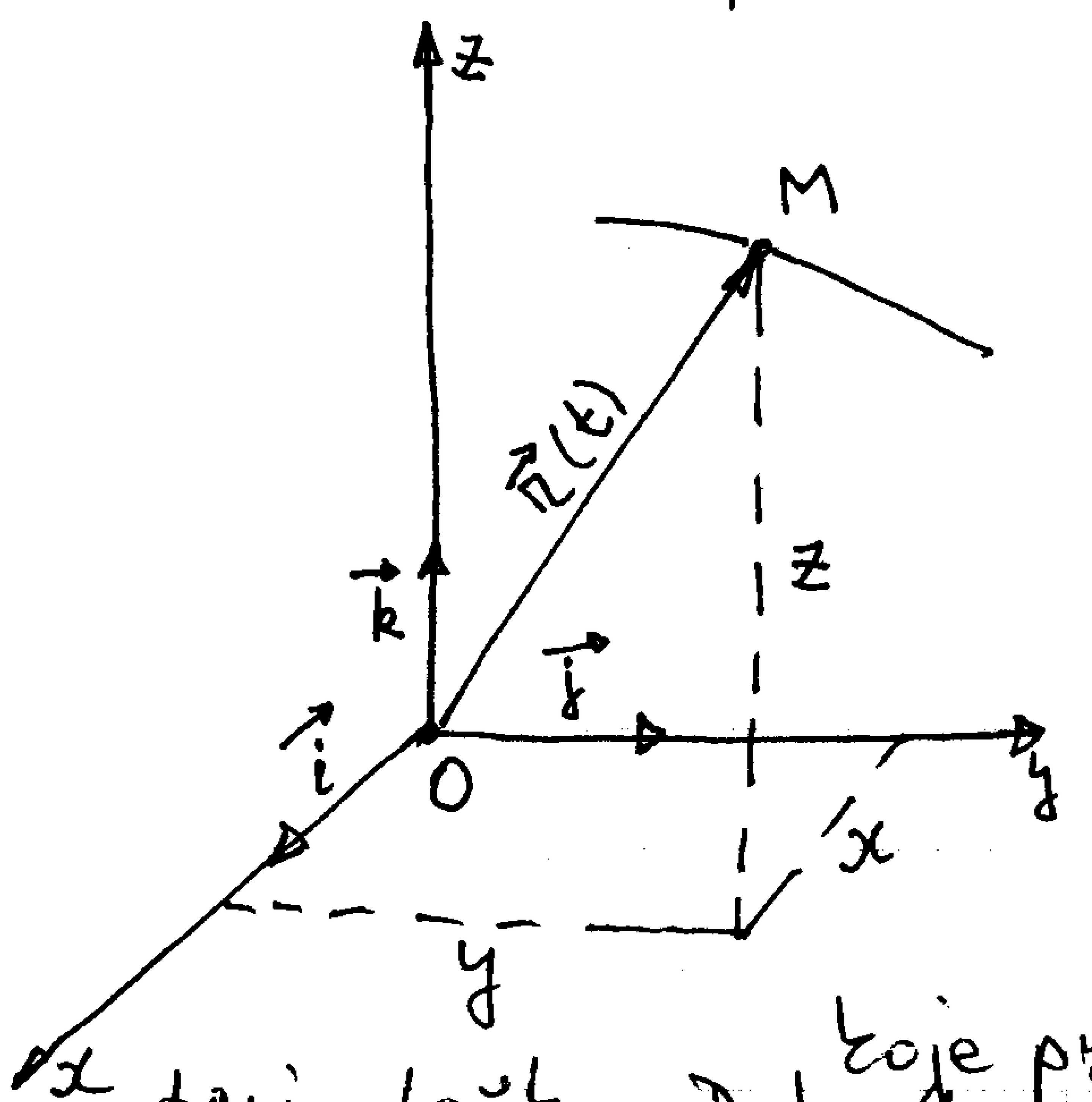
Tokom kretanja se ovaj vektor mijenja i po pravcu, i po intezitetu. Dakle, $\vec{r}$ je promjenljivi vektor koji u svakom trenutku vremena t ima određenu vrijednost, tj. u matematičkom smislu on je vektorska funkcija skalarnog argumenta t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

Jednačina (1) određuje zakon kretanja tačke u vektorskom obliku, odnosno kaže se da je ona konačna jednačina kretanja tačke u vektorskom obliku.

Trajektorija tačke dobija se konstrukcijom geometrijskih mjesta krajeva vektora položaja $\vec{r}$ i zove se hodograf vektora položaja $\vec{r}$.

b) Koordinatni postupak



Referentna tačka O usvaja se za početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$. Tada je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

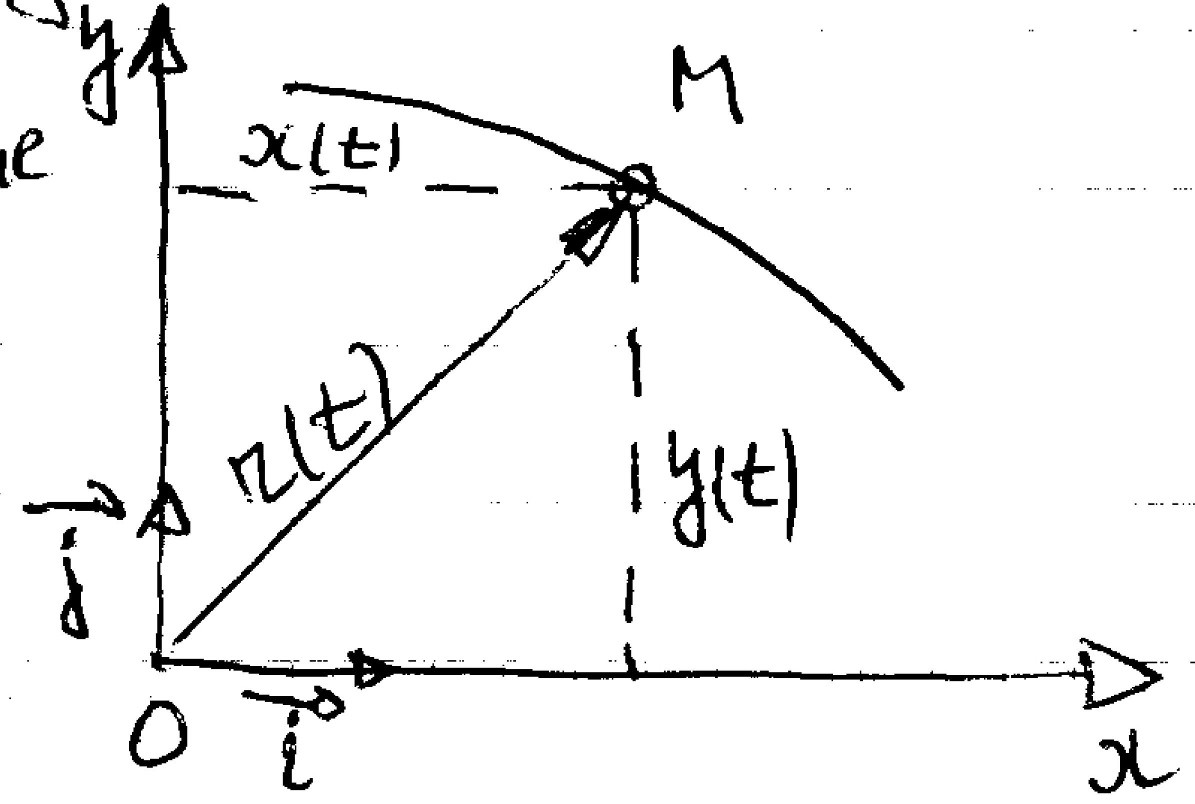
gdje su $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori osa x, y i z, respektivno. Vektorskoj funkciji $\vec{r} = \vec{r}(t)$ odgovaraju tri skalarne funkcije

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t) \qquad (2)$$

koje predstavljaju konačne jednačine kretanja tačke u Dekartovim pravouglim koordinatama.

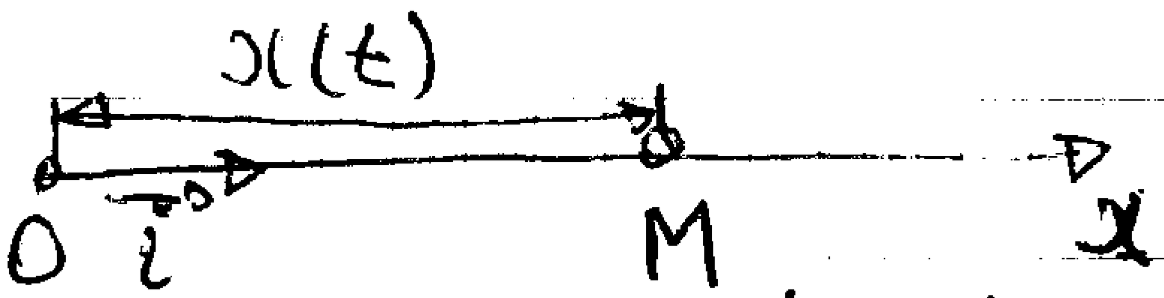
Ako se tačka M kreće u ravni, recimo Oxy, tada su konačne jednačine kretanja tačke određene relacijama

$$x = x(t),\quad y = y(t) \qquad (3)$$



Ako se tačka M kreće pravolinijski, recimo duž ose x, tada je zakon pravolinijskog kretanja određen jednom relacijom

$$x = x(t) \qquad (4)$$



Jednačine (2) i (3) su i parametarske jednačine trajektorije tačke M u kojima ulogu parametra ima vrijeme t. Eliminacijom vremena t iz ovih jednačina dobija se jednačina linije putanje. Npr., u slučaju kretanja u ravni eliminacijom parametra t iz (3), dobijamo jednačinu linije putanje u obliku $F(x, y) = 0$ ili $y = f(x)$. Trajektorija tačke je dio ili cijela linija putanje što se u svakom konkretnom slučaju utvrđuje na osnovu konačnih jednačina kretanja.

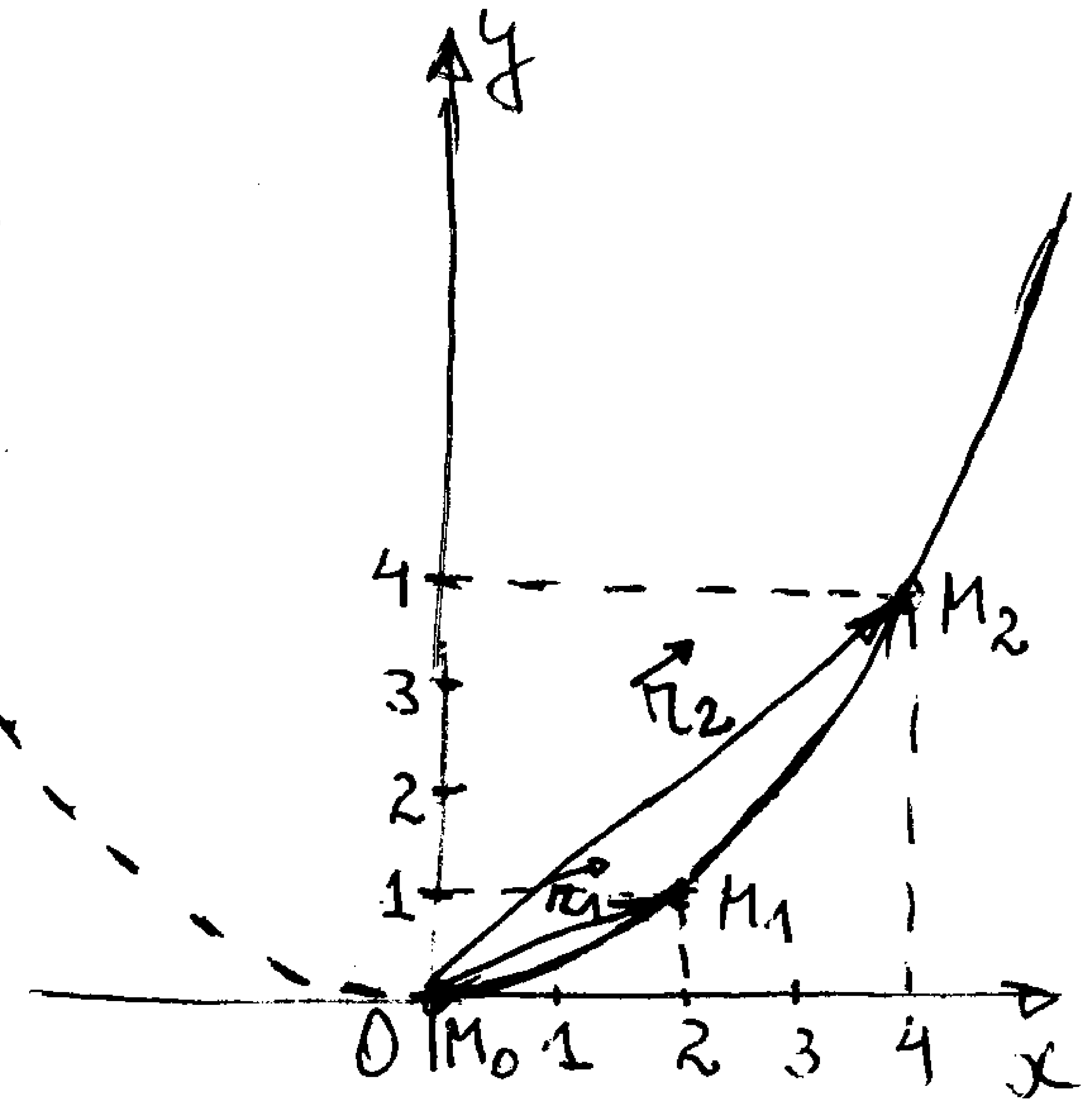
Primjer 1. Konačna jednačina kretanja tačke u ravni zadata je jednačinom: $\vec{r} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}$, gdje je r u metrima m, a vrijeme t u sekundama s. Odrediti: a) položaj tačke u trenucima $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$; b) konačne jednačine kretanja u Dekartovim koordinatama; c) putanju tačke.

a) $\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = 0$; $\vec{r}_1 = \vec{r}(1) = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{r}_2 = \vec{r}(2) = 4\vec{i} + 4\vec{j}$

b) $x=2t$, $y=t^2$

c) Eliminacijom parametra t iz gornjih jednačina dobija se jednačina linije putanje: $y = x^2/4$

Parametar t je vrijeme i ono uzima vrijednost od nule do beskonačnosti pa će biti: $0 \le x(t) < \infty$ i $0 \le y(t) < \infty$, tj. samo dio parabole $y = x^2/4$ smješten desno od ose y predstavlja putanju.



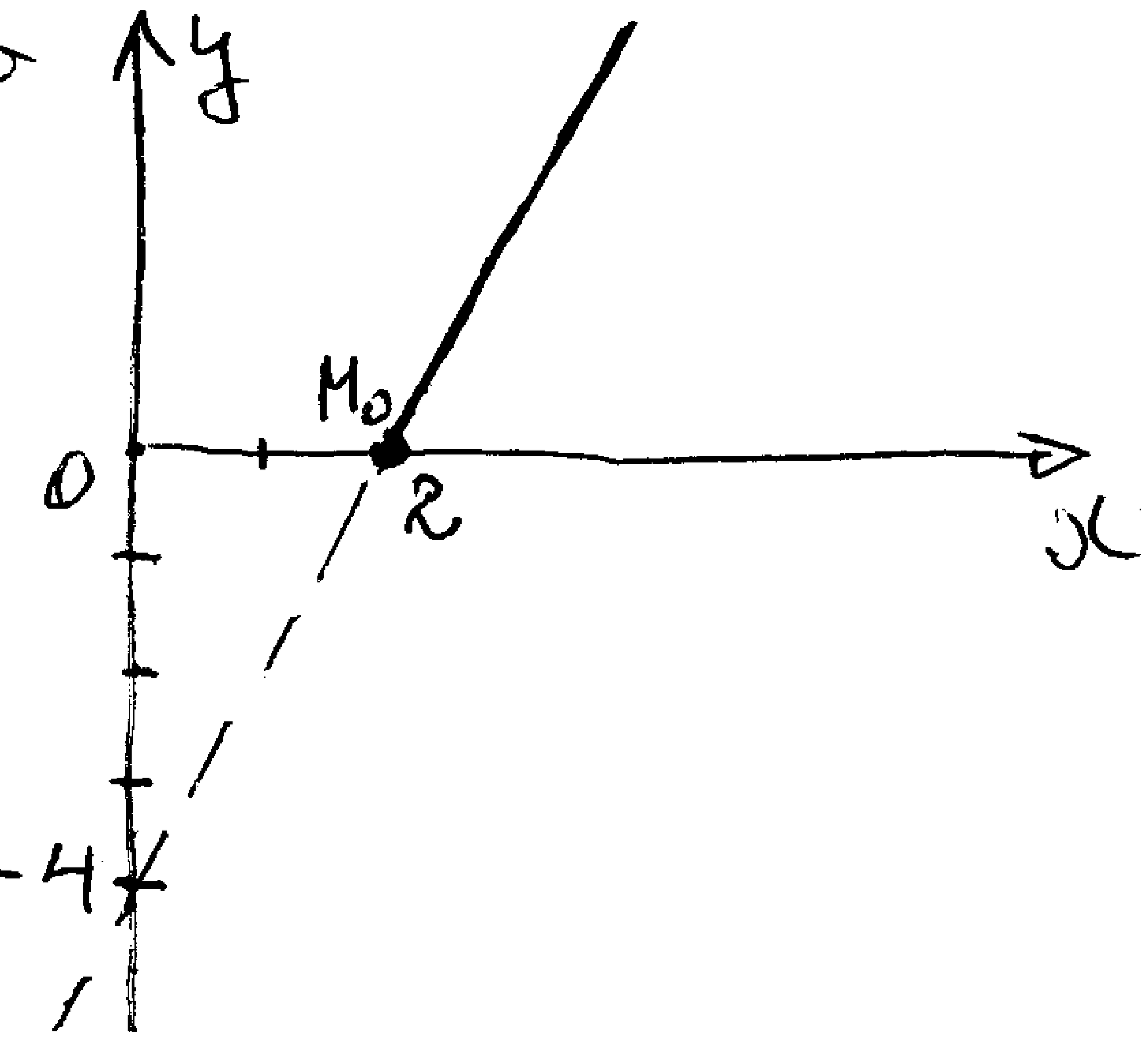
Primjer 2. Za kretanje tačke M opisano parametarskim jednačinama

$x = 2t^2 + 2$ [m],

$y = 4t^2$ [m],

odrediti trajektoriju tačke M.

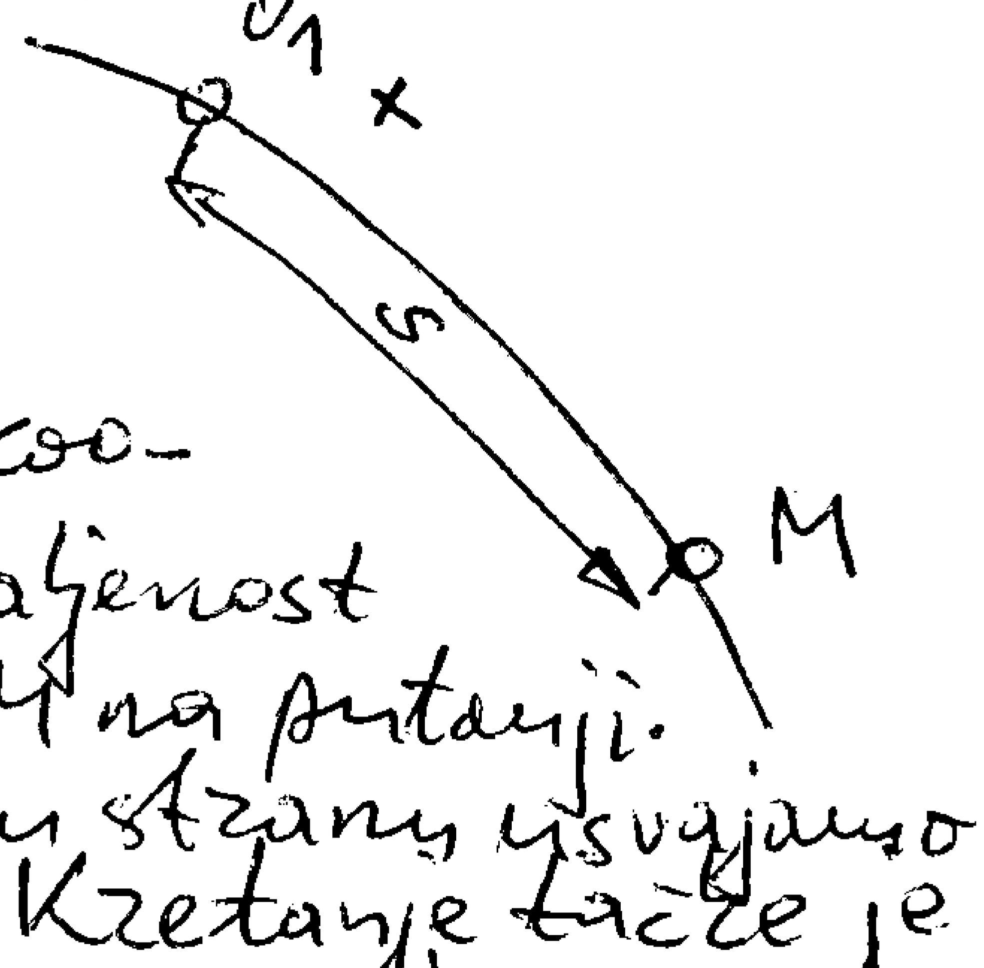
Za liniju putanje dobijamo pravu $y = 2x - 4$, a kako je $2 \le x(t) < \infty$ i $0 \le y(t) < \infty$ to je putanja dio ove prave iznad ose x.



Napomena. Osim Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema mogu se koristiti i drugi koordinatni sistemi – cilindrični, sferni itd.

c) Prirodni postupak

Ovaj postupak se primjenjuje kada je putanja tačke unaprijed poznata. Na putanji se neka tačka O_1 (obično početni položaj pokretne tačke M) uzima za referentnu tačku. Krivolinijskom koordinatom $s = \overset{\frown}{O_1M}$ koja predstavlja lučnu udaljenost tačke M od tačke O_1 određen je položaj tačke M na putanji.

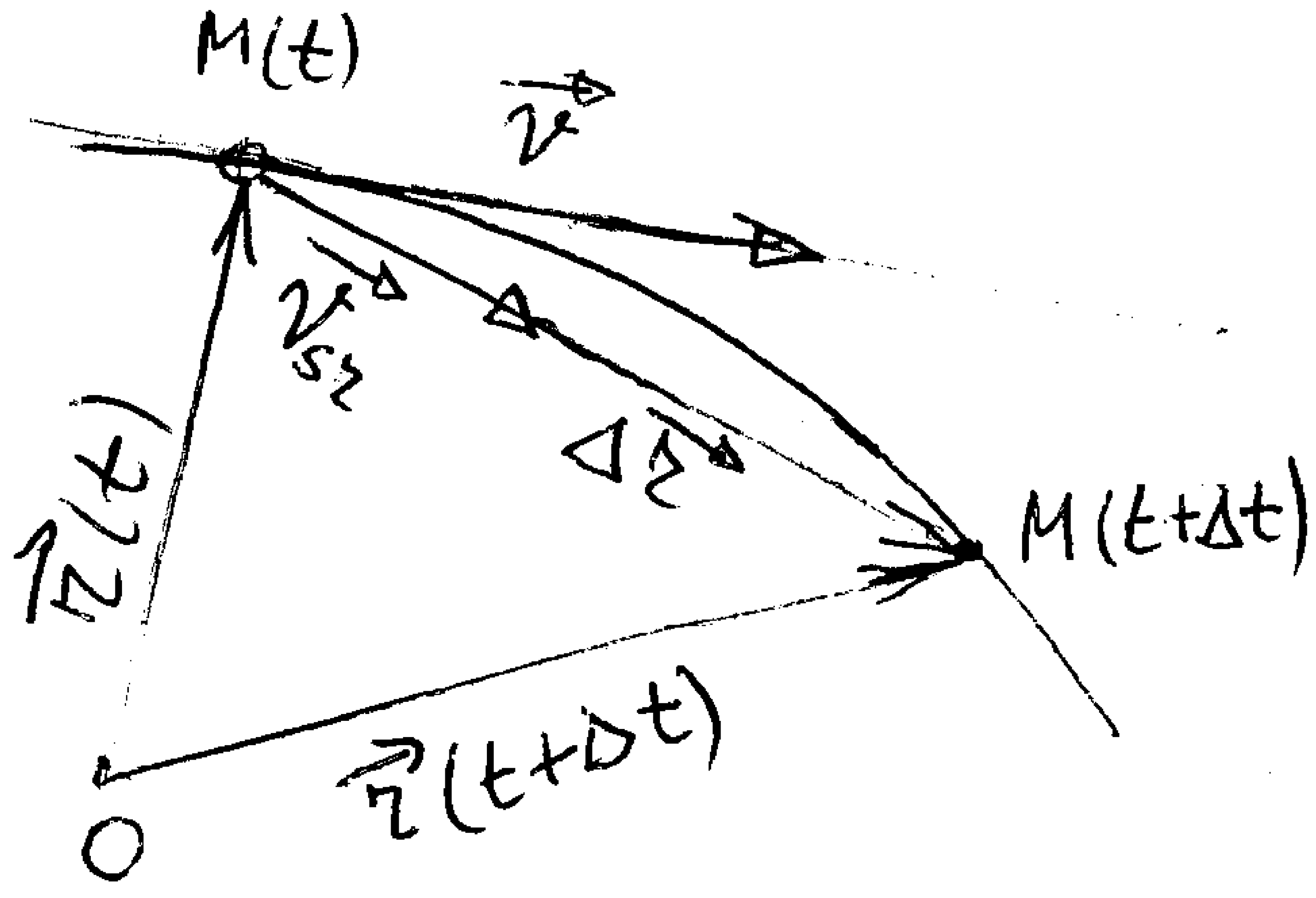


Pri tome lučnu udaljenost s mjerenu na jednu stranu usvajamo za pozitivnu, a na drugu stranu za negativnu. Kretanje tačke je tada opisano samo jednom parametarskom jednačinom

$$s = s(t) \qquad (5)$$

koja predstavlja konačnu jednačinu kretanja tačke po putanji, odnosno zakon kretanja tačke po putanji (često se zove i zakon puta).

1.2 Brzina tačke



Posmatrajmo dva položaja tačke M(t) i M(t+Δt) koja su određena vektorima položaja $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}(t+\Delta t)$, gdje je Δt konačan priraštaj vremena. Vektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ određuje priraštaj vektora položaja i zove se vektor pomjeranja tačke.

Vektor srednje brzine, $\vec{v}_{sr}$, se definiše kao količnik priraštaja vektora položaja $\Delta\vec{r}$ i vremenskog intervala Δt za koji se taj priraštaj ostvari:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (6)$$

Očigledno je da je vektor $\vec{v}_{sr}$ kolinearan sa $\Delta\vec{r}$ i istog smjera kao $\Delta\vec{r}$. U opštem slučaju srednja brzina tačke loše karakteriše promjenu vektora položaja u nekom trenutku unutar vremenskog intervala Δt, a ova karakteristika postaje sve tačnija, što je vremenski interval Δt manji.

Brzinom tačke M u datom trenutku t naziva se vektorska veličina $\vec{v}$ kojoj teži srednja brzina $\vec{v}_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Granična vrijednost odnosa $\Delta\vec{r}/\Delta t$ kada $\Delta t \to 0$ predstavlja, po definiciji, prvi izvod vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ po argumentu t, pa će biti

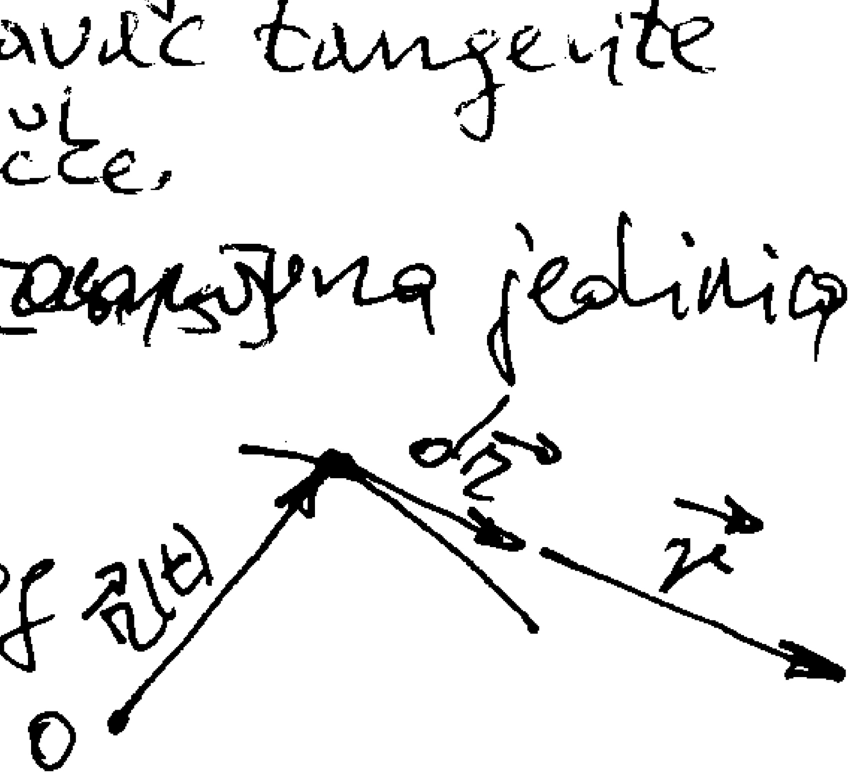
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \qquad (7)$$

gdje se tačka iznad vektora koristi za oznaku izvoda po vremenu.

Dakle, vektor brzine tačke u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

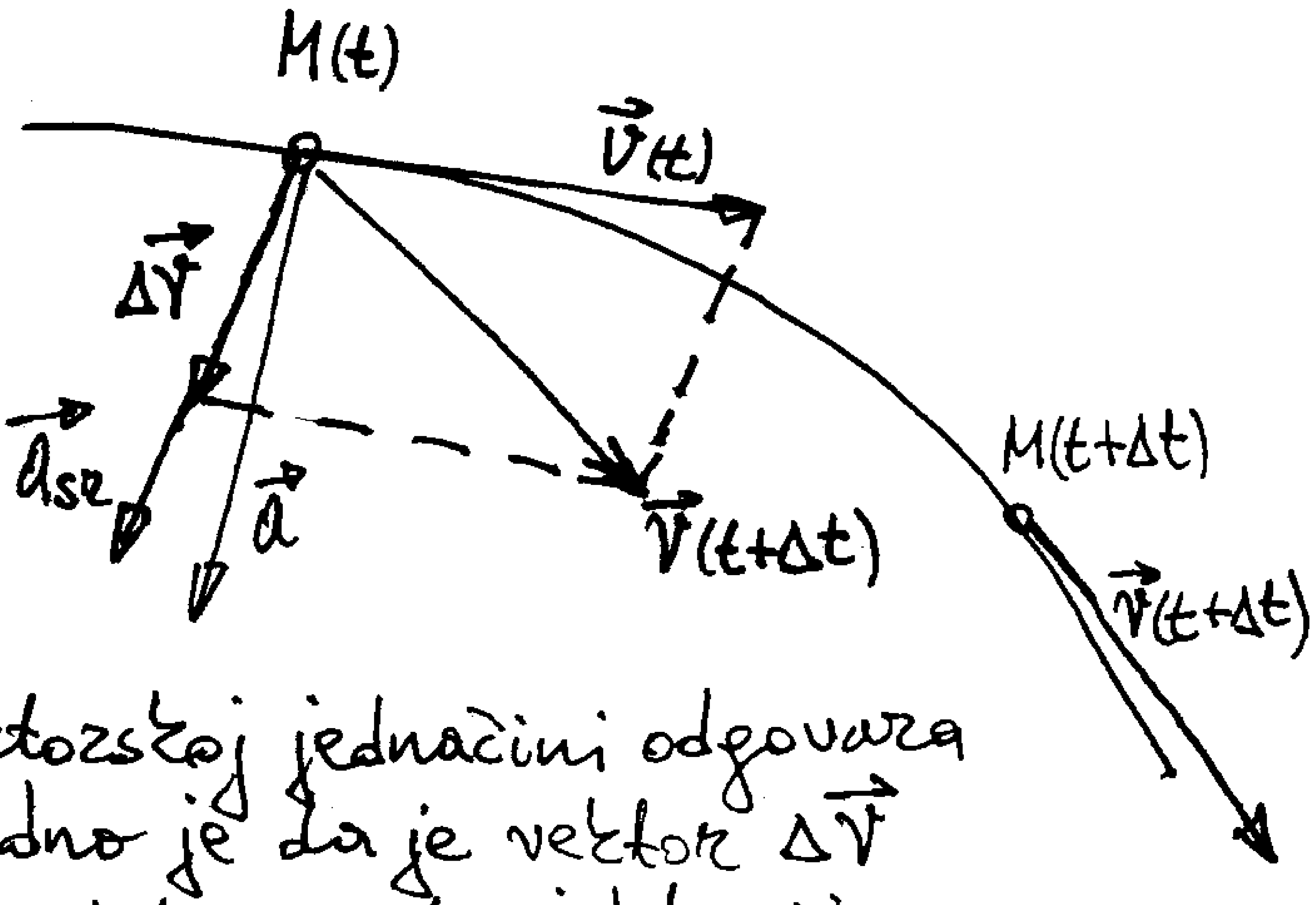
Pošto pravac sječice M(t)M(t+Δt) teži ka pravcu tangente na trajektoriju kada $\Delta t \to 0$, to vektor $\vec{v}$ ima pravac tangente na putanju i usmjeren je u smjeru kretanja tačke.

Dimenzija brzine: [v] = [dužina]/[vrijeme], [illegible]na jedinica je $\frac{m}{s}$ (metar u sekundi).



Napomena. Na osnovu (7) je $d\vec{r} = \vec{v}dt$, tj vektor elementarnog pomjeranja $d\vec{r}$ je kolinearan sa vektorom brzine $\vec{v}$.

1.3 Ubrzanje tačke



Posmatrajmo dva položaja pokretne tačke, M(t) i M(t+Δt), i uočimo odgovarajuće vektore brzina $\vec{v}(t)$ i $\vec{v}(t+\Delta t)$. Priraštaj vektora brzine za vremenski interval Δt je

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t),$$

odakle je $\vec{v}(t+\Delta t) = \Delta\vec{v} + \vec{v}(t)$, a ovoj vektorskoj jednačini odgovara paralelogram vektora u tački M. Očigledno je da je vektor $\Delta\vec{v}$ uvijek usmjeren u izdubljenu (konkavnu) stranu trajektorije.

Vektor srednjeg ubrzanja, $\vec{a}_{sr}$, se definiše kao količnik priraštaja vektora brzine $\Delta\vec{v}$ i vremenskog intervala Δt za koji se taj priraštaj ostvari:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (8)$$

Vektor $\vec{a}_{sr}$ ima isti pravac i smjer kao i vektor $\Delta\vec{v}$ i, dakle, usmjeren je u konkavnu stranu trajektorije.

Ubrzanjem tačke M u datom trenutku t (trenutnim ubrzanjem ili kraće samo ubrzanjem tačke) naziva se vektorska veličina $\vec{a}$ kojoj teži srednje ubrzanje $\vec{a}_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Imajući u vidu definiciju izvoda vektora iz gornje relacije slijedi

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \qquad (9)$$

odnosno

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \qquad (10)$$

jer je $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ (v. (7)).

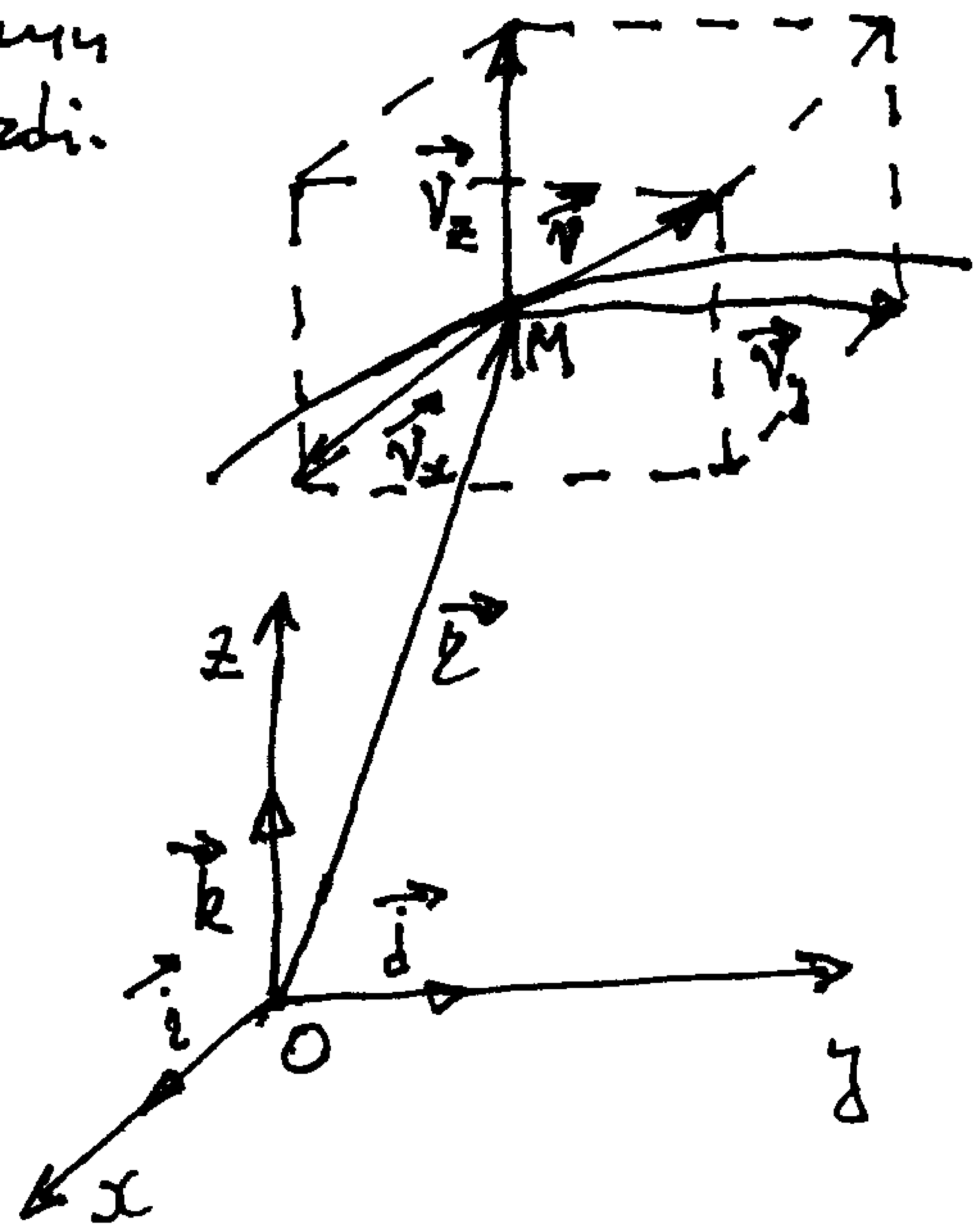
Prema tome, vektor ubrzanja tačke jednak je prvom izvodu vektora brzine ili drugom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

Vektor $\vec{a}$ je uvijek usmjeren u konkavnu stranu trajektorije tačke, a leži u tzv. oskulatornoj ravni krive u tački M, tj. u ravni koja prolazi kroz tačku M i najbolje se priljubljuje uz krivu (ima sa krivom dodir najvišeg reda). Kod ravanskih krivih oskulatorna ravan se poklapa sa ravni krive.

Dimenzija ubrzanja: $[a] = \frac{[\text{brzina}]}{[\text{vrijeme}]}$, a osnovna jedinica $\frac{m}{s^2}$.

N. Primijetimo i naglasimo da je brzina kinematička veličina koja karakteriše promjenu vektora položaja, a ubrzanje promjenu brzine tačke u toku vremena.

1.4 Brzina i ubrzanje tačke u Dekartovim koordinatama



Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu je jednaka zbiru njenih komponenti u pravcu koordinatnih osa:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

gdje su v_x, v_y i v_z projekcije vektora brzine $\vec{v}$ na odgovarajuće ose.

Kako je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, iz definicije brzine tačke slijedi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} =$$

$$= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

jer su jedinični vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ konstantni (njihovi izvodi po vremenu su jednaki nuli).

Dakle, projekcije brzine tačke na ose Dekartovog koordinatnog sistema su određene prvim izvodima odgovarajućih koordinata po vremenu:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \tag{11}$$

Intezitet brzine je

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Analogno se izvodi i ubrzanje tačke u Dekartovim koordinatama:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

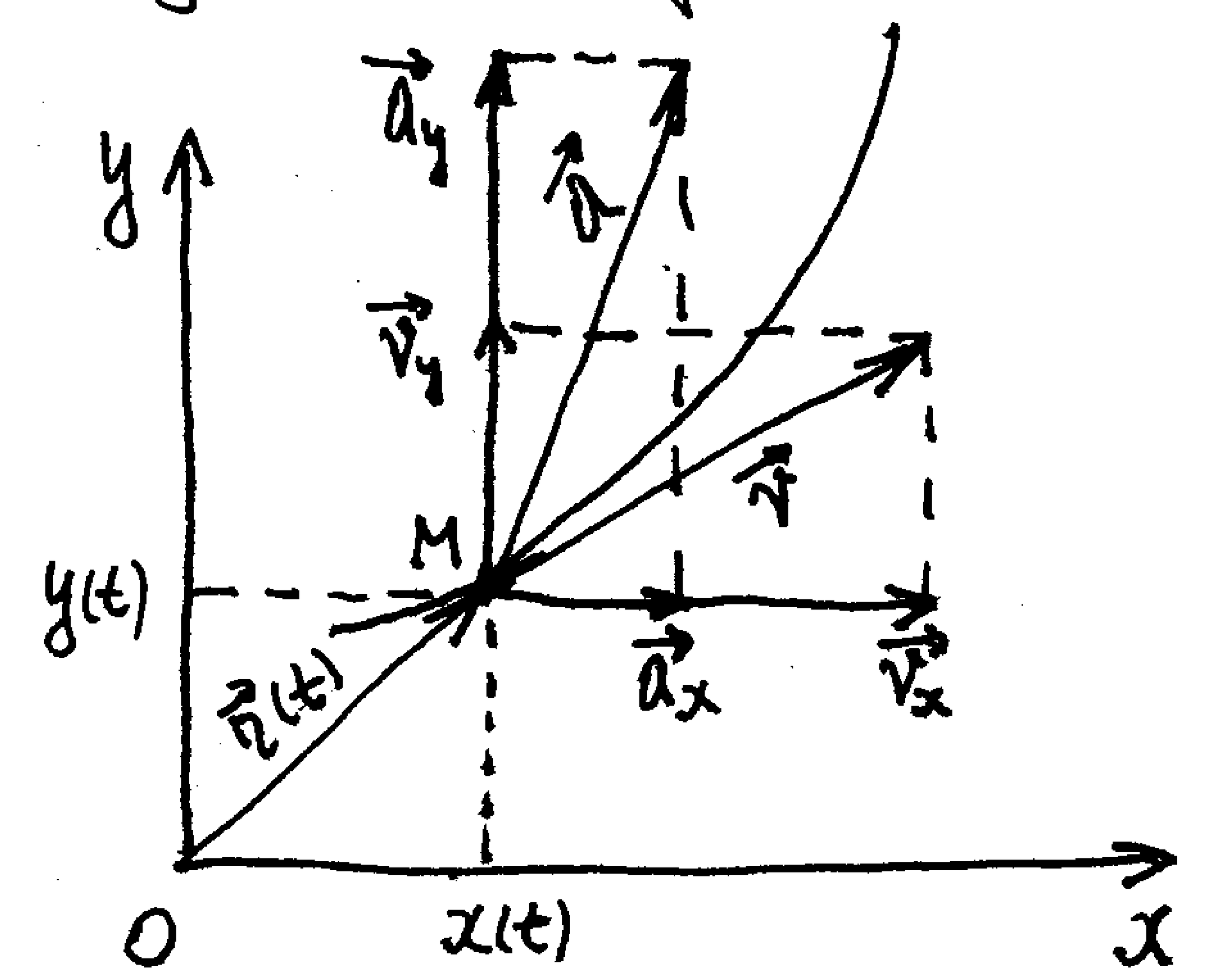
Odavde slijedi da su projekcije ubrzanja na ose Dekartovog koordinatnog sistema određene drugim izvodima po vremenu odgovarajućih koordinata tačke:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z} \tag{12}$$

Intezitet ubrzanja je

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Ako se kretanje tačke vrši u nekoj ravni, recimo xOy, tada je $z(t) \equiv 0$ i, prema tome $v_z = \dot{z} \equiv 0$, kao i $a_z = \ddot{z} \equiv 0$, tj. vektori brzine i ubrzanja leže u toj ravni.

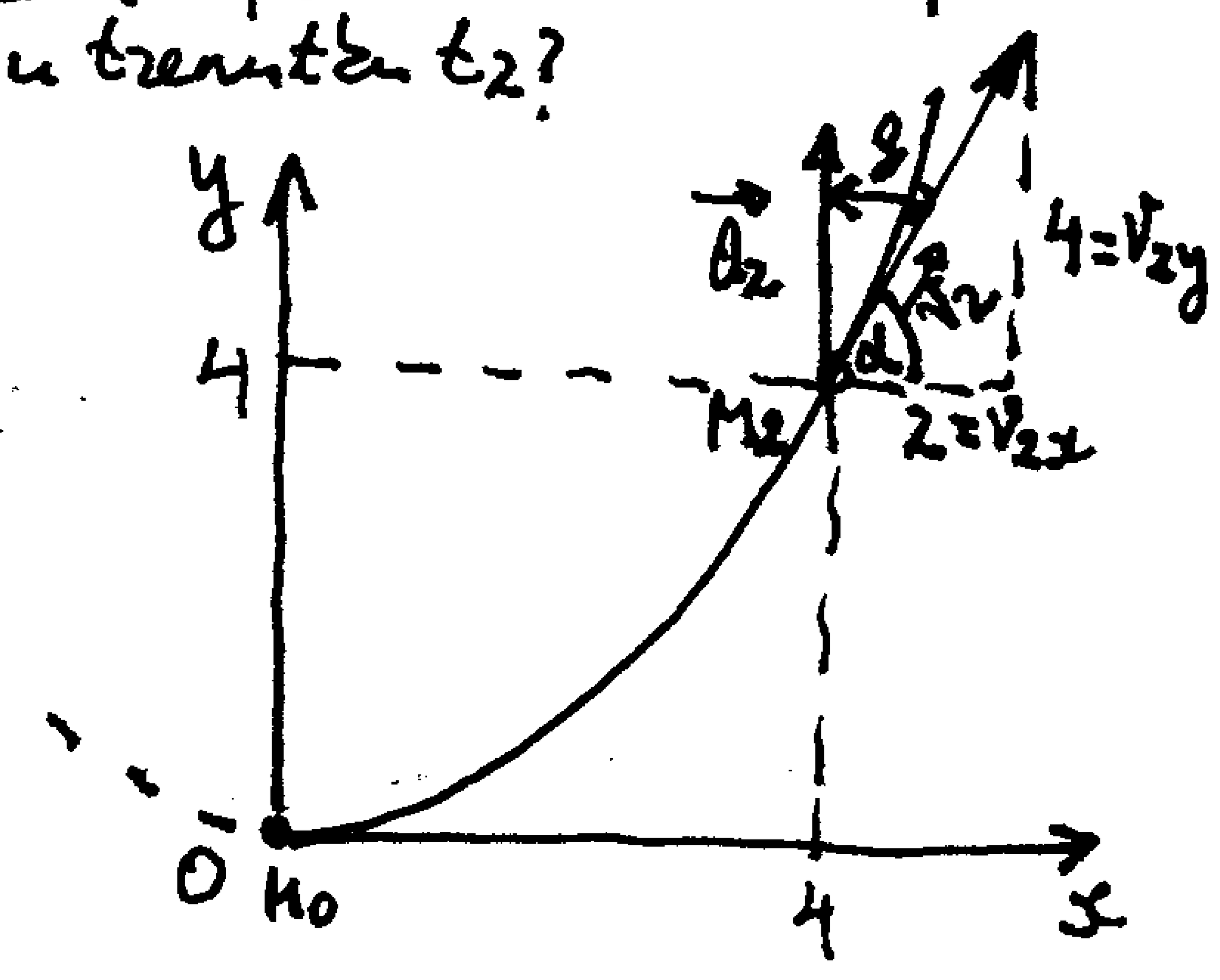


$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ &v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y} \\ &|\vec{v}| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned}} \quad (13)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\ &a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y} \\ &|\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \end{aligned}} \quad (14)$$

Primjer 3. U primjeru 1 odrediti vektore brzine i ubrzanja tačke i njihove intezitete u proizvoljnom trenutku vremena t, kao i u trenutku $t_2 = 2$ s. Koliki je ugao između brzine i ubrzanja u trenutku t_2?



$$\vec{r} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} \quad [\mathrm{m}]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right], \quad v = \sqrt{4 + 4t^2} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]; \quad a = 2 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2) = 2\vec{i} + 4\vec{j} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right], \quad v_2 = 2\sqrt{5} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}(t_2) = 2\vec{j} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right], \quad a_2 = 2 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

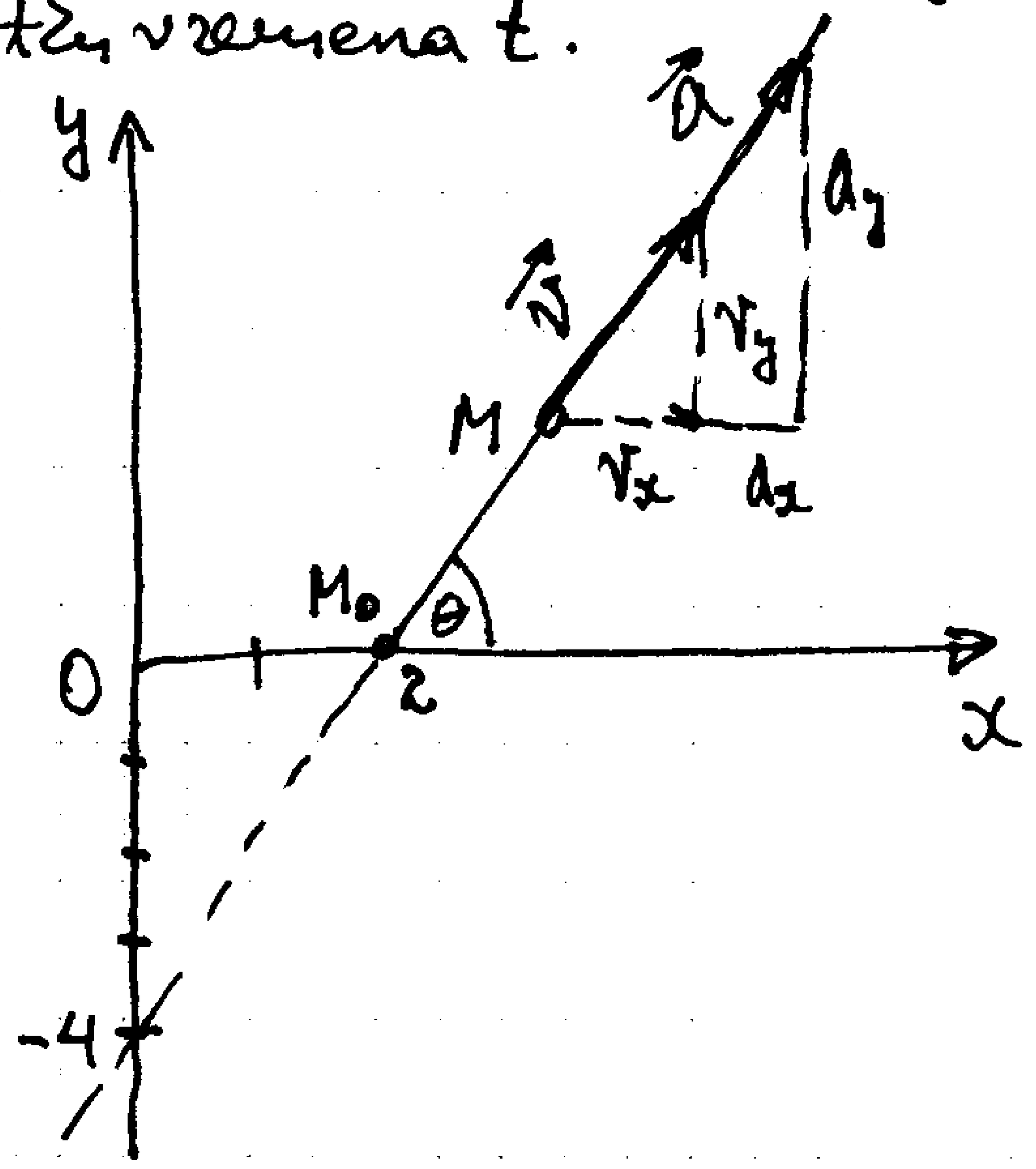
Ugao γ između brzine i ubrzanja se izračunava pomoću skalarnog proizvoda ova dva vektora: $\vec{v}_2 \cdot \vec{a}_2 = v_2 a_2 \cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{v_{2x} a_{2x} + v_{2y} a_{2y}}{v_2 a_2} = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894 \rightarrow \gamma = 26{,}6^\circ$$

N. Tangens ugla nagiba vektora brzine $\vec{v}_2$ u odnosu na x-osu je $\tan\alpha = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = 2$, a koeficijent pravca tangente na liniju putanje $y = x^2/4$ u tački M_2 je $\frac{dy}{dx}(x=4) = 2$, što potvrđuje da vektor brzine pada u pravcu tangente na trajektoriju.

Primjer 4. U primjeru 2 odrediti vektore brzine i ubrzanja tačke i njihove intezitete u proizvoljnom trenutku vremena t.

$$x = 2t^2 + 2 \ [m]$$
$$y = 4t^2 \ [m]$$



$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 4t \ \frac{m}{s}$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 8t \ \frac{m}{s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 4t\vec{i} + 8t\vec{j} \ \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4\sqrt{5}\,t \ \frac{m}{s}$$

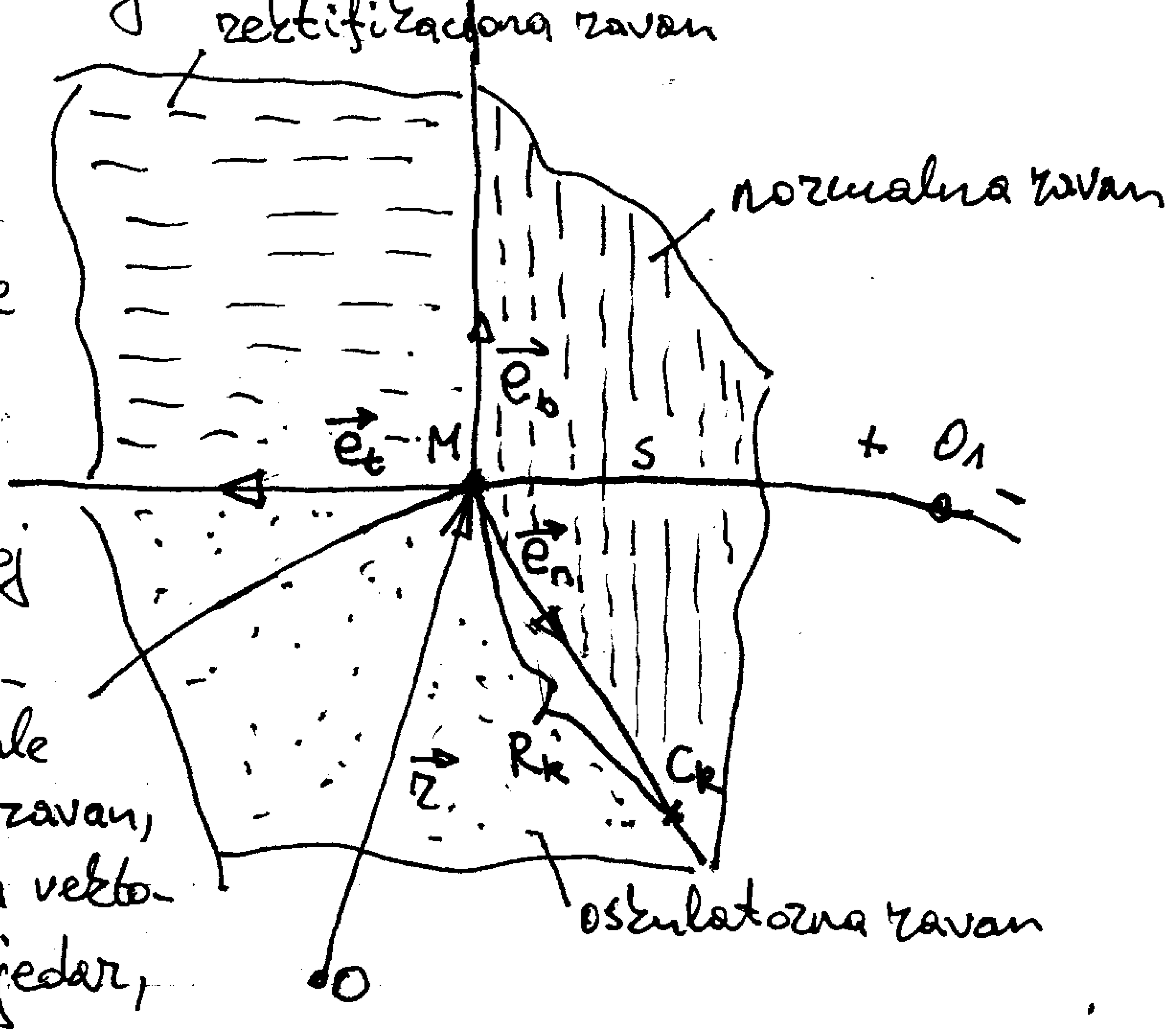
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = 4 \ \frac{m}{s^2} \qquad \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = 4\vec{i} + 8\vec{j} \ \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = 8 \ \frac{m}{s^2}; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\sqrt{5} \ \frac{m}{s^2}$$

N. $\frac{v_y}{v_x} = 2 = \frac{a_y}{a_x} = tg\theta \Rightarrow$ brzina i ubrzanje su usmjereni duž prave ($y = 2x - 4$) po kojoj se kreće tačka M.

1.5 Brzina i ubrzanje tačke u prirodnom koordinatnom sistemu

U slučajevima kada se koristi prirodni postupak za definisanje kretanja tačke, vektori brzine i ubrzanja se razlažu na svoje komponente u pravcu osa prirodnog koordinatnog sistema. To je pravougli koordinatni sistem čiji je početak pokretna tačka M a ose su usmjerene duž tangente, glavne normale i binormale. Jedinični vektor tangente $\vec{e}_t$ je u pravcu tangente na putanju u tački M i uvijek orijentisan u smjeru porasta lučne koordinate s. Glavna normala je normala koja leži u oskulatornoj ravni a njen jedinični vektor $\vec{e}_n$ je usmjeren ka centru krivine putanje. Jedinični vektor binormale $\vec{e}_b$ normalan je na oskulatornu ravan, a smjer mu je određen tako da sa vektorima $\vec{e}_t$ i $\vec{e}_n$ obrazuje desni trijedar, tj. $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$.



Položaj tačke na trajektoriji jednoznačno je određen lučnom koordinatom s pa je vektor položaja $\vec{r}$ funkcija koordinate s, tj. $\vec{r} = \vec{r}(s)$. U diferencijalnoj geometriji se dokazuju tzv. Freneovi obrasci:

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{1}{R_k}\vec{e}_n, \tag{15}$$

gdje je R_k – poluprečnik krivine krive u datoj tački (poluprečnik kružnice koja leži u oskulatornoj ravni, prolazi kroz tačku M, u njoj ima zajedničku tangentu sa krivom i najbolje aproksimira krivu u okolini date tačke)

<u>Određivanje brzine</u>

U ovom slučaju je $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$, $s = s(t)$ – zakon kretanja tačke po putanji, pa na osnovu definicije brzine imamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}.$$

Ako se ima u vidu $(15)_1$, onda je

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t = \dot{s}\,\vec{e}_t \tag{16}$$

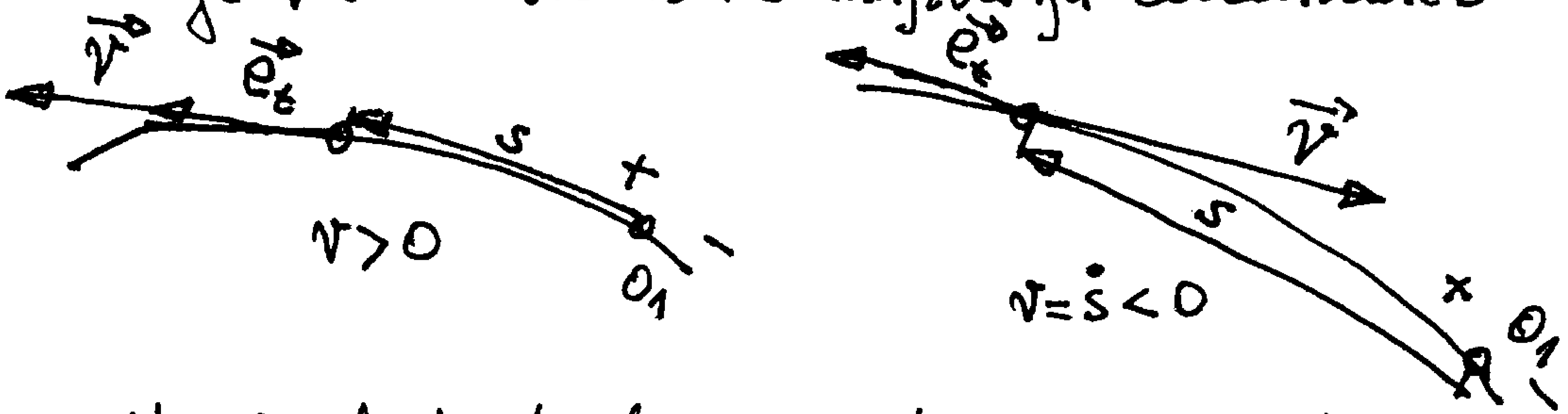
Znači, još jednom se potvrđuje da vektor brzine ima pravac tangente na trajektoriju tačke, a njegova projekcija na tangentu je određena prvim izvodom po vremenu lučne koordinate s, tj. $v_t = \dot{s}$.

U ovom postupku, projekcija brzine na tangentu se obično označava sa v i zove algebarska brzina, i ona se može razlikovati od intenziteta vektora brzine samo znakom ($|\vec{v}|=|v|=|\dot{s}|$).

Dakle, obično se piše

$$\vec{v} = v\vec{e}_t, \quad v=\dot{s} \qquad (17)$$

Ako je $v>0$ tačka se kreće u stranu porasta lučne koordinate, a ako je $v<0$ u stranu smanjivanja koordinate s.



Ako je algebarska brzina tačke poznata funkcija vremena $v=v(t)$, tada se može odrediti zakon kretanja tačke po putanji, kao

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)dt, \qquad (18)$$

gdje je s_0 vrijednost lučne koordinate u početnom trenutku $t_0=0$.

Ako se u intervalu vremena $[t_1, t_2]$ tačka kreće u istom smjeru, onda je pređeni put u tom intervalu vremena:

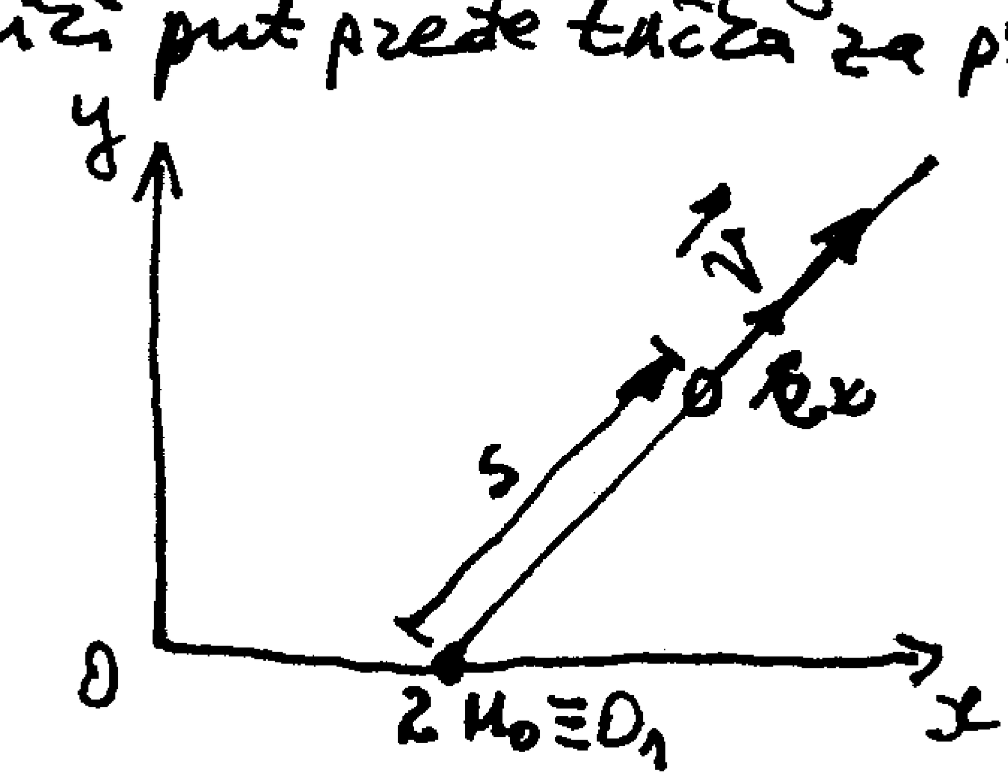
$$L = |s(t_2) - s(t_1)|,$$

a ako u posmatranom intervalu vremena dolazi do promjene smjera kretanja pređeni put jednak je zbiru dužina lukova djelova istosmjernog kretanja.

Takođe, može se pokazati da se pređeni put za interval vremena $[t_1, t_2]$ može izraziti relacijom

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|dt \qquad (19)$$

Primjer 5. U primjeru 4 odrediti zakon kretanja tačke po putanji uzimajući za referentnu tačku O_1 početni položaj M_0. Koliki put pređe tačka za prve dvije sekunde kretanja.



U ovom primjeru putanja tačke je prava; tačka se kreće stalno u istom smjeru (zašto?); $s_0=0$;

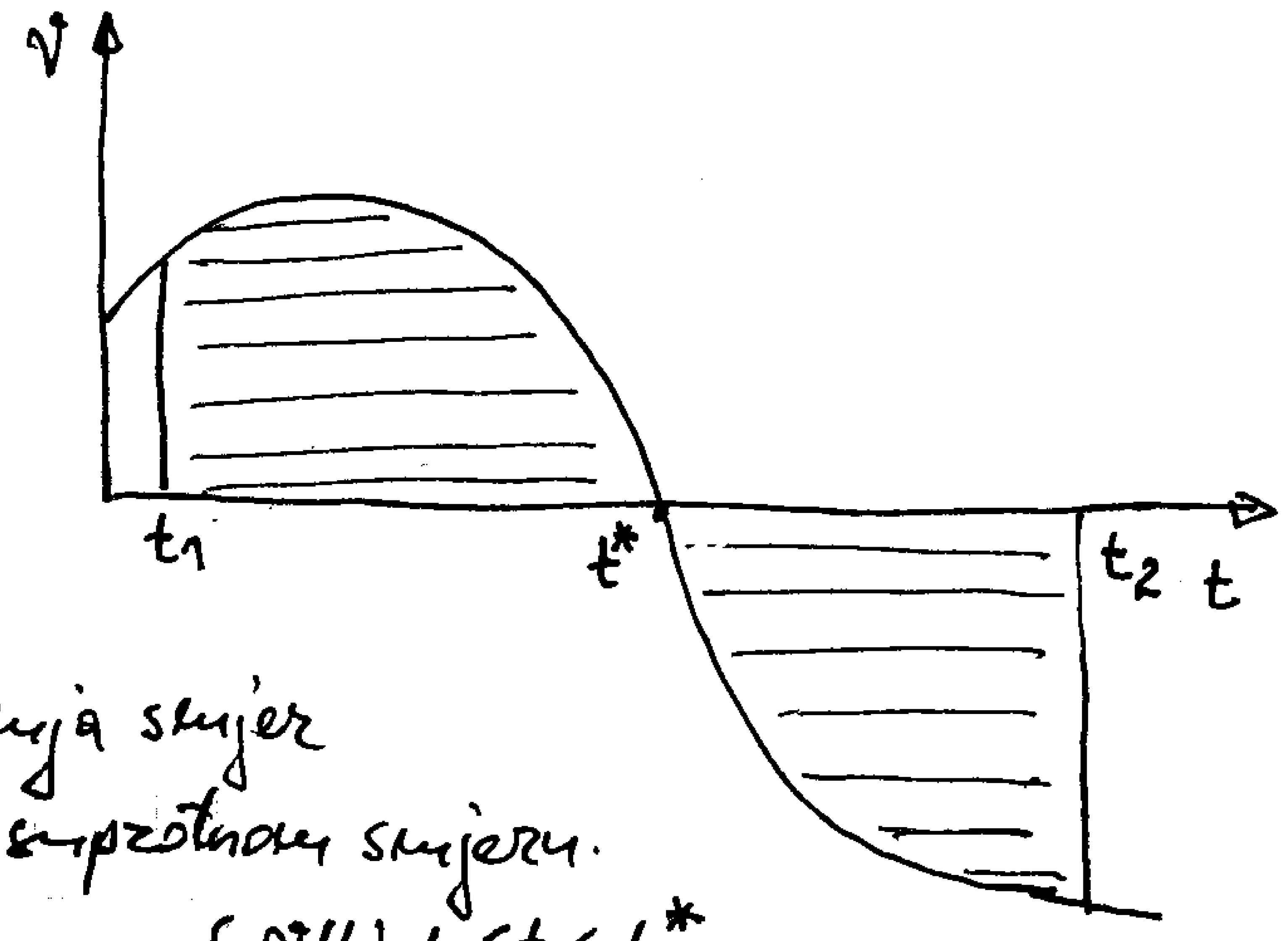
$v=|\vec{v}|=4\sqrt{5}t$ pa je na osnovu (18)

$$s(t) = \int_0^t 4\sqrt{5}t\,dt = 2\sqrt{5}t^2 \text{ [m]}$$

$$L = s(2) - \cancel{s(0)}^{0} = 8\sqrt{5} \text{ m}$$

Grafička interpretacija pređenog puta.

Neka se brzina v mijenja tokom vremena u skladu sa grafikom prikazanim na slici. Treba da odredimo pređeni put za vremenski interval $[t_1, t_2]$, $L_{[t_1,t_2]}$.



Vidimo da se u intervalu $[t_1, t^*]$ tačka kreće u smjeru porasta linijske koordinate $(v>0)$, u trenutku $t=t^*$ mijenja smjer kretanja $(v(t^*)=0)$ i dalje se kreće u suprotnom smjeru.

Pošto je $L_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |v|dt$ i $|v| = \begin{cases} v(t), & t_1 \le t \le t^* \\ -v(t), & t^* \le t \le t_2 \end{cases}$

biće

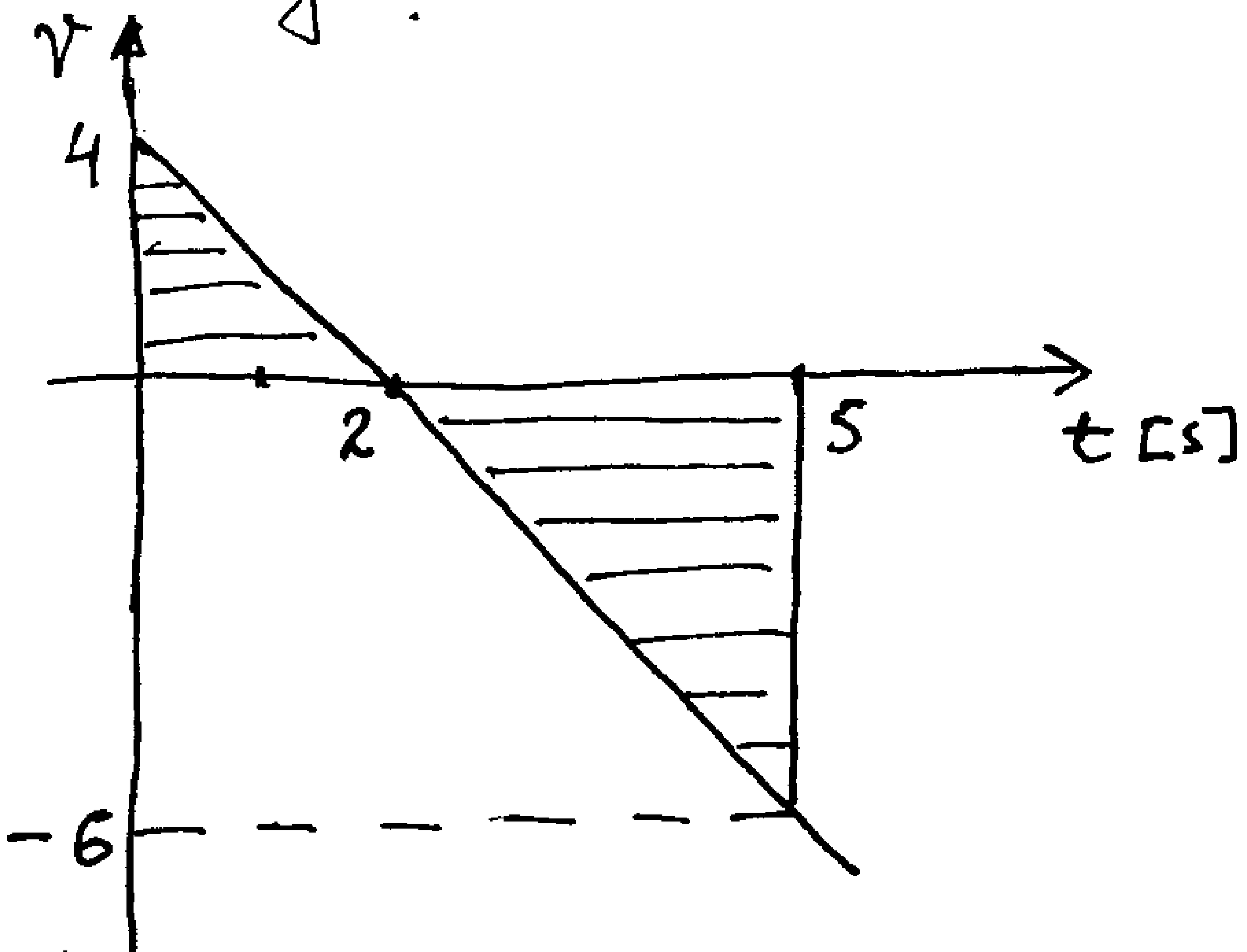
$$L_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t^*} |v|dt + \int_{t^*}^{t_2} |v|dt = \int_{t_1}^{t^*} v(t)dt + \int_{t^*}^{t_2} -v(t)dt,$$

što je jednako površini šrafirane figure na slici.

Primjer 6. Tačka se kreće po putanji brzinom $v = 4-2t \ \frac{m}{s}$. Koliki put pređe tačka za prvih pet sekundi kretanja?

$$L_{[0,5]} = \int_0^2 (4-2t)dt - \int_2^5 (4-2t)dt$$

$$= 13 m$$



Ili, direktno sa slike

$$L_{[0,5]} = P_{\triangle} + P_{\nabla} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2} = 13 m$$

Za ovo kretanje odrediti zakon puta ako je $s(0) = s_0 = 0$ i pomoću njega izračunati $L_{[0,5]}$.

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (4-2t)dt = 4t - t^2$$

Vodeći računa o promjeni smjera kretanja, biće

$$L_{[0,5]} = |s(2)-s(0)| + |s(5)-s(2)| = |4| + |-5-4| = 13 m$$

Određivanje ubrzanja

Polazeći od izraza za brzinu $\vec{v} = v\vec{e}_t$, gdje je $v = v_t = \dot{s}$ algebarska brzina (projekcija brzine na tangentu), na osnovu definicije ubrzanja biće

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}.$$

Izvod jediničnog vektora tangente $\vec{e}_t$ po vremenu (ne treba zaboraviti da on mijenja pravac pri kretanju tačke po trajektoriji), imajući u vidu (15), može se odrediti na sledeći način:

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{v}{R_k}\vec{e}_n,$$

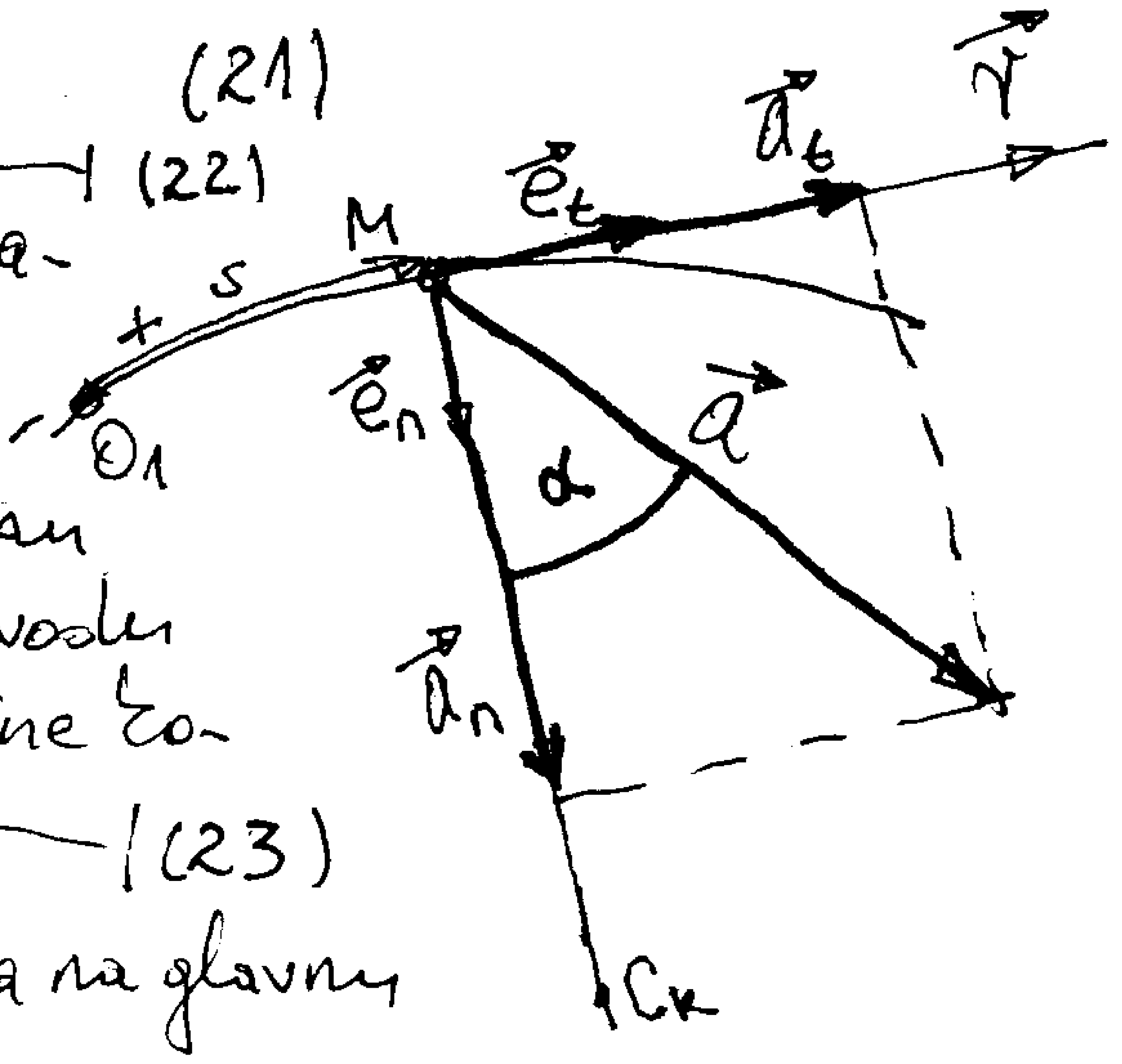
gdje su: $\vec{e}_n$ - jedinični vektor glavne normale, R_k - poluprečnik krivine trajektorije u tački M, $v = \dot{s}$ - algebarska brzina.

Na osnovu gore navedenog, vektor ubrzanja postaje

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R_k}\vec{e}_n \qquad (20)$$

Prema tome, ubrzanje tačke je određeno vektorskim zbirom dvaju međusobno upravnih komponenti, od kojih jedna pada duž tangente (tangencijalno ubrzanje) a druga ~~je~~ duž glavne normale (normalno ubrzanje) i usmjerena je u konkavnu stranu putanje ka centru krivine:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_t = a_t\vec{e}_t, \quad \vec{a}_n = a_n\vec{e}_n, \qquad (21)$$



gdje: $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \ddot{s}$ - algebarska vrijednost tangencijalnog ubrzanja (projekcija vektora ubrzanja na tangentu) karakteriše promjenu brzine po intezitetu i jednaka je prvom izvodu algebarske brzine v ili drugom izvodu lučne koordinate s po vremenu; (22)

$a_n = \dfrac{v^2}{R_k}$ - projekcija vektora ubrzanja na glavnu normalu (normalno ubrzanje) karakteriše promjenu pravca vektora brzine i jednaka je količniku kvadrata brzine i poluprečnika krivine trajektorije u datoj tački krive. (23)

Vektor ubrzanja uvijek leži u oskulatornoj ravni pa je njegova projekcija na binormalu jednaka nuli: $a_b = \vec{a}\cdot\vec{e}_b \equiv 0$.

Intezitet ubrzanja je

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \,, \tag{24}$$

a ugao α između vektora ubrzanja i glavne normale je određen izrazom

$$\tan\alpha = \frac{|a_t|}{a_n} . \tag{25}$$

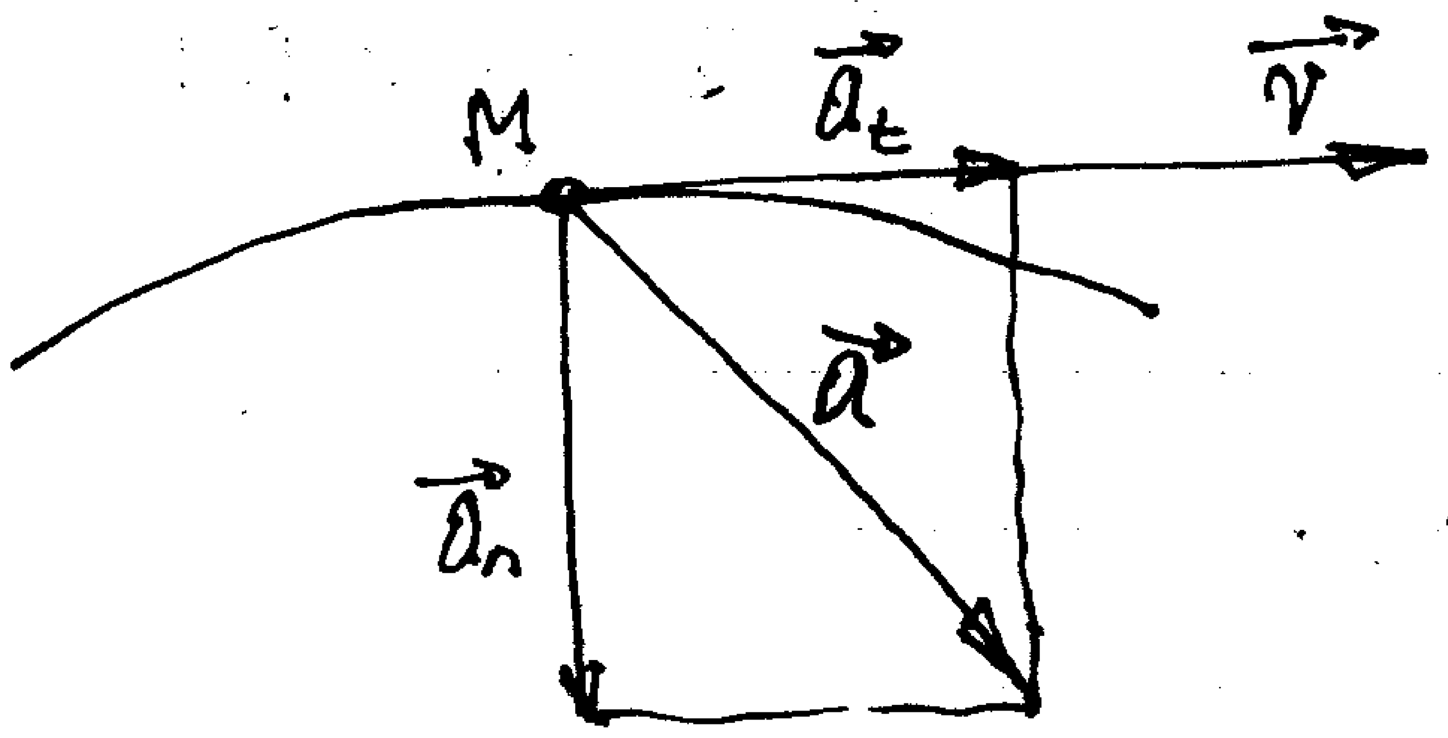
Naglasimo da normalno ubrzanje $\vec{a}_n$ uvijek ima smjer za centru krivine putanje ($a_n \geq 0$), dok tangencijalno ubrzanje $\vec{a}_t$ može biti u smjeru tangente (kada je $a_t = \dot{v} = \ddot{s} > 0$) ili u suprotnom smjeru ($a_t < 0$).

Ako je u nekom trenutku vremena normalno ubrzanje jednako nuli, tada je u tom trenutku ili je brzina jednaka nuli ili tačka prolazi kroz prevojnu tačku putanje ($R_k = \infty$). Ako je $a_n = 0$ za svo vrijeme kretanja ($v \neq 0$, $R_k = \infty$), onda je kretanje pravolinijsko.

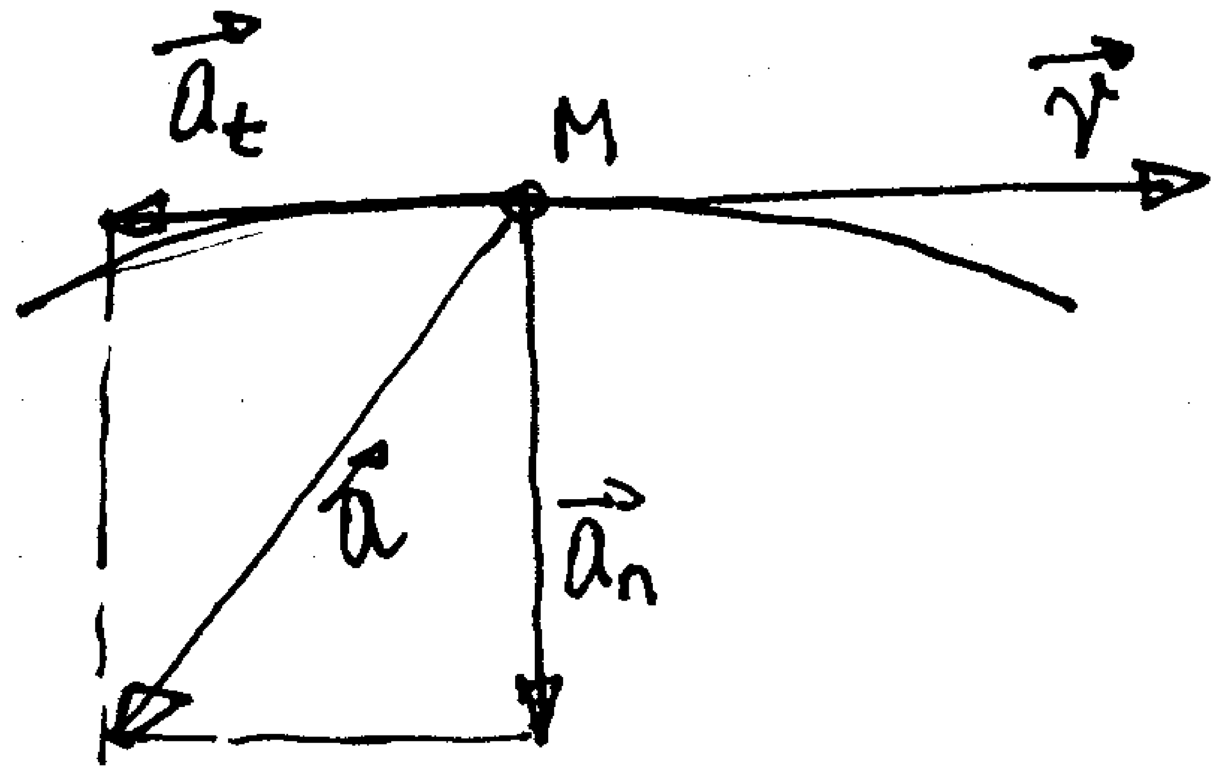
Ako je u nekom trenutku tangencijalno ubrzanje jednako nuli, onda u tom trenutku brzina ima ekstremalnu vrijednost (uglavnom, minimum ili maksimum).

Ako je $a_t = 0$ za svo vrijeme kretanja, onda je intezitet brzine tačke konstantan i takvo kretanje se zove <u>jednoliko</u> (<u>ravnomjerno</u>).

Ako se intezitet brzine povećava kretanje je <u>ubrzano</u>, a ako se smanjuje – usporeno. Lako se dokazuje da je u nekom trenutku kretanje ubrzano ako je $\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$, odnosno, $v a_t > 0$, a usporeno ako je $\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$, odnosno $v a_t < 0$.

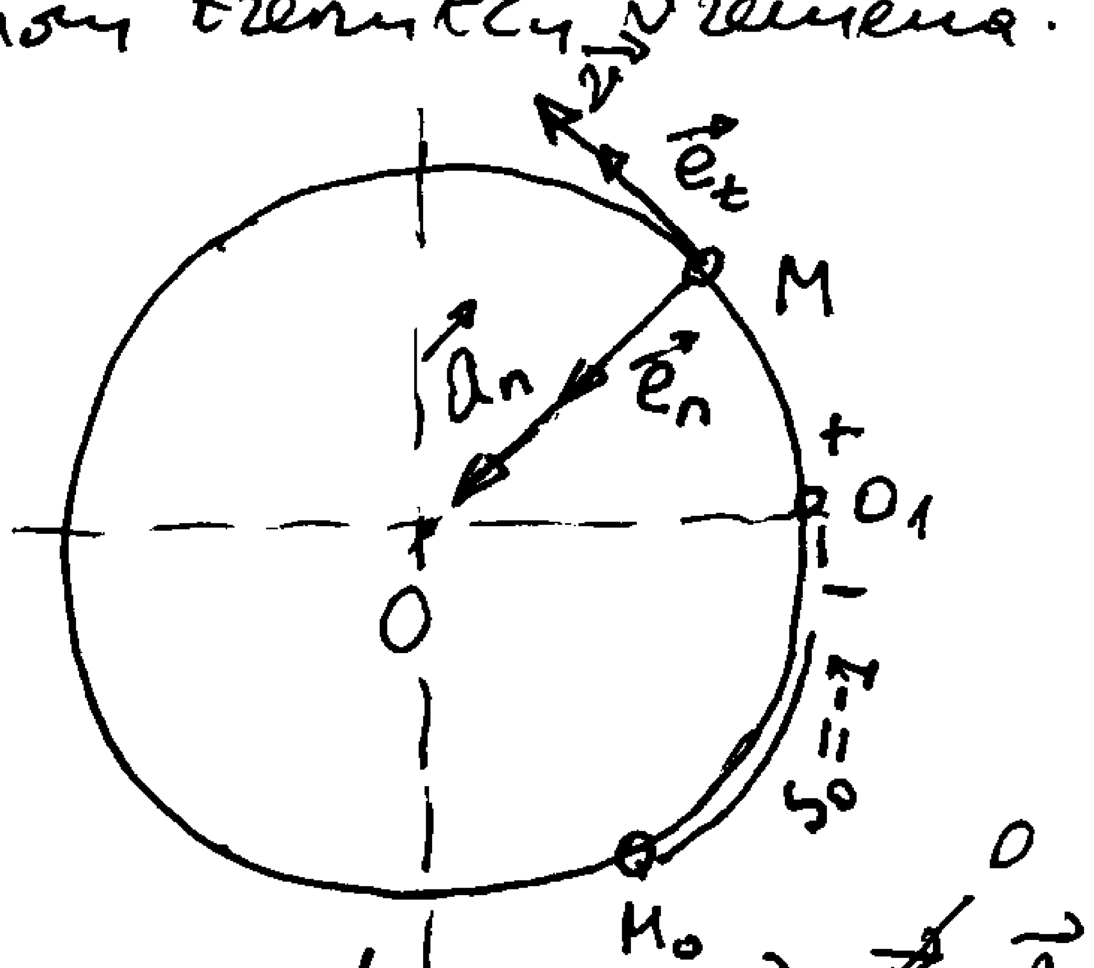


ubrzano kretanje ($v a_t > 0$)



usporeno kretanje ($v a_t < 0$)

Primjer 7. Tačka M se kreće po kružnici poluprečnika $R = 1\,m$ po zakonu $s = 2t - 1$ ($s[m]$, $t[s]$). Odrediti početni položaj tačke, brzinu i prirodne komponente ubrzanja u proizvoljnom trenutku vremena.



Početni položaj M_0: $s_0 = s(0) = -1\,m$

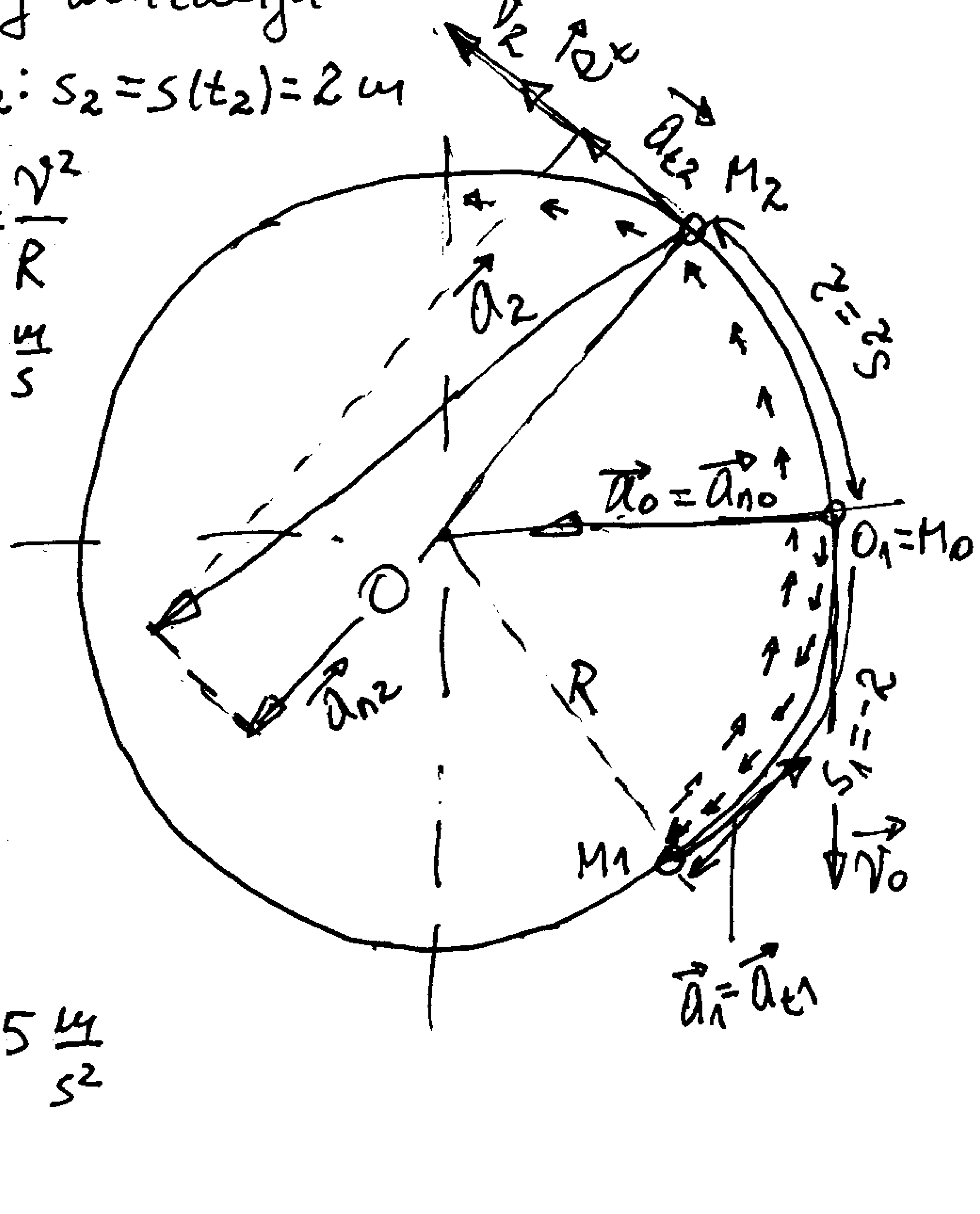
Brzina: $v = \dfrac{ds}{dt} = 2\,\dfrac{m}{s}$ $(= const)$

Tangencijalno ubrzanje: $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$

Normalno ubrzanje: $a_n = \dfrac{v^2}{R_k} = \dfrac{v^2}{R} = 4\,\dfrac{m}{s^2}$

Ovo je slučaj jednolikog kretanja ($v = const$), ukupno ubrzanje $\vec{a} = \cancel{\vec{a}_t} + \vec{a}_n = \vec{a}_n$ je intenziteta $|\vec{a}| = a_n = 4\,m/s^2$ i usmjereno je ka centru O kruga.

Primjer 8. Tačka M se kreće po kružnici poluprečnika $R = 2\,m$ tako da je zakon puta $s = t^3 - 3t$ ($s[m]$, $t[s]$). U trenucima $t_0 = 0$; $t_1 = 1\,s$ i $t_2 = 2\,s$, odrediti položaj tačke na putanji, brzinu, prirodne komponente ubrzanja i intenzitet ukupnog ubrzanja.



M_0: $s_0 = s(0) = 0$; M_1: $s_1 = s(t_1) = -2\,m$; M_2: $s_2 = s(t_2) = 2\,m$

$v = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s} = 3t^2 - 3$; $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 6t$; $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

$v_0 = v(0) = -3\,\dfrac{m}{s}$; $v_1 = v(t_1) = 0\,\dfrac{m}{s}$; $v_2 = v(t_2) = 9\,\dfrac{m}{s}$

$a_{t0} = a_t(0) = 0$, $a_{n0} = \dfrac{v_0^2}{R} = 4{,}5\,\dfrac{m}{s^2}$

$|\vec{a}_0| = a_0 = a_{n0} = 4{,}5\,m/s^2$

$a_{t1} = a_t(t_1) = 6\,\dfrac{m}{s^2}$, $a_{n1} = \dfrac{v_1^2}{R} = 0$

$a_1 = |\vec{a}_1| = |a_{t1}| = 6\,\dfrac{m}{s^2}$

$a_{t2} = a_t(t_2) = 12\,\dfrac{m}{s^2}$, $a_{n2} = \dfrac{v_2^2}{R} = 40{,}5\,\dfrac{m}{s^2}$

$a_2 = |\vec{a}_2| = \sqrt{a_{t2}^2 + a_{n2}^2} = 42{,}24\,\dfrac{m}{s^2}$

Određivanje a_t, a_n i R_k kada je kretanje zadato u Dekartovim koordinatama

Kretanje se najčešće zadaje u Dekartovim koordinatama, pa se postavlja pitanje određivanja tangencijalnog i normalnog ubrzanja, kao i poluprečnika krivine trajektorije, bez prethodnog nalaženja zakona puta $s(t)$.

U opštem slučaju važi $\vec{v}/|\vec{v}| = \pm \vec{e}_t$ i možemo usvojiti da je u posmatranom trenutku vremena $\vec{e}_t = \vec{v}/|\vec{v}|$. Tada je tangencijalno ubrzanje

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{e}_t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}, \qquad (26)$$

a normalno

$$a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2}. \qquad (27)$$

Konačno, ako se znaju brzina i normalno ubrzanje, poluprečnik krivine trajektorije je određen izrazom

$$R_k = \frac{v^2}{a_n} \qquad (28)$$

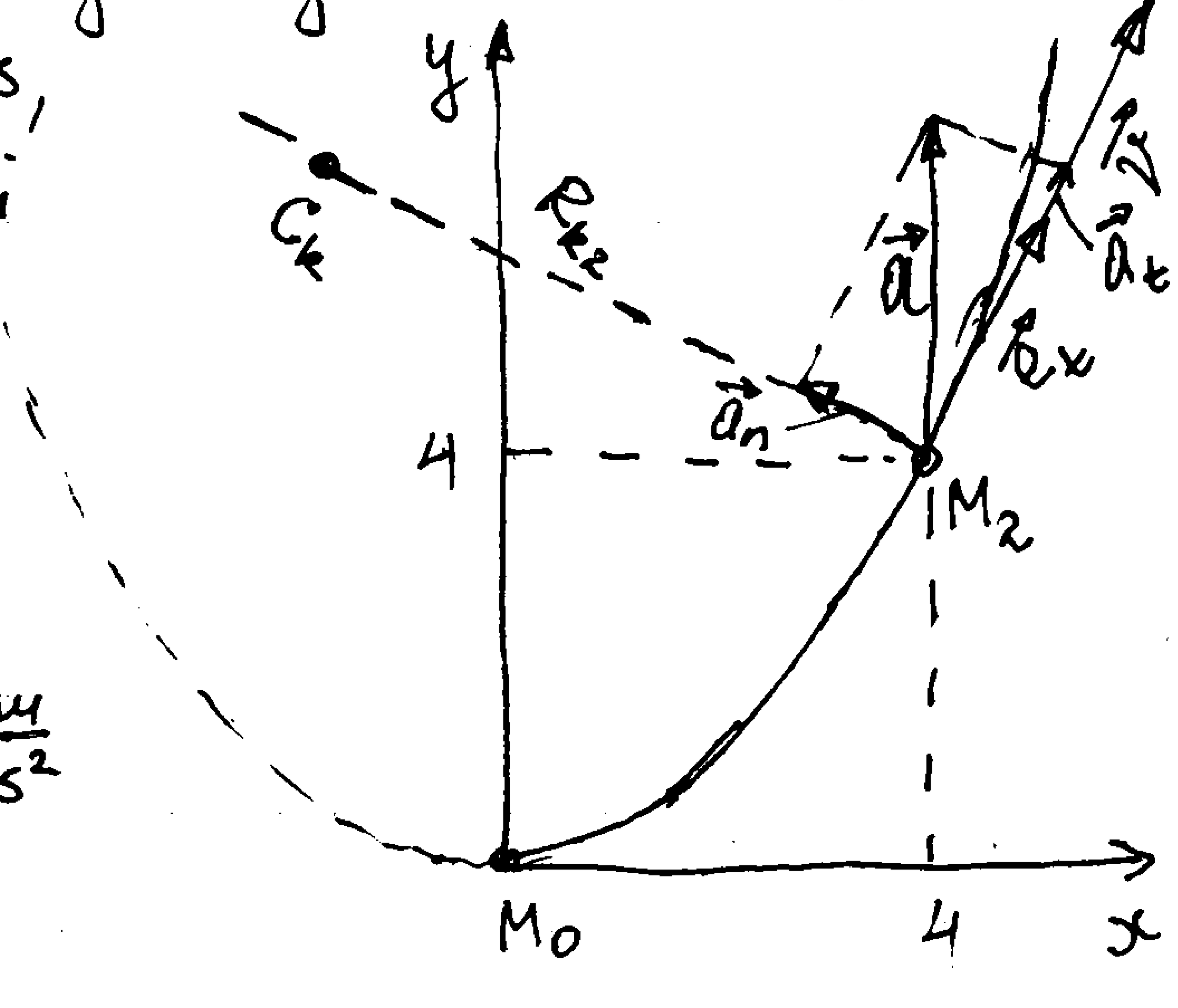
Primjena ovih formula podrazumijeva da su vektori brzine i ubrzanja i njihovi intenziteti prethodno određeni u Dekartovim koordinatama (recimo, u slučaju kretanja u ravni pomoću izraza (13) i (14)).

Primjer 9. U primjeru 1, odnosno 3, odrediti tangencijalno i normalno ubrzanje i poluprečnik krivine trajektorije u trenutku $t_2 = 2s$.

Ranije je nađeno da je u trenutku $t_2 = s$, tačka M u položaju $M_2(4,4)$ na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$. Takođe, u primjeru 3, je nađeno

$\vec{v}(t_2) = \vec{v}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $|\vec{v}_2| = 2\sqrt{5}$

$\vec{a}(t_2) = \vec{a}_2 = 2\vec{j}$, $|\vec{a}_2| = 2$



$$a_{t2} = \vec{a}_2\cdot\vec{v}_2/|\vec{v}_2| = \frac{0\cdot 2 + 2\cdot 4}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{n2} = \sqrt{|\vec{a}_2|^2 - a_{t2}^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{m}{s^2}$$

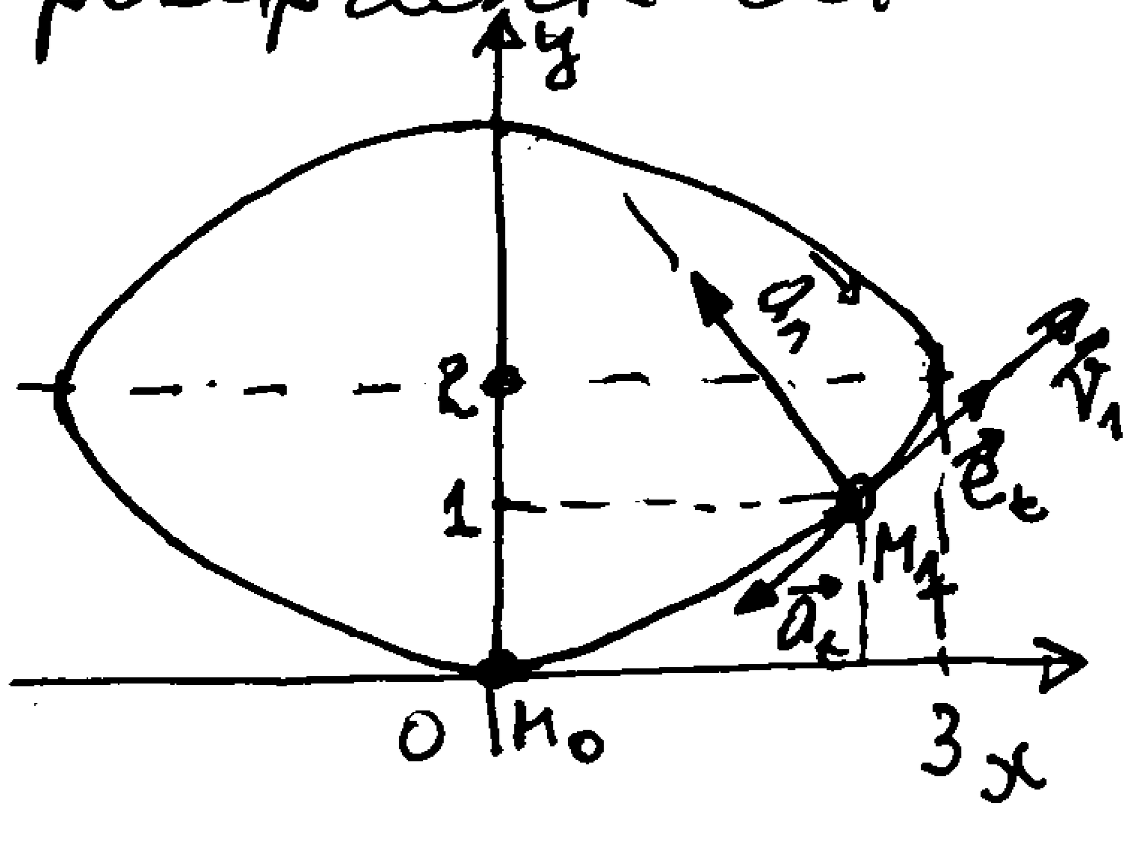
$$R_{k2} = v_2^2/a_{n2} = \frac{20}{2/\sqrt{5}} = 10\sqrt{5} \approx 22{,}36\,m$$

Provjeriti rezultat za R_k primjenjujući obrazac za poluprečnik krivine krive u ravni čija je jednačina $y = f(x)$: $R_k = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Primjer 10. Konačne jednačine kretanja tačke M u ravni su

$$x = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\,[m],\quad y = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\,[m]. \qquad (*)$$

Skicirati trajektoriju tačke i u trenutku vremena $t_1 = 1\,s$, odrediti: položaj tačke na trajektoriji, njenu brzinu, ukupno, tangencijalno i normalno ubrzanje, kao i poluprečnik krivine trajektorije.



$$\text{Iz } (*) \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \Big|^2 \\ \frac{y-2}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \Big|^2 \end{array} + \Rightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 = 1$$

Trajektorija je elipsa sa centrom u tački $(0, 2)$ i poluosama $3\,m$ i $2\,m$.

$$x(t_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\quad y(t_1) = 1 : M_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$

<u>brzina:</u>

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pi\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right);\quad v_x(t_1) = \frac{\pi}{2}\,\frac{m}{s};\quad |\vec{v}(t_1)| = v(t_1) = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\,\frac{m}{s}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right);\quad v_y(t_1) = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\,\frac{m}{s};$$

<u>ubrzanje:</u>

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right);\quad a_x(t_1) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{6}\,\frac{m}{s^2};$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{2\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right);\quad a_y(t_1) = \frac{\pi^2}{9}\,\frac{m}{s^2};$$

$$|\vec{a}(t_1)| = a(t_1) = \sqrt{a_x^2(t_1) + a_y^2(t_1)} = \frac{\sqrt{31}}{18}\pi^2\,\frac{m}{s^2}$$ – ukupno ubr.

$$\text{Iz } (26) \Rightarrow a_t(t_1) = \frac{a_x(t_1)\,v_x(t_1) + a_y(t_1)\,v_y(t_1)}{v(t_1)} = -\frac{5\pi^2}{18\sqrt{7}}\,\frac{m}{s^2}$$ – tangencijalno ubrzanje

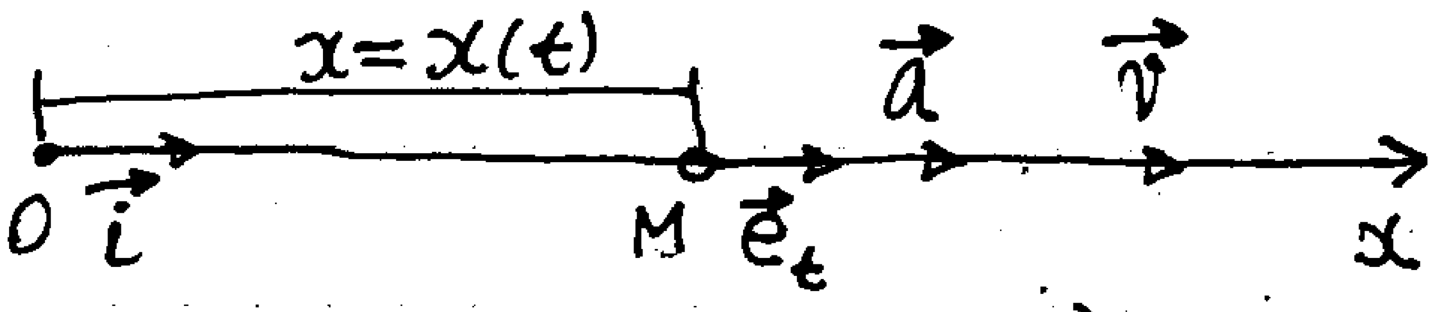
$$a_n(t_1) = \sqrt{a^2(t_1) - a_t^2(t_1)} = \frac{4\pi^2}{9}\sqrt{\frac{3}{7}}\,\frac{m}{s^2}$$ – normalno ubrzanje

$$R_k = \frac{v^2(t_1)}{a_n(t_1)} = \frac{7\sqrt{21}}{16}\,m \approx 2\,m$$ – poluprečnik krivine

1.6 Posebni slučajevi kretanja tačke

1.6.1 Pravolinijsko kretanje tačke

Kretanje tačke je pravolinijsko ako je njena linija putanje prava. Za pravu je $R_k = \infty$ pa je normalno ubrzanje tačke jednako nuli ($\vec{a}_n = 0$) i, dakle, ukupno ubrzanje je jednako tangencijalnom: $\vec{a} = \vec{a}_t$.



Duž pravolinijske linije putanje usvajamo koordinatnu osu Ox sa jediničnim vektorom $\vec{i}$ (u ovom slučaju koordinata x ima takođe ulogu prirodne (lučne) koordinate: $s = x$, $\vec{e}_t = \vec{i}$).

Konačna jednačina kretanja (zakon puta) daje se jednačinom:

$$x = x(t),$$

a vektori brzine i ubrzanja tačke su:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= v\vec{i} = v_x\vec{i} = \dot{x}\vec{i}, \\ \vec{a} &= a\vec{i} = a_x\vec{i} = \dot{v}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

gdje su $v = v_x = \dot{x}$, $a = a_x = \dot{v} = \ddot{x}$ algebarska brzina i algebarsko ubrzanje (projekcije vektora brzine i ubrzanja na x-osu).

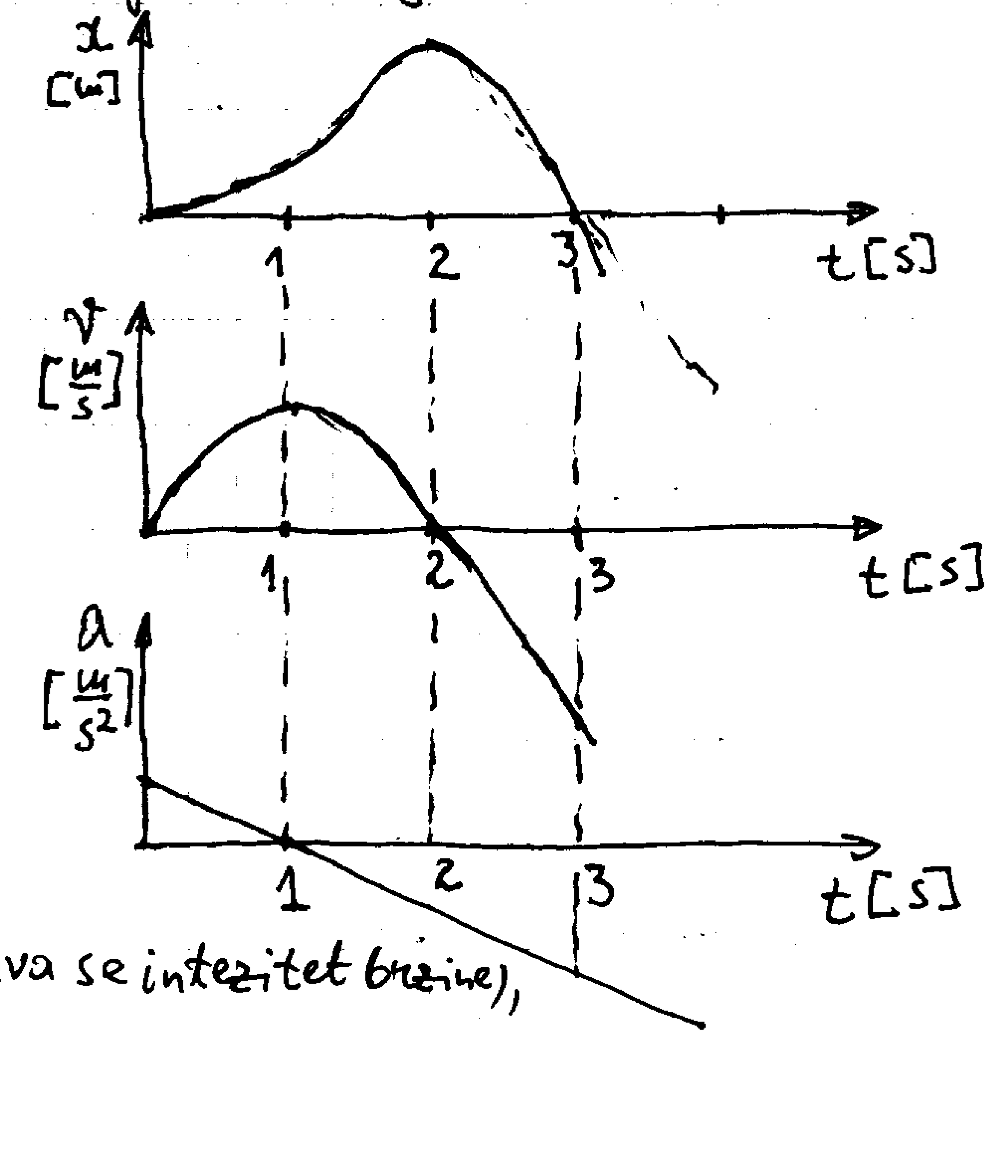
Dakle, kod pravolinijskog kretanja brzina i ubrzanje tačke padaju duž prave po kojoj se vrši kretanje.

Primjer 11. Konačna jednačina pravolinijskog kretanja tačke je $x = 3t^2 - t^3$ [m]. a) Odrediti brzinu i ubrzanje tačke i skicirati kinematičke dijagrame ($x-t$, $v-t$, $a-t$); b) Odrediti trenutak t^* u kom tačka mijenja smjer kretanja; c) Odrediti put koji će tačka preći za prve 3 sekunde kretanja; d) Odrediti intervale vremena tokom prvih 3 sekundi kretanja u kojima je kretanje ubrzano, odnosno usporeno.

a) $x = 3t^2 - t^3$;

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 6t - 3t^2;$$

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = 6 - 6t$$



b) $v(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = 2\,s$

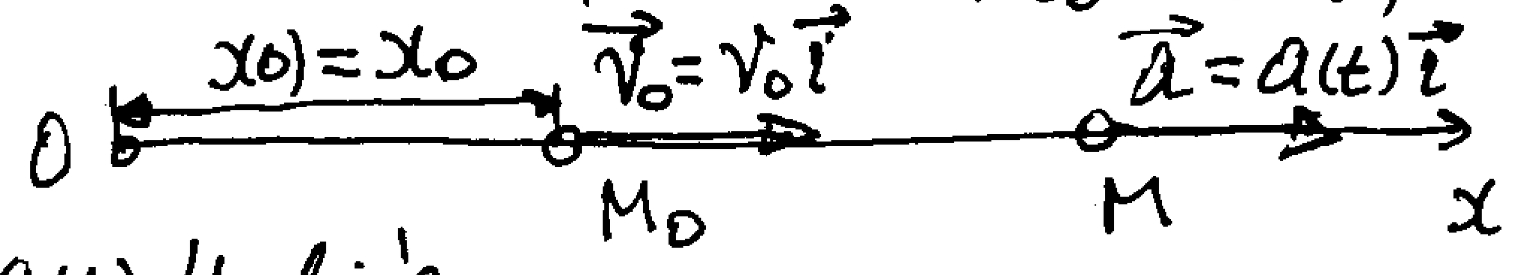
c) $L = |x(2) - x(0)| + |x(3) - x(2)| = 8\,m$

d) Ako je $va > 0$ (v i a istog znaka) kretanje je ubrzano, a ako je $va < 0$ (v i a različitog znaka) – usporeno. Slijedi, u intervalima vremena (0,1) i (2,3) kretanje je ubrzano (povećava se intezitet brzine), a usporeno u intervalu (1,2).

Inverzni zadatak

Kada je data konačna jednačina kretanja, kao u prethodnom primjeru, brzina i ubrzanje se određuju njenim diferenciranjem. Takav tip zadataka se zove direktni zadatak. S druge strane, ako je zadato ubrzanje tačke $a(t)$ (ili brzina $v(t)$), onda je za određivanje konačne jednačine kretanja potrebno primijeniti postupak obrnut postupku diferenciranja – integraciju. Ovaj tip zadataka se zove inverzni zadatak.

Neka je poznata promjena ubrzanja tokom vremena, $a = a(t)$, kao i položaj i brzina tačke u početnom trenutku vremena $t_0 = 0$: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ (tzv. početni uslovi).



Pošto je $a = \frac{dv}{dt}$, odnosno $dv = a(t)dt$, biće

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a(t)dt ,$$

odnosno

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt \qquad (30)$$

što predstavlja zakon promjene brzine.

U sledećem koraku je potrebno izvršiti integraciju izraza za brzinu, jer je $v = \frac{dx}{dt}$, odnosno $dx = v(t)\,dt$;

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v(t)dt ,$$

tj.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt \qquad (31)$$

što predstavlja konačnu jednačinu kretanja

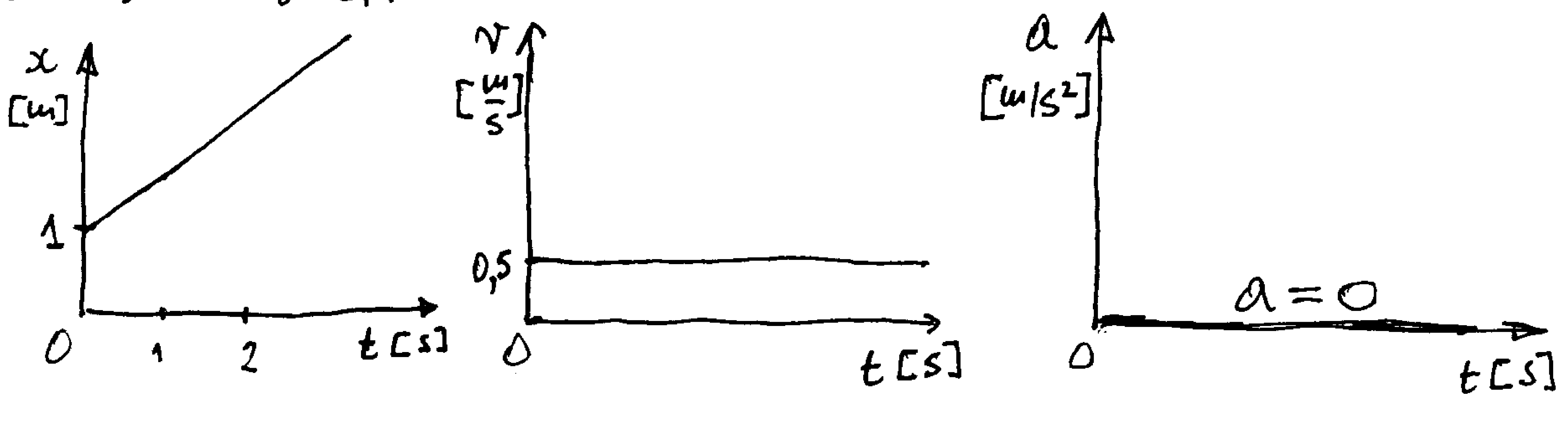
Specijalni slučajevi pravolinijskog kretanja

a) Jednoliko (ravnomjerno) kretanje ($v(t) = const = v_0 \Leftrightarrow a(t) \equiv 0$)

To je kretanje kod koga je brzina nepromjenljiva (konstantna). Na osnovu (31) je

$$x = x_0 + v_0 t \qquad (32)$$

Kinematički dijagrami za ovo kretanje kod je, recimo $x_0 = 1\,m$ i $v_0 = 0{,}5\,\frac{m}{s}$, prikazani su na slici:



Za jednoliko kretanje važi da tačka u jednakim vremenskim intervalima prelazi jednaka rastojanja (provjeriti!)

Jednakopromjenljivo kretanje ($a(t)=a=const$)

To je kretanje koje se vrši sa konstantnim ubrzanjem. Na osnovu (30) i (31) dobijaja se zakon promjene brzine

$$v = v_0 + at, \tag{33}$$

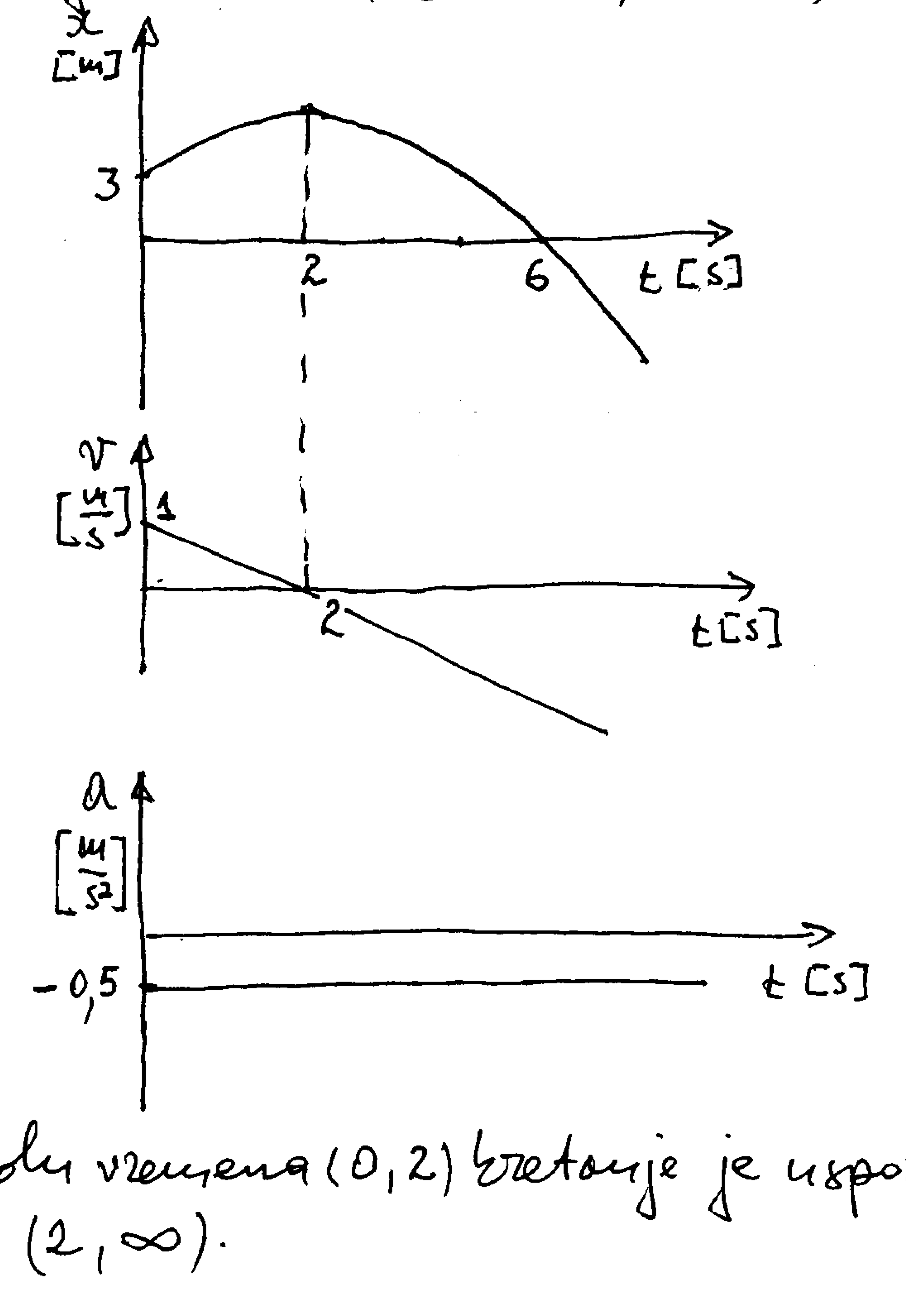
i konačna jednačina kretanja

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{34}$$

Za ovo kretanje važi da brzina tačke u jednakim vremenskim intervalima ima jednake priraštaje ($\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = a \cdot (t_2 - t_1)$).

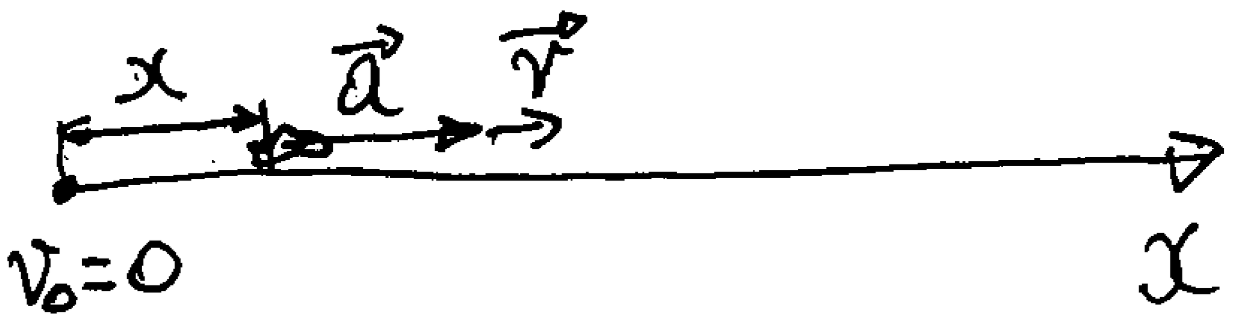
Naglasimo da na intervalima vremena na kojima su v i a istog znaka, kretanje je ubrzano, a u suprotnom – usporeno.

Na slici su dati kinematički dijagrami jednakopromjenljivog kretanja za slučaj kada je $x_0 = 3\,m$, $v_0 = 1\,m/s$, $a = -0{,}5\,m/s^2$.



Na intervalu vremena $(0,2)$ kretanje je usporeno, a ubrzano na intervalu $(2,\infty)$.

Primjer 12. Automobil se kreće pravolinijski konstantnim ubrzanjem $a = 2\ m/s^2$. Ako je početna brzina vozila jednaka nuli, koliko vremena je potrebno da automobil pređe prvi metar puta, a koliko za deseti metar puta? Kolika je brzina automobila na kraju desetog metra puta?



U pitanju je jednakoprozmjenljivo kretanje za koje važi

$$\left.\begin{aligned} v &= \cancel{v_0}^{0} + a t \\ x &= \cancel{x_0}^{0} + \cancel{v_0}^{0} t + a\frac{t^2}{2} \end{aligned}\right\} (*)$$

Neka su t_1, t_9, t_{10} - trenuci u kojima se automobil nalazi na kraju prvog, devetog i desetog metra puta. Tada je $t_1 - 0 = t_1$ vrijeme za koje automobil pređe prvi metar puta, a $t_{10} - t_9 = \Delta_{10}$ vrijeme potrebno ~~za~~ prelazak desetog metra puta.

$$x(t_1) = a\frac{t_1^2}{2}, \quad x(t_9) = a\frac{t_9^2}{2}, \quad x(t_{10}) = a\frac{t_{10}^2}{2}$$

$$x(t_1) = 1m, \quad x(t_9) = 9m, \quad x(t_{10}) = 10m$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2x(t_1)}{a}} = 1s}$$

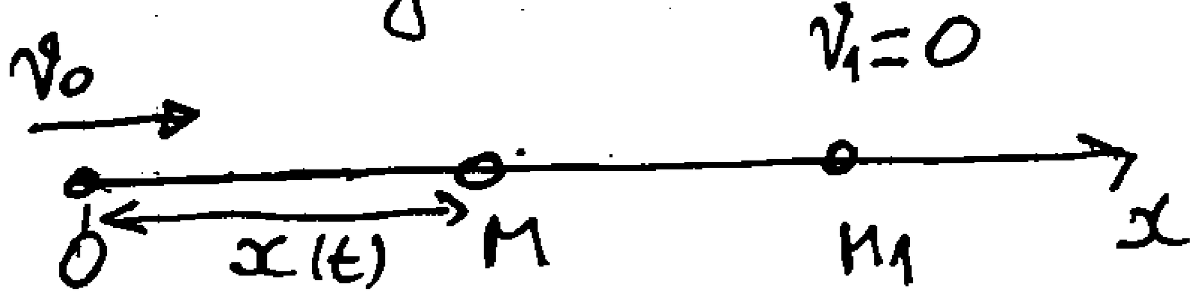
$$t_9 = \sqrt{\frac{2x(t_9)}{a}} = 3s; \quad t_{10} = \sqrt{\frac{2x(t_{10})}{a}} = \sqrt{10} = 3{,}162s$$

$$\boxed{\Delta_{10} = t_{10} - t_9 = 0{,}162\ s}$$

$$\boxed{v_{10} = v(t_{10}) = a \cdot t_{10} = 6{,}324\ \frac{m}{s}} \left(= 22{,}77\ \frac{km}{h}\right)$$

N. Ako iz (*) eliminišemo vrijeme t dobijamo $v = \sqrt{2ax}$ pa je, takođe, $v_{10} = \sqrt{2a\,x(t_{10})} = 6{,}324\ \frac{m}{s}$

Primjer 13. Voz, koji se kretao brzinom od $60\ \frac{km}{h}$, zaustavio se poslije 2 minuta od početka kočenja. Smatrajući da se voz za vrijeme kočenja kretao jednakousporeno, odrediti put kočenja.



Kretanje voza tokom kočenja posmatramo kao jednakopromjenljivo pravolinijsko kretanje tačke za koje važi:

$$v = v_0 + at,$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

gdje je $x_0 = 0$ ako uzmemo da x mjerimo od mjesta odakle počinje kočenje i $v_0 = 60\ \frac{km}{h} = 16,67\ \frac{m}{s}$.

Voz se zaustavlja u trenutku $t_1 = 2\ min = 120\ s$ (vrijeme mjerimo od početka kočenja) pa je $v(t_1) = 0$, tj

$$v_0 + at_1 = 0,$$

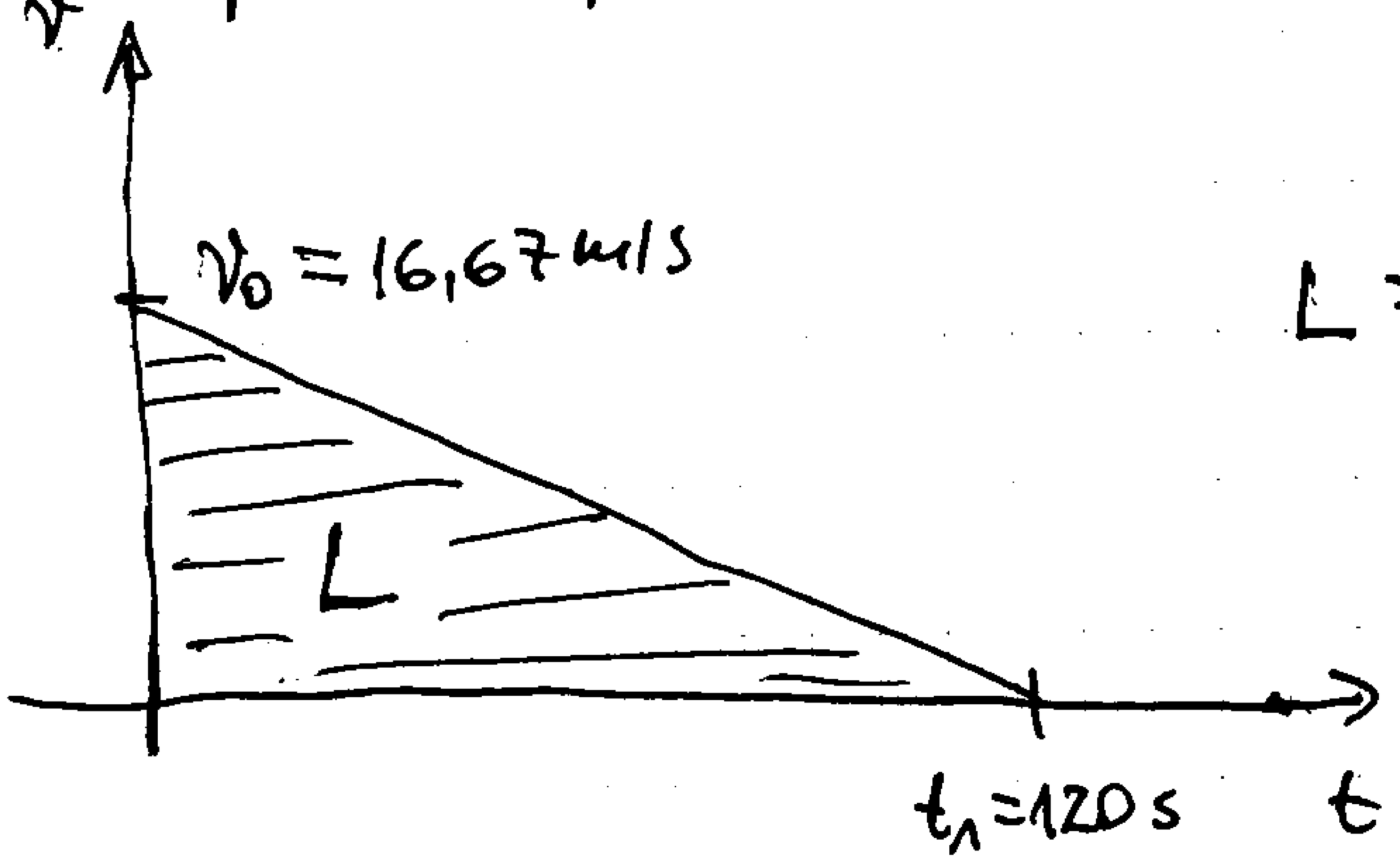
odakle nalazimo ubrzanje

$$a = -\frac{v_0}{t_1} \approx -0,139\ \frac{m}{s^2}$$

Pošto je $x_0 = 0$ i tokom kočenja ne dolazi do promjene smjera kretanja, put kočenja je

$$L = x(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = 16,67 \cdot 120 - \frac{1}{2}0,139 \cdot 120^2 = 999,6\ m \approx 1000\ m$$

Ili, znajući da se kod jednakopromjenljivog kretanja brzina linearno mijenja sa vremenom, na osnovu grafika promjene brzine određujemo pređeni put kao površinu šrafiranog trougla.



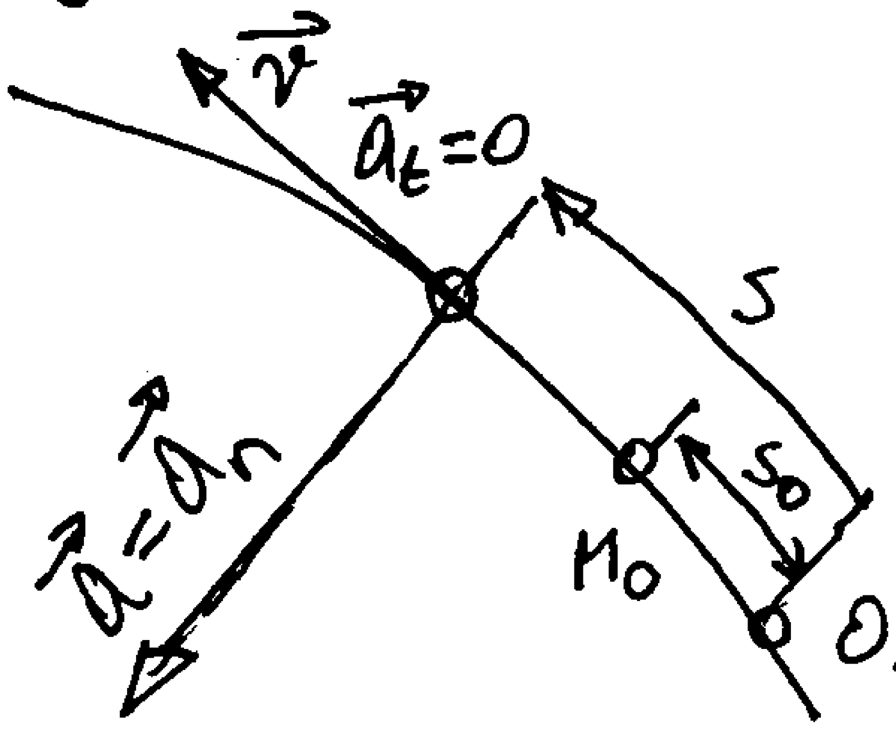
$$L = \frac{v_0 \cdot t_1}{2} \approx 1000\ m$$

1.6.2 Jednoliko i jednakopromjenljivo krivolinijsko kretanje

a) Jednoliko krivolinijsko kretanje ($v = const = v_0 \Leftrightarrow a_t = 0$)

Iz (18) slijedi zakon puta:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t} \qquad (35)$$



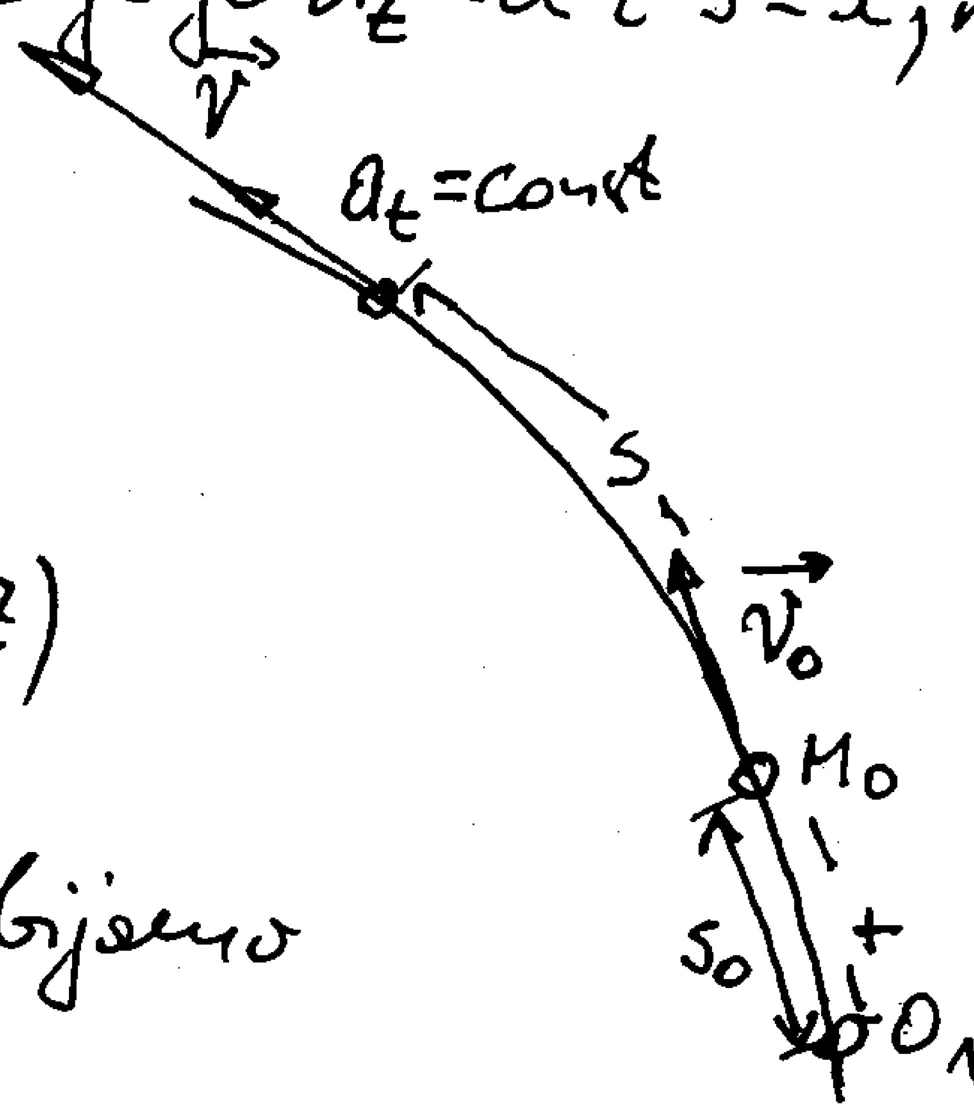
b) Jednakopromjenljivo krivolinijsko kretanje

To je kretanje kod koga je tangencijalno ubrzanje a_t konstantno ($a_t = const$). Pošto je $v = \frac{ds}{dt}$ i $a_t = \frac{dv}{dt}$, postupajući analogno kao kod jednakopromjenljivog pravolinijskog kretanja, za koje je $a_t = a$ i $s = x$, nalazimo zakon promjene brzine

$$\boxed{v = v_0 + a_t t} \qquad (36)$$

i zakon puta

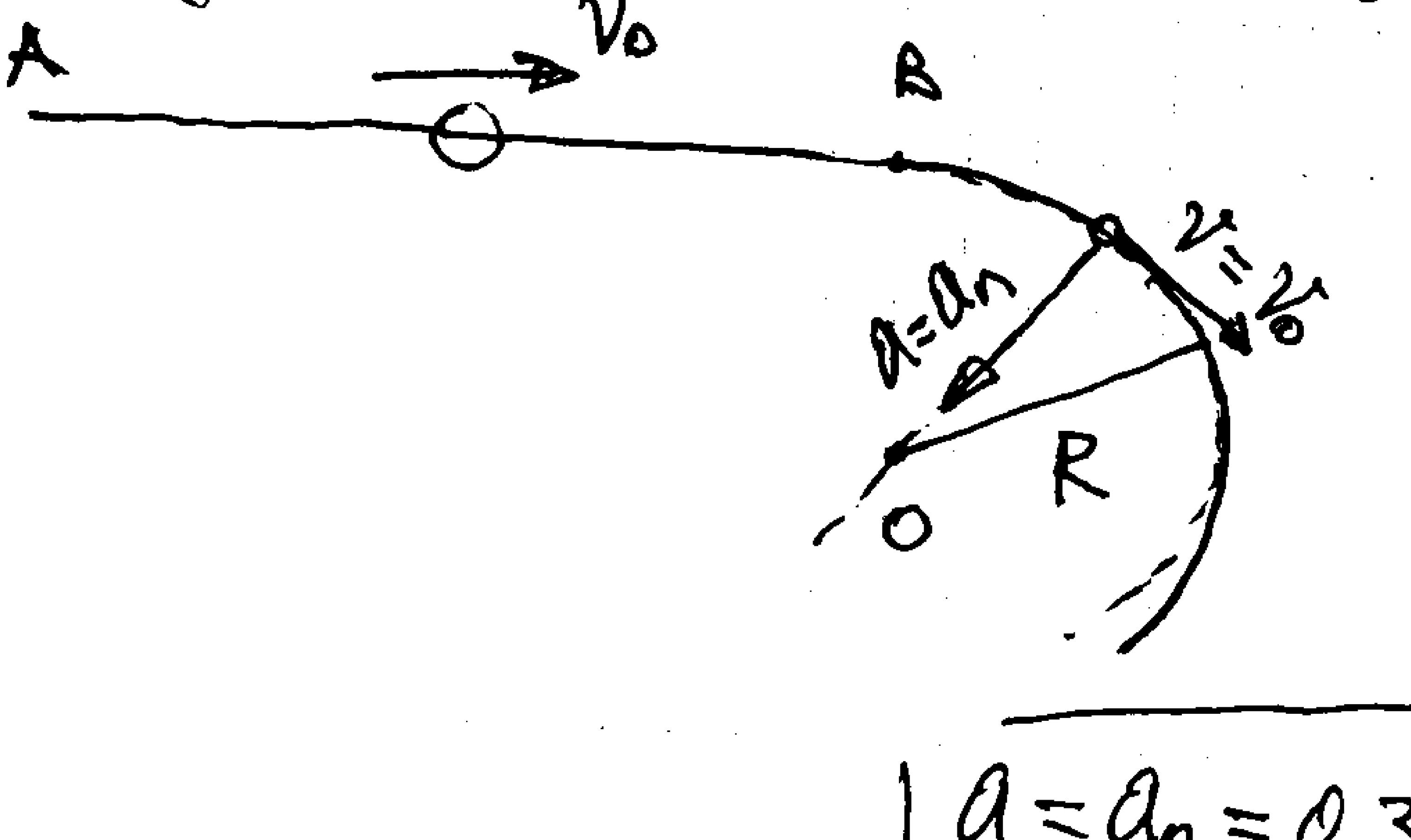
$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2} \qquad (37)$$



Eliminacijom vremena t iz (36) i (37) dobijemo

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2 a_t (s - s_0)} \qquad (38)$$

Primjer 14. Automobil se kreće duž pravolinijskog dijela puta AB jednoliko brzinom $v_0 = 70$ km/h. U položaju B prelazi na krivolinijski dio puta oblika kružnog luka poluprečnika $R = 1250$ m. Koliko je ubrzanje vozila na krivolinijskom dijelu trajektorije ako se zna da je nastavilo da se kreće bez promjene intenziteta brzine v_0?



$$1\,\frac{km}{h} = \frac{1000\,m}{60 \cdot 60\,s} = 0{,}278\,\frac{m}{s}$$

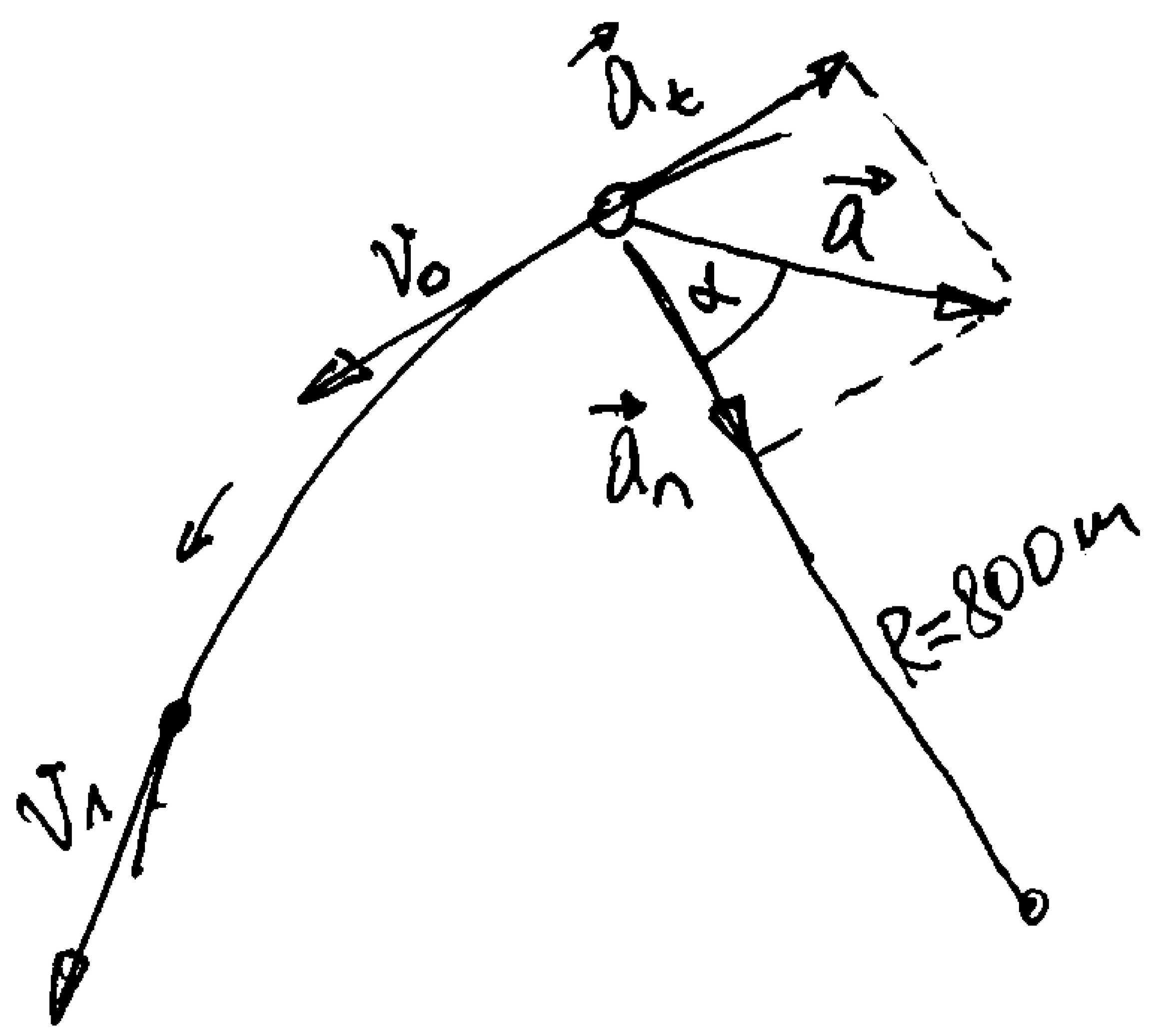
$$v_0 = 19{,}46\,\frac{m}{s}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{jer je } v = const = v_0$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{19{,}46^2}{1250} = 0{,}3\,\frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{a = a_n = 0{,}3\,\frac{m}{s^2}}$$

Primjer 15 Automobil se kretao brzinom od $100\,\frac{km}{h}$ po kružnom dijelu autoputa radijusa 800 m. Vozač je naglo pritisnuo kočnicu i nakon 8 sekundi brzina se smanjila na $75\,\frac{km}{h}$. Odrediti ubrzanje automobila odmah nakon pritiskanja kočnice smatrajući da je za vrijeme kočenja kretanje jednakousporeno.



Uzmimo da je $t_0=0$ na početku kočenja.

$$v_0 = 100\,\frac{km}{h} = 27{,}78\,\frac{m}{s}$$

$$v_1 = v(t_1) = 75\,\frac{km}{h} = 20{,}83\,\frac{m}{s}; \quad t_1 = 8\,s$$

Iz zakona promjene brzine kod jednako-promjenljivog kretanja

$$v = v_0 + a_t t,$$

dobijamo

$$v_1 = v_0 + a_t t_1,$$

odnosno, nalazimo tangencijalno ubrzanje

$$a_t = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = -0{,}87\,\frac{m}{s^2} \quad \text{(usporenje!)}$$

Normalno ubrzanje na početku kočenja je

$$a_n = \frac{v_0^2}{R} = 0{,}96\,\frac{m}{s^2}$$

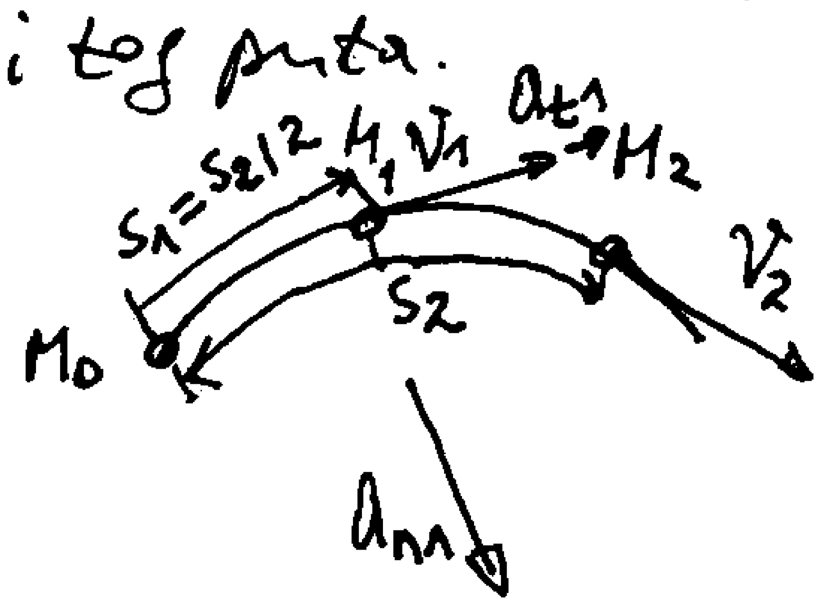
Intezitet ubrzanja je

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 1{,}3\,\frac{m}{s^2},$$

a pravac mu je određen uglom

$$\alpha = \arctan\frac{|a_t|}{a_n} = 42{,}2^\circ$$

Primjer 16. Kamion počinje da se kreće jednakoubrzano po kružnoj krivini poluprečnika R = 800 m i kada pređe put dužine 60 m dostigne brzinu od 36 km/h. Odrediti intezitete brzine i ubrzanja kamiona na sredini tog puta.



$v_0 = 0$, za $s = s_2 = 60\,m$ je $v = v_2 = 36\,\frac{km}{h} = 10\,\frac{m}{s}$

za $s = s_1$, $v = v_1$? $a = a_1 = ?$

$$\text{Iz (38)} \xrightarrow{v_0=0,\, s_0=0} v^2 = 2a_t s \rightarrow a_t = \frac{v_2^2}{2s_2} = 0{,}83\,\frac{m}{s^2}$$

$$v_1 = \sqrt{2a_t s_1} \overset{s_1=s_2/2}{=\!=} \boxed{7{,}06\,\frac{m}{s}}$$

$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{R} = 0{,}06\,\frac{m}{s^2}; \quad a_{t1} = a_t = \text{const}, \quad a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{t1}^2} \approx \boxed{0{,}832\,\frac{m}{s^2}}$$