2. Kinematika krutog tijela

Tijelo je kruto ako je rastojanje između ma koje dvije njegove tačke nepromjenljivo (konstantno) tokom kretanja.

Pod položajem krutog tijela u prostoru podrazumijeva se položaj svih tačaka tijela u odnosu na utvrđeni sistem referencije. Da bi se odredio položaj svih tačaka tijela, zbog nepromjenljivosti njihovih međusobnih rastojanja, tj. nepromjenljivosti geometrijskog oblika tijela, dovoljno je pomoću izvjesnih geometrijskih parametara (koordinata) odrediti položaj tijela kao cjeline.

Broj nezavisnih parametara koji jednoznačno određuju položaj tijela u prostoru zove se broj stepena slobode datog tijela, a ti parametri se zovu generalisane koordinate tijela.

Napomenimo, da se na isti način definiše i broj stepena slobode tačke. Tako, npr., slobodna tačka u prostoru (tačka koja može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru) ima tri stepena slobode jer je njen položaj određen sa tri nezavisna parametra – tri Dekartove koordinate.

U kinematici krutog tijela rješavaju se dva osnovna zadatka:

1) Definisanje položaja krutog tijela u odnosu na izabrani sistem referencije;

2) Određivanje kinematičkih karakteristika krutog tijela kao cjeline i svake tačke tijela posebno.

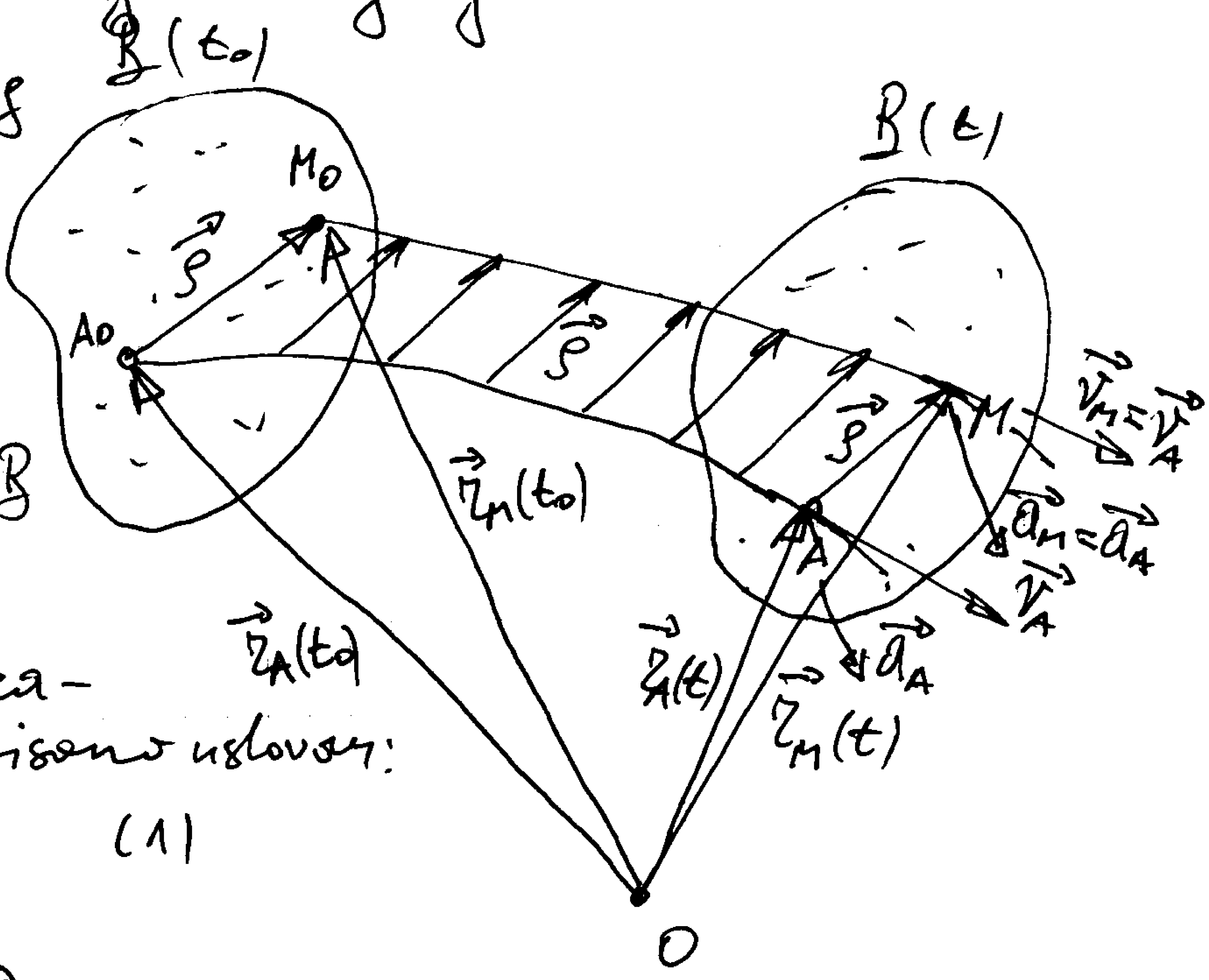
Dalje ćemo razmatrati sledeće tri vrste kretanja krutog tijela:

a) Translatorno kretanje;

b) Obrtanje oko nepokretne ose;

c) Ravansko kretanje krutog tijela.

2.1 Translatorno kretanje krutog tijela



Translatorno kretanje krutog tijela je takvo kretanje pri kome bilo koja duž uočena u tijelu ostaje paralelna sama sebi tokom čitavog kretanja.

Posmatrajmo pokretno tijelo $\mathcal{B}$ u početnom $t_0=0$ i proizvoljnom trenutku t i uočimo u tijelu dvije proizvoljne tačke A i M. Translatorno kretanje je okarakterisano uslovom:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A_0M_0}=\vec\rho=\overrightarrow{const} \qquad (1)$$

Pošto je

$$\vec r_M(t)=\vec r_A(t)+\vec\rho, \quad \vec\rho=\overrightarrow{const} \qquad (2)$$

to se putanja tačke M dobija tako što se svaka tačka putanje tačke A pomjeri za konstantni vektor $\vec\rho=\overrightarrow{A_0M_0}$. Znači, putanje svih tačaka tijela su podudarne (kongruentne) linije, a prema obliku tih putanja razlikujemo pravolinijsku i krivolinijsku translaciju.

Diferencirajući lijevu i desnu stranu relacije (2) po vremenu, dobijamo

$$\frac{d\vec r_M}{dt}=\frac{d\vec r_A}{dt}+\frac{d\vec\rho}{dt},$$

odnosno

$$\boxed{\vec v_M=\vec v_A} \qquad (3)$$

jer je $\frac{d\vec\rho}{dt}=0$ $(\vec\rho=\overrightarrow{const})$.

Takođe, iz (3) slijedi $\frac{d\vec v_M}{dt}=\frac{d\vec v_A}{dt}$, odnosno

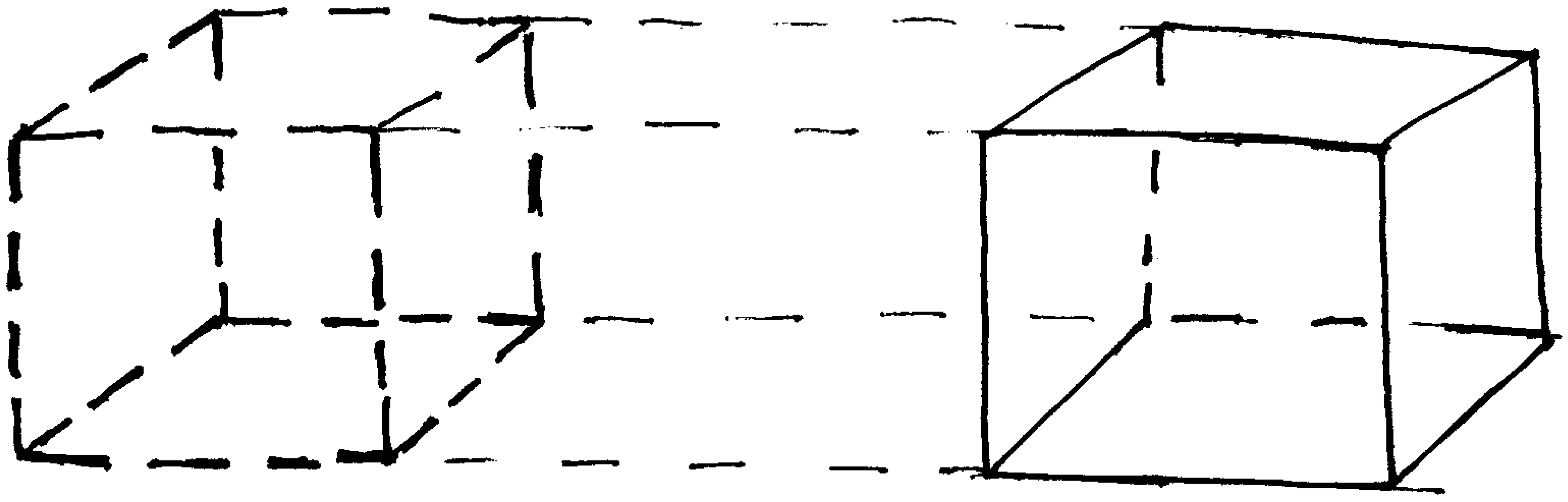
$$\boxed{\vec a_M=\vec a_A} \qquad (4)$$

Prema tome, pri translatornom kretanju krutog tijela sve tačke tijela se kreću na istovjetan način, tj. imaju podudarne putanje i jednake vektore brzine i ubrzanja. To znači da je translatorno kretanje krutog tijela potpuno određeno kretanjem samo jedne njegove tačke, recimo tačke A, pa konačne jednačine kretanja te tačke

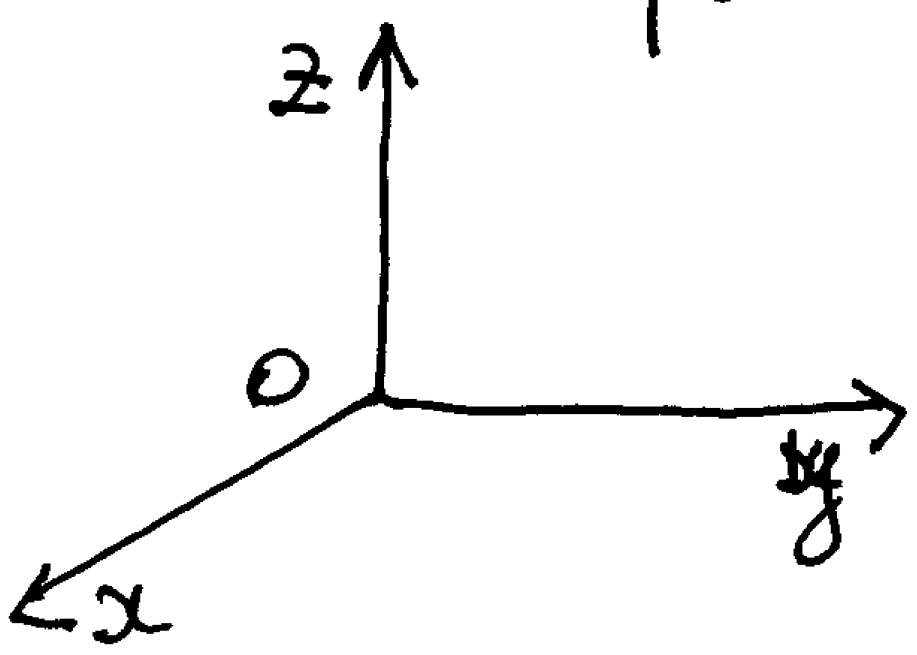
$$x_A=x_A(t), \quad y_A=y_A(t), \quad z_A=z_A(t) \qquad (5)$$

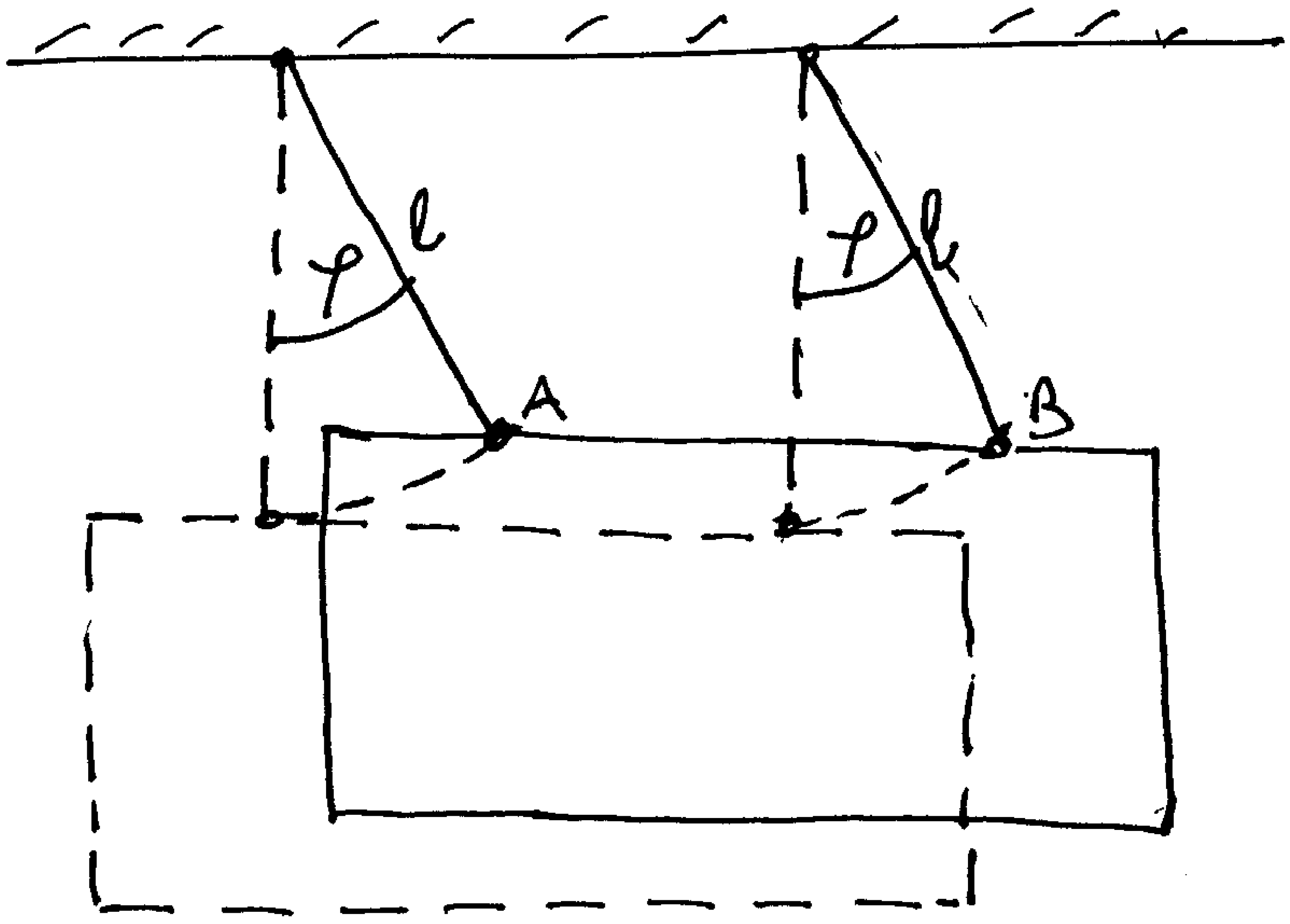
su istovremeno i konačne jednačine (zakon kretanja) kretanja datog tijela. Tijelo koje može da se kreće translatorno slobodno u prostoru ima tri stepena slobode.

Pošto kod translatornog kretanja sve tačke tijela imaju jednake brzine i jednaka ubrzanja, može se govoriti brzina i ubrzanje tijela.



pravolinijska translacija

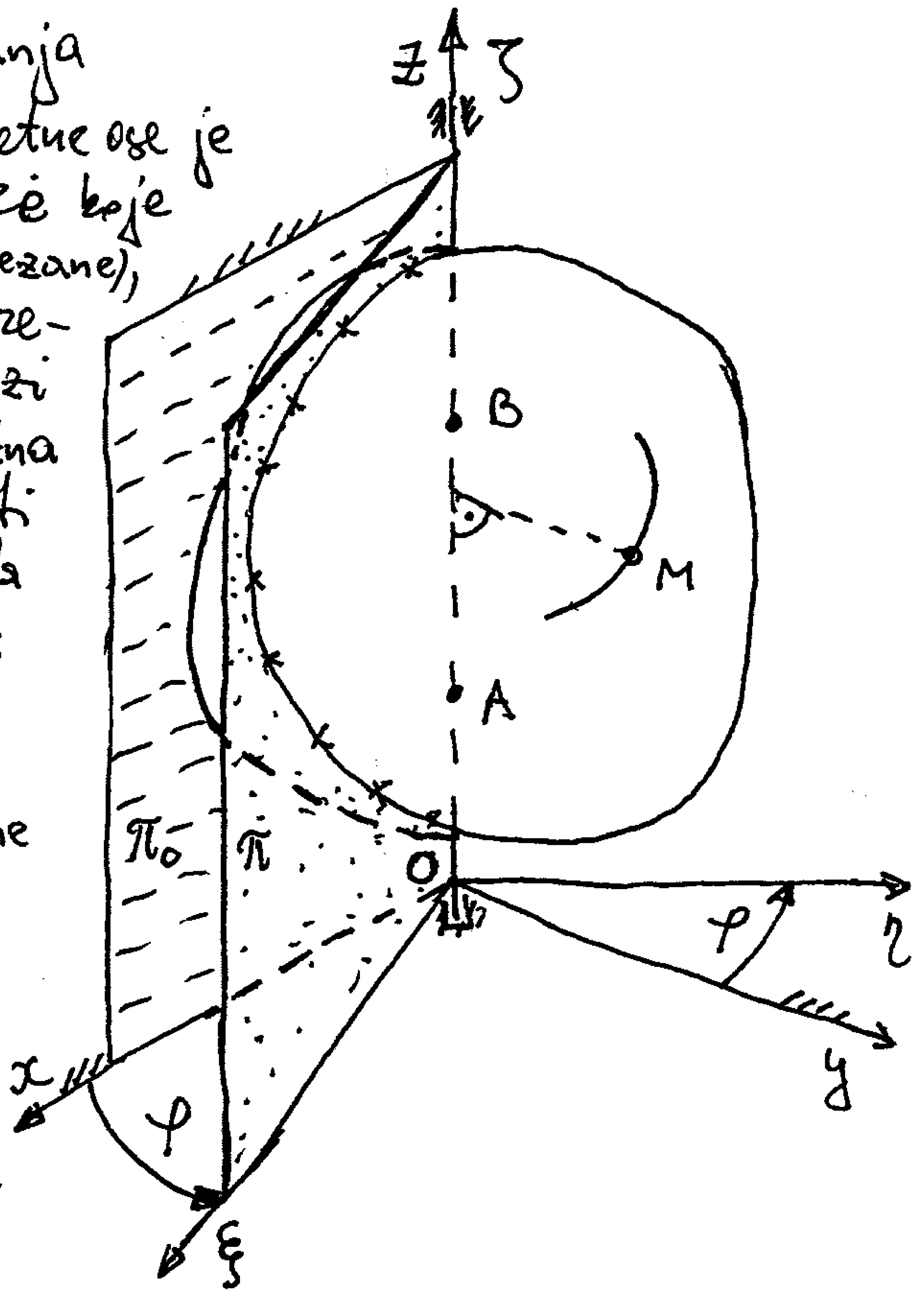




krivolinijska translacija

2.2. Obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose

2.2.1 Konačna jednačina obrtanja



Obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose je takvo kretanje pri kome dvije tačke koje pripadaju tijelu (ili su sa njim čvrsto vezane), recimo A i B, ostaju za vrijeme kretanja nepokretne. Prava koja prolazi kroz nepokretne tačke A i B zove se obrtna osa (osa rotacije). Zbog nepromjenljivosti rastojanja između tačaka krutog tijela očigledno je da će pri ovom kretanju:

- sve tačke koje pripadaju obrtnoj osi biti nepokretne;
- sve ostale tačke tijela imaće kružne putanje u ravnima upravnim na osu obrtanja i čiji centri leže na toj osi.

Pri ovom kretanju položaj tijela u svakom trenutku je određen ako se zna ugao φ između dvije ravni, koje prolaze kroz obrtnu osu, od kojih je jedna π čvrsto vezana za tijelo a druga π_0 nepokretna u prostoru. Da bismo utvrdili orjentaciju ugla φ usvajamo nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ (Oz - osa rotacije, koordinatna ravan Oxz se poklapa sa ravni π_0) i pokretni $O\xi\eta\zeta$ čvrsto vezan za tijelo ($O\zeta \equiv Oz$, koordinatna ravan $O\xi\zeta$ se poklapa sa ravni π). Ugao φ smatramo pozitivnim ako on raste u smjeru suprotnom od smjera obrtanja kazaljke na satu, gledano sa vrha ose Oz, odnosno $O\zeta$.

Prema tome, položaj krutog tijela pri obrtanju oko nepokretne ose određen je jednim nezavisnim parametrom (koji predstavlja takozvanu generalisanu koordinatu tijela) – uglom obrtanja φ. Kaže se da u ovom slučaju tijelo ima jedan stepen slobode, tj. može da vrši samo jedno nezavisno kretanje.

Zadata zavisnost ugla obrtanja φ u funkciji vremena,

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (1)$$

predstavlja zakon obrtanja, odnosno konačnu jednačinu obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose.

Sve kinematičke karakteristike obrtanja tijela oko ose se izračunavaju pomoću zakona obrtanja, a one se dijele na:

- globalne, koje su iste za sve tačke tijela;
- lokalne, koje zavise od položaja tačke u tijelu.

2.2.2 Globalne karakteristike obrtanja tijela (ugaona brzina i ugaono ubrzanje)

Neka je $\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$ priraštaj ugla obrtanja tijela za konačan vremenski interval Δt. Srednja ugaona brzina tijela se definiše kao

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (1)$$

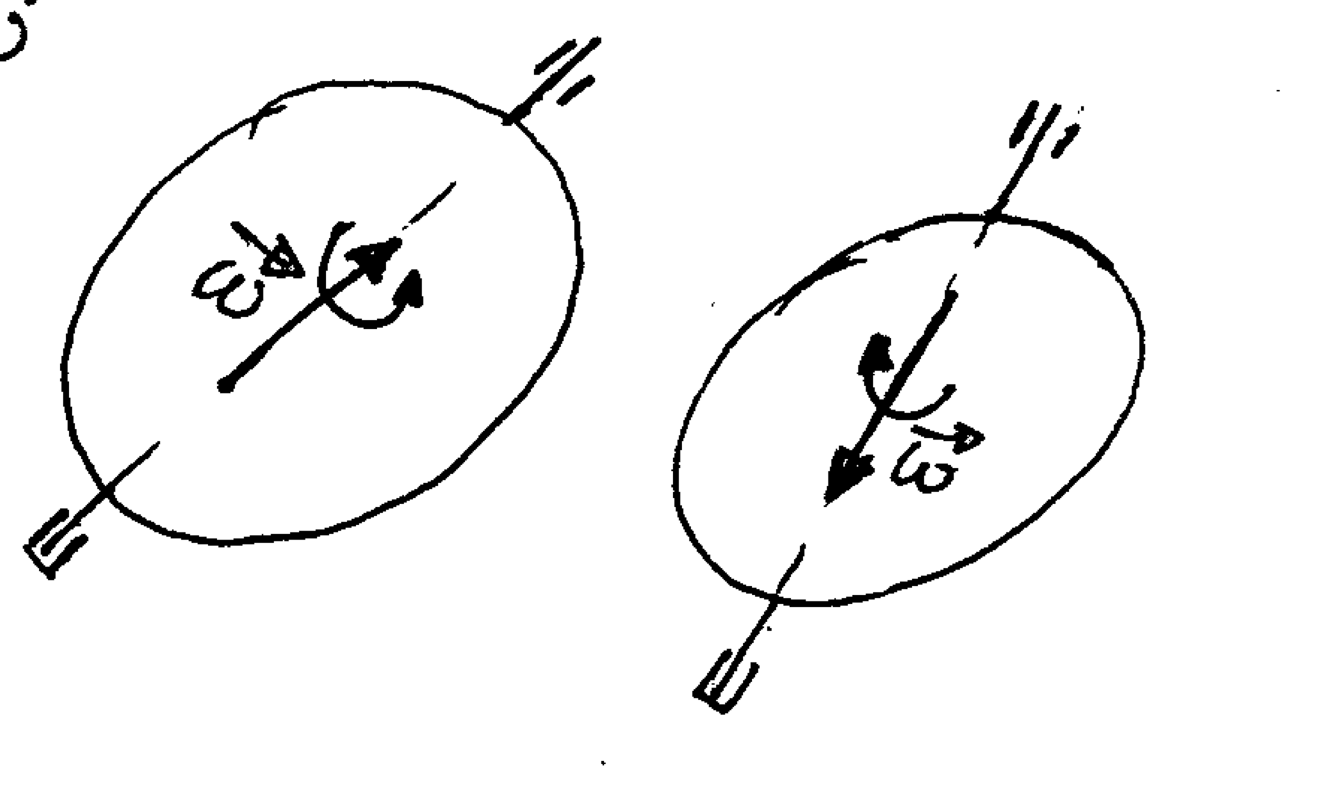
i ima dimenziju $[\omega] = [rad/s] = [s^{-1}]$, jer je radijan bezdimenziona mjera ugla.

Trenutna ugaona brzina tijela ω (ili samo ugaona brzina) je granična vrijednost srednje ugaone brzine kada priraštaj vremena teži ka nuli, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad (2)$$

ili, drugim riječima, ugaona brzina ω krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose brojčano je jednaka prvom izvodu ugla obrtanja po vremenu. Iz (2) se vidi da je veličina ω takođe jednaka odnosu elementarnog ugla obrtanja $d\varphi$ i infinitezimalnog vremenskog intervala dt. Znakom veličine ω određen je smjer obrtanja tijela. Ako je $\omega > 0$, priraštaj ugla obrtanja, gledano sa vrha ose Oz, je pozitivan (pozitivno obrtanje), a ako je $\omega < 0$ priraštaj ugla obrtanja je negativan (negativno obrtanje).

Najpogodnije je, kao cjelokupnu karakteristiku obrtanja tijela, uvesti vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$: to je vektor čiji je intezitet jednak intezitetu ugaone brzine ($|\omega| = |\dot{\varphi}|$), pravac mu se poklapa sa pravcem obrtne ose, a smjer mu je takav da obrtanje gledano sa njegovog vrha ima smjer suprotan smjeru obrtanja kazaljke na satu. Znači, vektorom ugaone brzine $\vec{\omega}$ određeni su u isto vrijeme intezitet ugaone brzine, obrtna osa i smjer obrtanja.



N. U tehnici se često koristi tehnička ugaona brzina n (tzv. broj obrta u minutu) koja je sa ugaonom brzinom ω vezana relacijom: $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$,

pri čemu je jedinica tehničke ugaone brzine ob/min (obrt u minuti).

Ugaono ubrzanje karakteriše promjenu ugaone brzine tijela tokom vremena. Ako se za vremenski interval Δt ugaona brzina tijela promijeni za $\Delta\omega$, onda se srednje ugaono ubrzanje za taj vremenski interval definiše kao

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (3)$$

i ima dimenziju $[\varepsilon] = [rad/s^2] = [s^{-2}]$.

Trenutno ugaono ubrzanje (ili samo ugaono ubrzanje) tijela je granična vrijednost srednjeg ugaonog ubrzanja kada priraštaj vremena Δt teži nuli, tj.

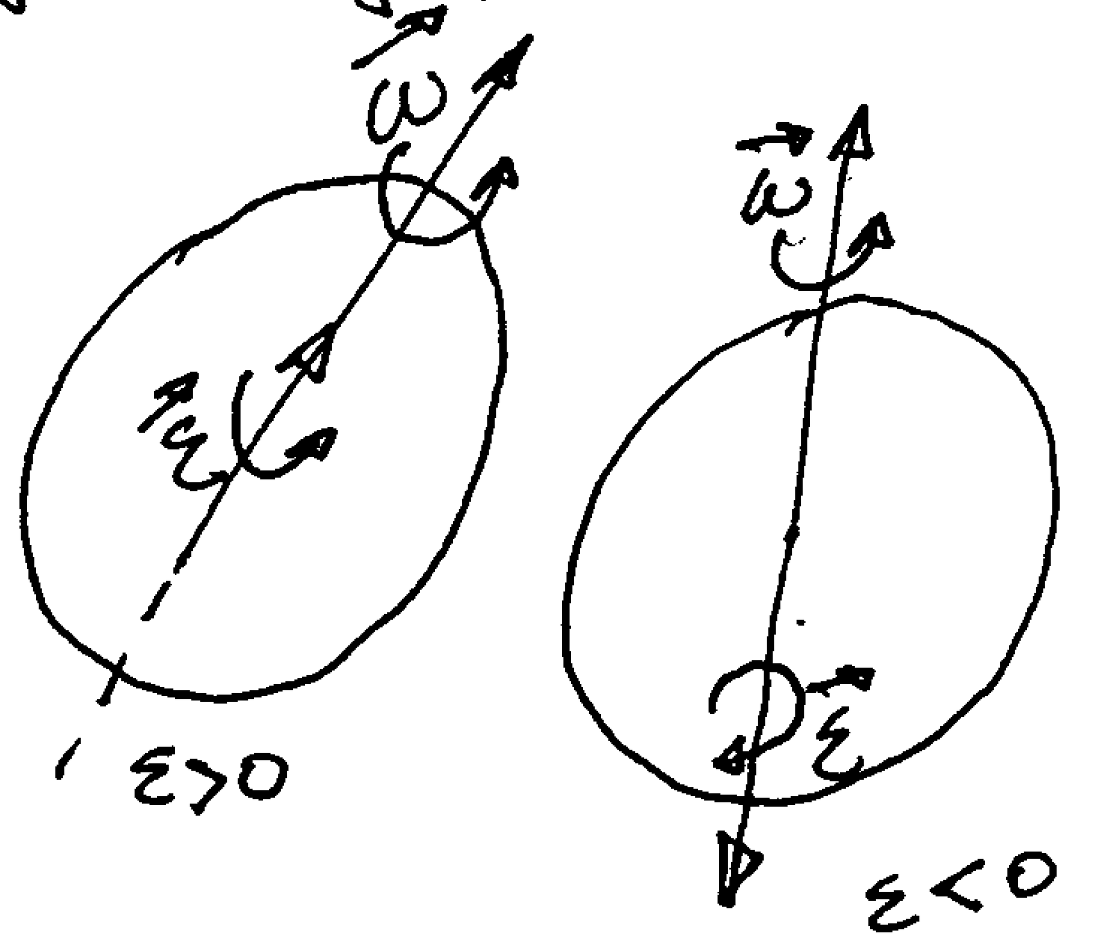
$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

ili, uzimajući u obzir (2)

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \qquad (4)$$

Znači, ugaono ubrzanje tijela u datom trenutku brojčano je jednako prvom izvodu ugaone brzine ili drugom izvodu ugla obrtanja po vremenu.

Ako se intezitet ugaone brzine tokom vremena povećava, obrtanje tijela naziva se ubrzanim, a ako se smanjuje - usporenim. Obrtanje će biti ubrzano kada su veličine ε i ω istog znaka ($\varepsilon \cdot \omega > 0$) a usporeno kada su ove veličine različitog znaka ($\varepsilon \cdot \omega < 0$).



Ugaono ubrzanje, analogno ugaonoj brzini, možemo prikazati preko vektora ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ koji leži na nepokretnoj osi obrtanja a smjer mu je isti kao i ugaone brzine u slučaju ubrzanog obrtanja, odnosno suprotan u slučaju usporenog kretanja. Ova veza vektora ugaonog ubrzanja i ugaone brzine kratko se iskazuje na sledeći način:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \qquad (5)$$

Specijalni slučajevi obrtanja tijela oko nepokretne ose

a) Ravnomjerno (jednoliko) obrtanje: $\boxed{\omega = const}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow d\varphi = \omega dt \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt \; ; \quad \varphi_0 = \varphi(0) \text{ - početna veličina ugla obrtanja (često je } \varphi_0 = 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \omega t + \varphi_0} \text{ - zakon jednolikog obrtanja} \qquad (6)$$

b) Ravnomjerno ~~jednoliko~~ promjenljivo (jednako promjenljivo) obrtanje: $\boxed{\varepsilon = const}$

Neka je u početnom trenutku $t_0 = 0$: $\varphi(0) = \varphi_0$, $\omega(0) = \omega_0$

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \Rightarrow d\omega = \varepsilon dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t} \text{ - zakon promjene ugaone brzine} \qquad (7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2} \text{ - konačna jednačina (zakon) ravnomjerno promjenljivog obrtanja} \qquad (8)$$

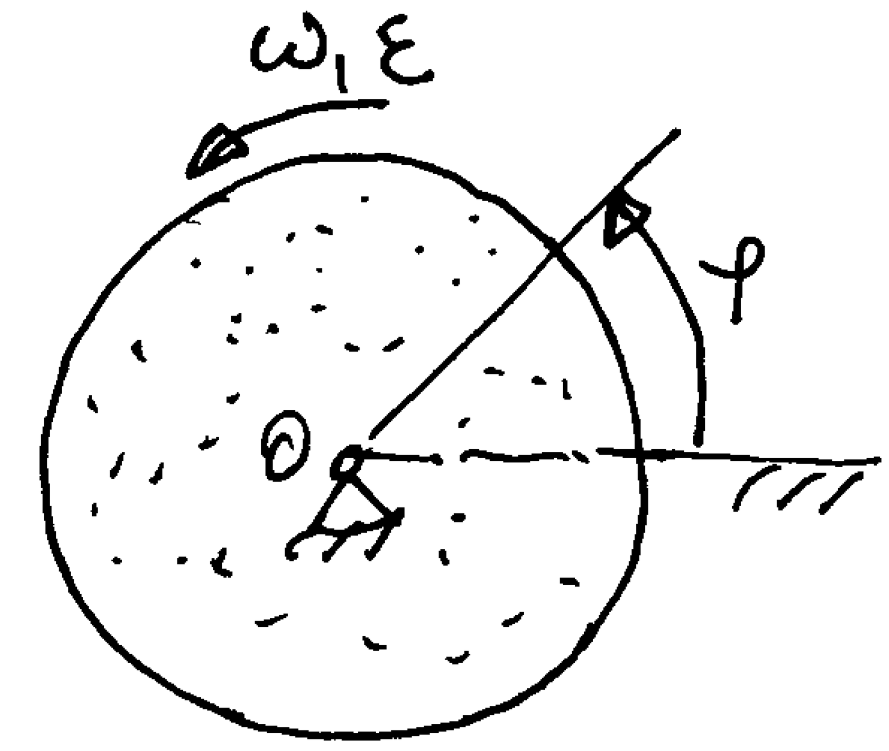
Ako su ω i ε istog znaka obrtanje je ravnomjerno (jednako) ubrzano, a ako su suprotnog znaka - ravnomjerno usporeno.

Takođe, eliminacijom vremena iz (7) i (8) dobijemo

$$\boxed{\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0)}. \qquad (8)$$

Primjer 1. Disk se obrće oko nepokretne ose po zakonu

$$\varphi = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3, \quad \varphi[\text{rad}], \; t[\text{s}].$$



a) Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska u trenutku $t_1 = 3\,\text{s}$, kao i broj obrtaja diska za to vrijeme.

b) Koliko protekne vremena do zaustavljanja diska?

a) $(\circlearrowleft +) \quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 4t - t^2$

$(\circlearrowleft +) \quad \varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 4 - 2t$

Za $t = t_1 = 3\,\text{s}$: $\omega = 3\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\varepsilon = -2\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, tj $\varepsilon = 2\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

$\varphi(t_1) = 9\,\text{rad}$; $N = \dfrac{\varphi(t_1)}{2\pi} = 1{,}43$ obrta

b) $\omega(t^*) = 0 \rightarrow 4t^* - t^{*2} = 0 \rightarrow \boxed{t^* = 4\,\text{s}}$

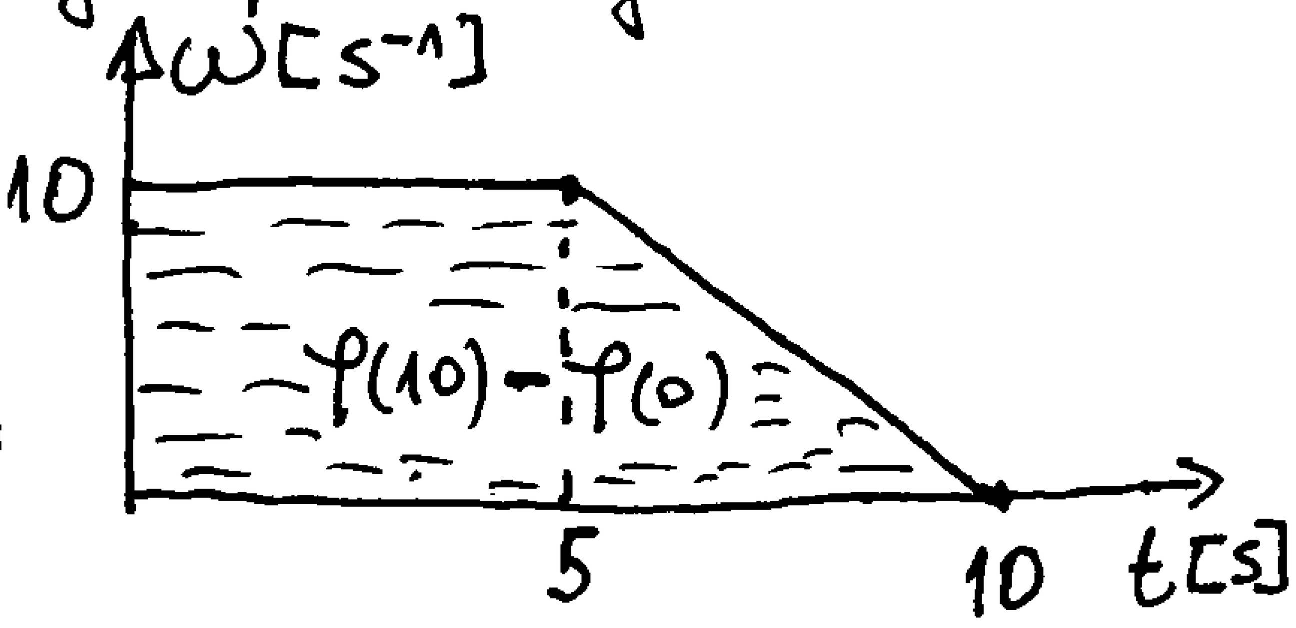
Primjer 2. Polazeći iz mira disk se obrće jednakopromjenljivo i za 5 s dostiže ugaonu brzinu od $10\,\text{s}^{-1}$. Koliko je ugaono ubrzanje diska i koliko disk napravi obrtaja za 10 s od početka kretanja.

Za jednakopromjenljivo kretanje je

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t \quad \text{i} \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon\frac{t^2}{2}, \quad \varepsilon = \text{const}.$$

U našem slučaju je $\omega_0 = 0$ (kretanje počelo iz mira) i možemo uzeti da je $\varphi_0 = 0$.
Kako je prema uslovu zadatka $\omega(5) = 10$, dobijamo $\boxed{\varepsilon = 2\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}}$.
Sada je $\varphi(t) = \varepsilon\dfrac{t^2}{2} = t^2$ i $\varphi(10) = 100\,\text{rad}$, odnosno $N = \dfrac{\varphi(10)}{2\pi} = 15{,}9$ obrta.

Primjer 3. Zakon promjene ugaone brzine tijela prikazan je na slici. Kolika je srednja ugaona brzina tijela?



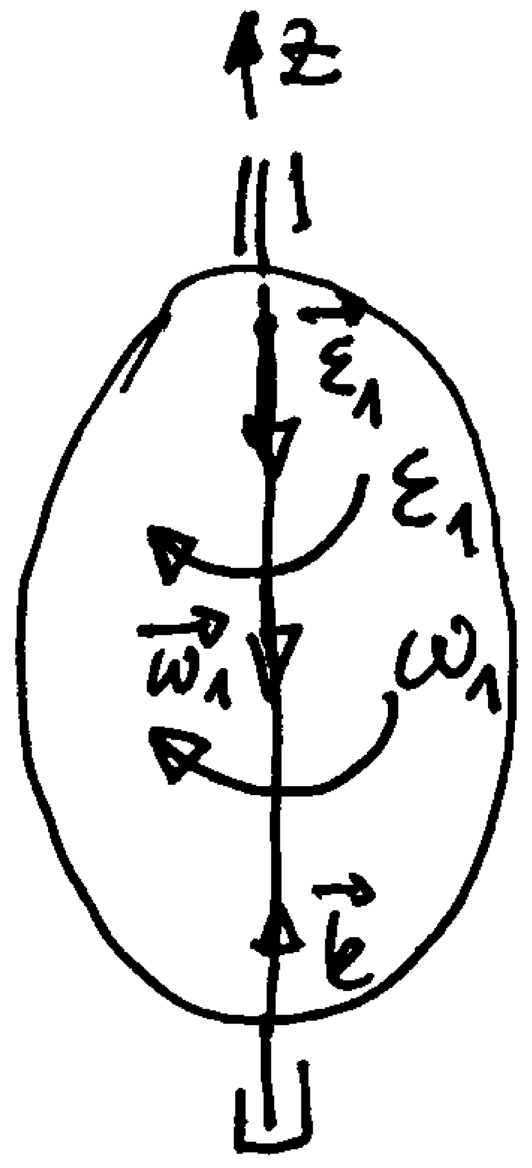
$\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \rightarrow d\varphi = \omega\,dt \rightarrow \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega(t)\,dt$

$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \displaystyle\int_0^t \omega(t)\,dt, \quad \varphi_0 = \varphi(0)$

$\varphi(10) - \varphi_0 = \underbrace{\displaystyle\int_0^{10} \omega(t)\,dt}_{\text{šrafirana površina na sl.}} = 5\cdot 10 + 5\cdot 10/2 = 75\,\text{rad}$

$\omega_{sr} = \dfrac{\varphi(10) - \varphi(0)}{10} = 7{,}5\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

Primjer 4. Tijelo se obrće po zakonu $\varphi = t^3 - 3t^2$ ($t[s]$, $\varphi[rad]$).
Odrediti da li se tijelo obrće ubrzano ili usporeno u trenutku $t_1 = 0{,}5\,s$.



$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 - 6t,$$

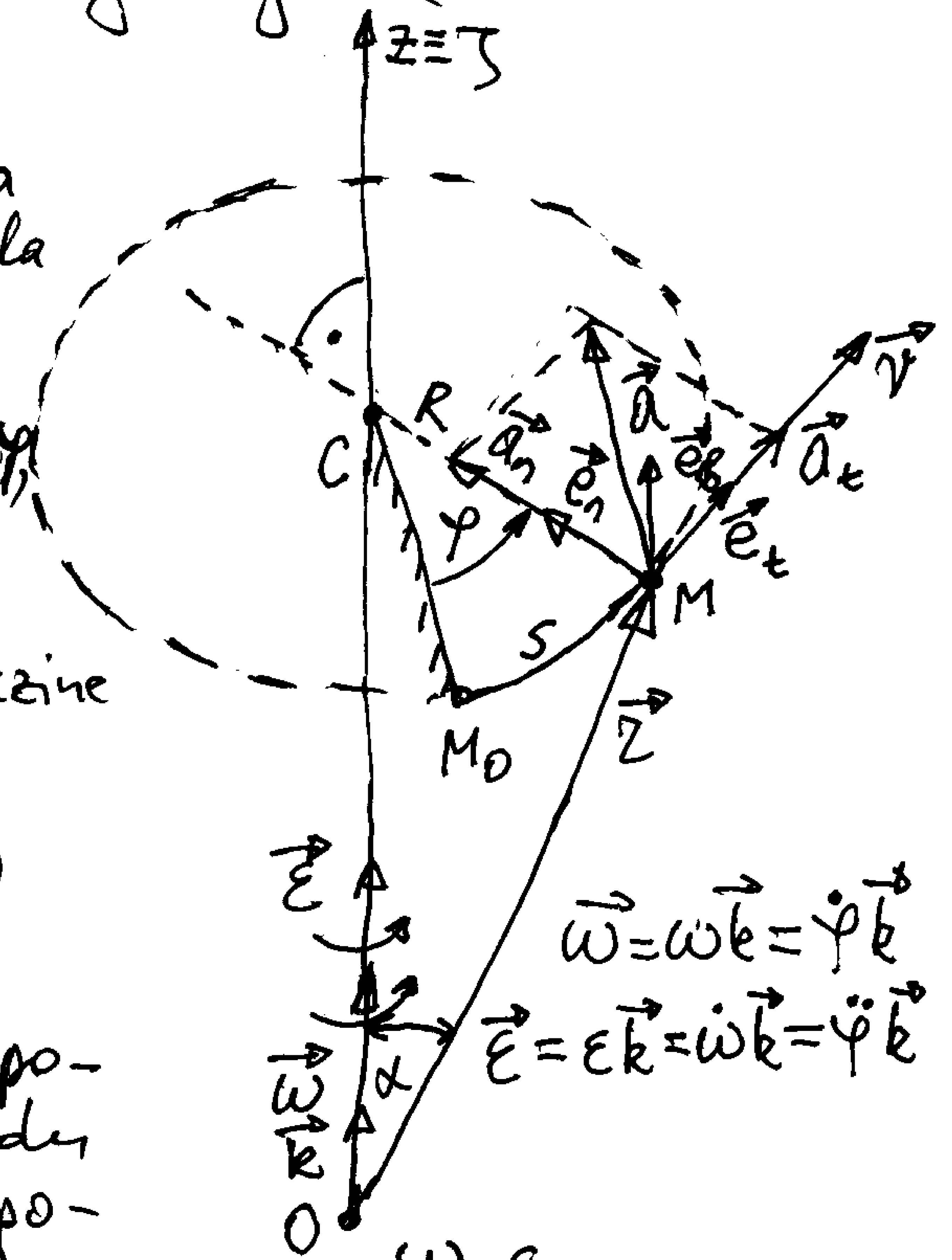
$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 6t - 6$$

$$\omega_1 = \omega(t_1) = -2{,}25\ s^{-1}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1) = -3\ s^{-2}$$

$$\omega_1 \cdot \varepsilon_1 = 6{,}75 > 0 \Rightarrow \text{ubrzano obrtanje}$$

2.2.3 Lokalne karakteristike obrtanja tijela (brzine i ubrzanja tačaka tijela)

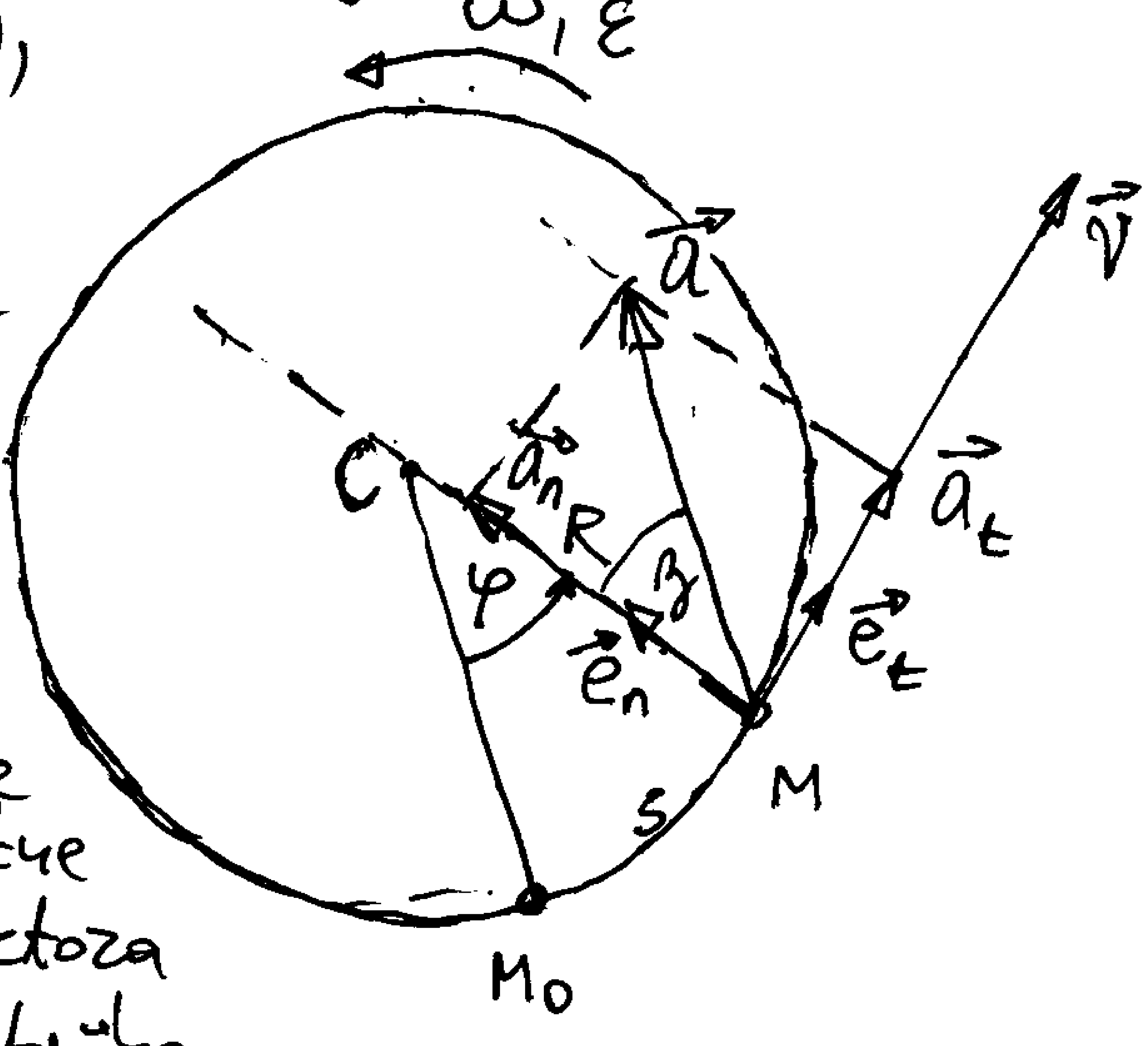


Uočimo neku tačku M tijela koja se nalazi na rastojanju R od obrtne ose z. Pri obrtanju tijela ova tačka opisuje kružnicu poluprečnika R čiji se centar C nalazi u tački prodora ose z kroz ravan kružnice. Kada se tijelo obrne za ugao φ, tačka M opiše luk koji je, mjeren od početnog položaja M_0, jednak $s = R\varphi$. Pošto je ovo zakon puta ($\varphi = f(t)$) tačke M, projekcija njene brzine na tangentu kružne putanje iznosi

$$\boxed{v = \dot{s} = R\omega,} \qquad (1)$$

gdje je $\omega = \dot{\varphi}$ ugaona brzina tijela.

Brzina neke tačke tijela koja se obrće oko nepokretne ose po intenzitetu je jednaka proizvodu intenziteta ugaone brzine tijela i rastojanja posmatrane tačke od obrtne ose ($|v| = R\,|\omega|$), a usmjerena je duž tangente na kružnu putanju u stranu obrtanja tijela.



Vektor brzine $\vec{v}$ neke tačke tijela može se odrediti Ojlerovom formulom:

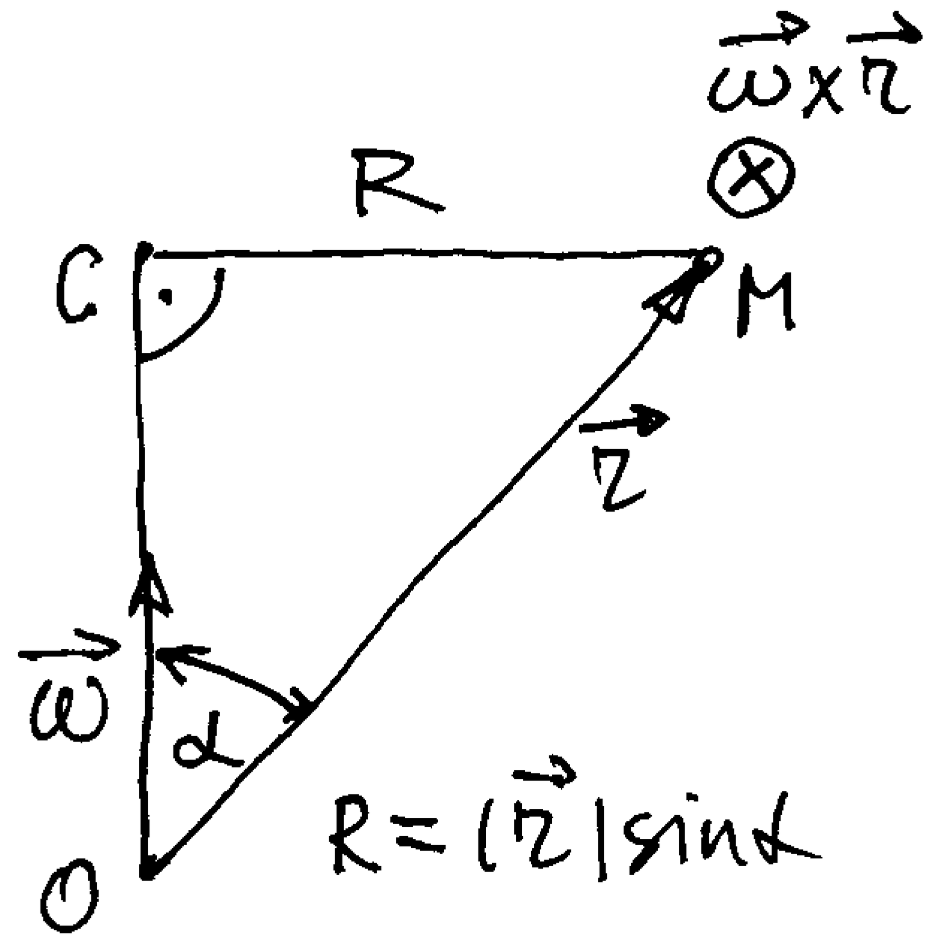
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \boxed{\vec{\omega} \times \vec{r},} \qquad (2)$$

koja govori da je brzina proizvoljne tačke krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose, jednaka vektorskom proizvodu vektora ugaone brzine tijela i vektora položaja te tačke.

Zaista,

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \sin\alpha = |\omega| R,$$

što je, na osnovu (1), jednako intenzitetu brzine $\vec{v}$.



Osim toga, vektor $\vec{\omega} \times \vec{r}$ je normalan na ravan vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$, tj. pada u pravcu tangente na kružnu putanju tačke M, a ima smjer iz koga se obrtanje vektora $\vec{\omega}$ najkraćim putem do poklapanja sa vektorom $\vec{r}$ vidi kao pozitivno obrtanje (tj. usmjeren je u stranu obrtanja tijela)

Ubrzanje tačke M tijela razlaže se na tangencijalnu i normalnu komponentu:
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n, \qquad (3)$$
gdje su: $a_t = \frac{dv}{dt}$, $a_n = v^2/R_k$. Pošto je u našem slučaju $v = R\omega$ i $R_k = R$, dobijamo $a_t = R\varepsilon$ i $a_n = R\omega^2$, gdje je $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ ugaono ubrzanje tijela.

Tangencijalno ubrzanje
$$\vec{a}_t = R\varepsilon \vec{e}_t \qquad (4)$$
usmjereno je po tangenti na kružnu putanju, a normalno ubrzanje
$$\vec{a}_n = R\omega^2 \vec{e}_n \qquad (5)$$
je uvijek usmjereno ka osi obrtanja.

Intezitet ubrzanja tačke M iznosi
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad (6)$$
a ugao β između vektora ubrzanja $\vec{a}$ i pravca MC određen je izrazom
$$\tan\beta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (7)$$
Iz (6) i (7) zaključujemo da je intezitet ubrzanja tačke tijela proporcionalan rastojanju tačke od ose obrtanja i da ubrzanja svih tačaka zaklapaju isti ugao sa pravcem normale iz date tačke na osu obrtanja.

Ubrzanje tačke M možemo dobiti i diferenciranjem po vremenu vektora brzine tačke M određenim Ojlerovom formulom (2):
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$
odakle odmah dobijamo
$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \qquad (8)$$
jer je $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ i $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$.

Koristeći svojstva vektorskog proizvoda lako se zaključuje da su tangencijalna i normalna komponenta ubrzanja date izrazima:
$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \qquad (9)$$
tj. $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$.

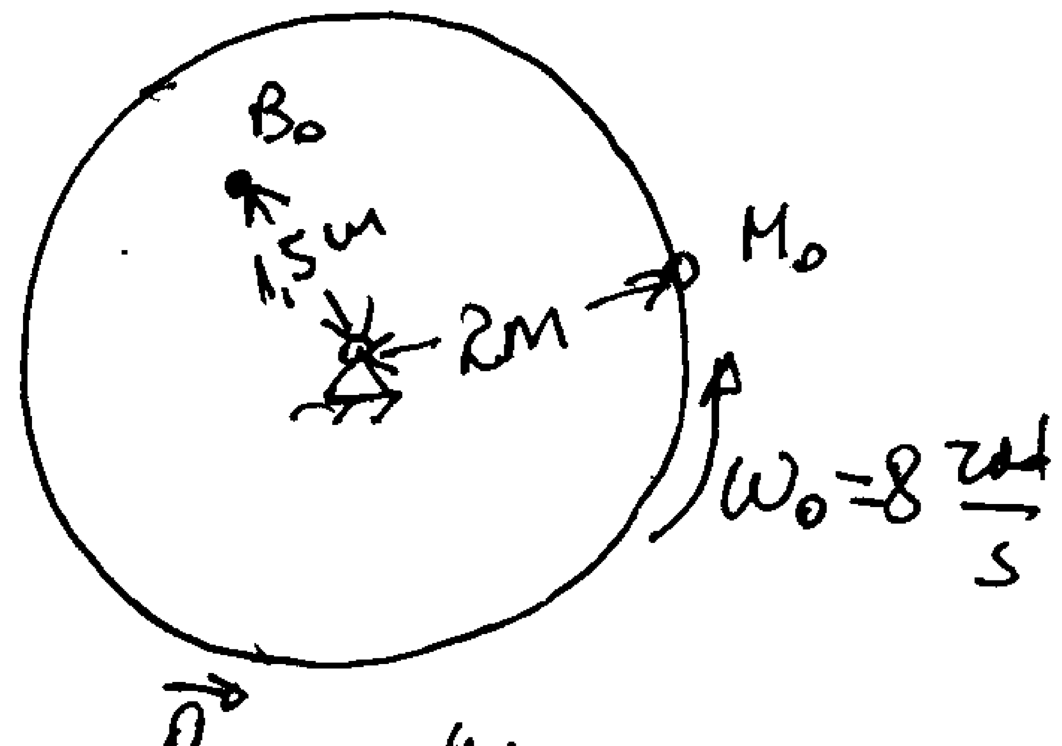
Napomena. U kinematici krutog tijela $\vec{a}_t$ i $\vec{a}_n$ se zovu i obrtno i aksipetalno (centripetalno) ubrzanje, respektivno. Normalno ubrzanje se može zapisati i na sledeći način: $\vec{a}_n = \omega^2 \vec{MC}$ (10)

Primjer 4. Disk poluprečnika 2 m obrće se konstantnim ugaonim ubrzanjem $\varepsilon = 6\ rad/s^2$. Ako je početna ugaona brzina diska $\omega_0 = 8\ rad/s$, odrediti brzinu, tangencijalno, normalno i ukupno ubrzanje u trenutku $t_1 = 0{,}5\ s$:

a) tačke M na obodu diska;

b) tačke B na rastojanju 1,5 m od obrtne ose diska.

a) Obrtanje je jednakopromjenljivo ($\varepsilon = const$) pa važi



(φt) $\quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t = 8 + 6t.$

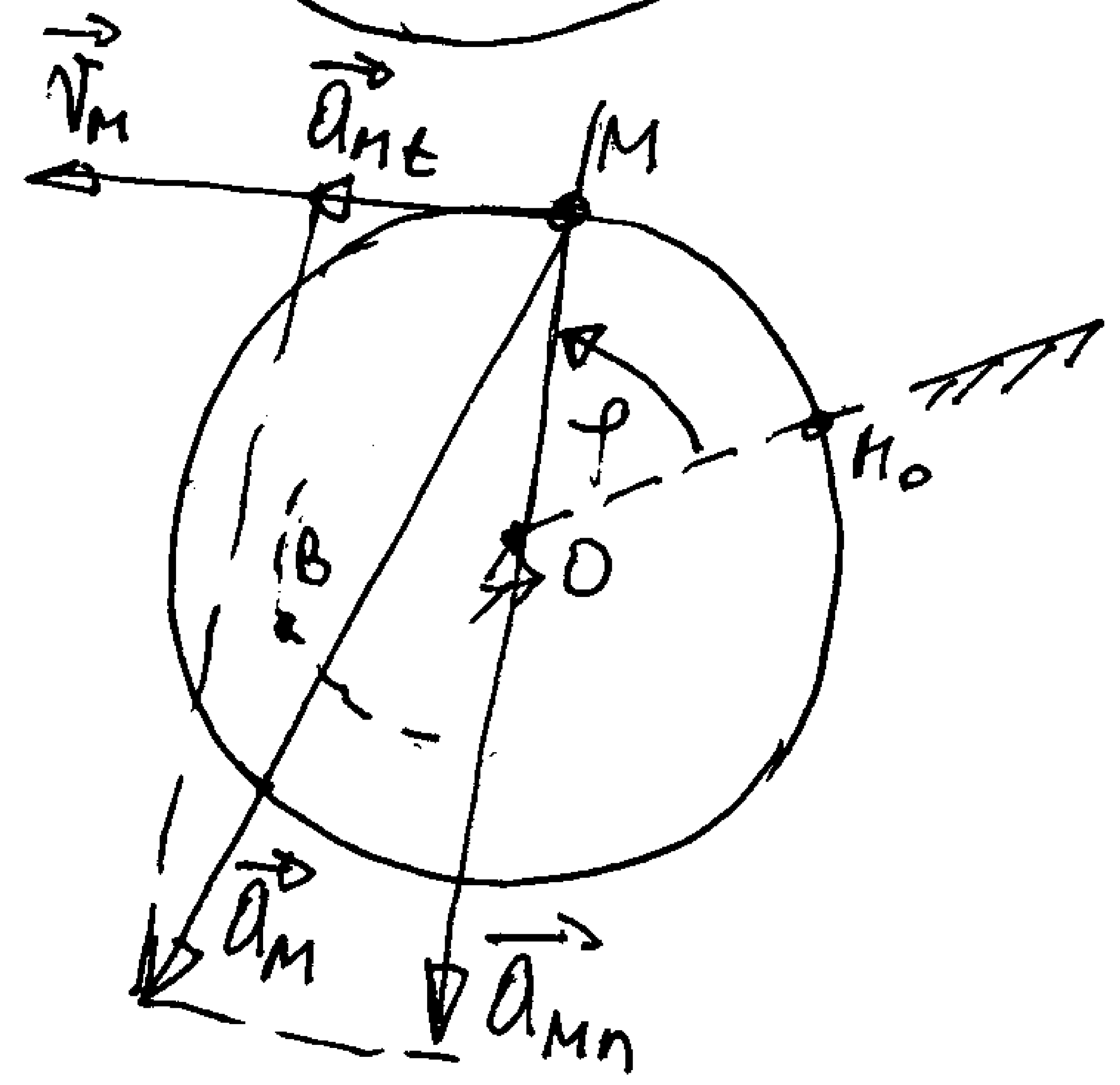
$$v_M = R\omega,\ a_{Mt} = R\varepsilon,\ a_{Mn} = R\omega^2,\ a_M = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

gdje je $R = 2\ m$ i $\varepsilon = 6\ rad/s^2$.

Za $t = t_1 = 0{,}5\ s$:

$$\omega = 11\ \frac{rad}{s};\ v_M = 22\ \frac{m}{s};\ a_{Mt} = 12\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{Mn} = 242\ \frac{m}{s^2};\ a_M = \sqrt{a_{Mt}^2 + a_{Mn}^2} = 242{,}3\ \frac{m}{s^2}$$



b) $R = 1{,}5\ m$; ...

Primjer 5. U primjeru 4, odrediti ubrzanje tačke M nakon što disk izvrši dva obrtaja.

Zakon obrtanja je

$$\varphi(t) = \cancel{\varphi_0}^{\,0} + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} = 8t + 3t^2$$

Pošto je 2 obrta $= 2 \cdot 2\pi = 12{,}56\ rad.$, to iz jednačine $8t + 3t^2 = 12{,}56$, nalazimo vrijeme za koje disk izvrši dva obrta: $t_2 = 1{,}11\ s$.

Za $t = t_2 = 1{,}11\ s$:

$$\omega = 8 + 6t_2 = 14{,}65\ \frac{rad}{s};\ v_M = R\omega = 29{,}32\ \frac{m}{s};\ a_{Mt} = R\varepsilon = 12\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{Mn} = R\omega^2 = 430\ \frac{m}{s^2};\ a_M = 430{,}17\ \frac{m}{s^2}$$

N. Ugaonu brzinu diska nakon dva obrtaja možemo jednostavnije odrediti primjenom jednačine koja važi za jednakopromjenljivo obrtanje:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon(\varphi - \cancel{\varphi_0}^{\,0}),$$

odakle je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon\varphi} = \sqrt{64 + 2 \cdot 6 \cdot 12{,}56} = 14{,}65\ s^{-1}$

Primjer 6. Zamajac koji se obrtao ugaonom brzinom $\omega_0 = 8,5 \frac{rad}{s}$ počinje ravnomjerno da koči ($\varepsilon = const$). Nakon 25 obrtaja od početka kočenja ugaona brzina se prepolovi. Koliki je tada intenzitet ubrzanja tačke zamajca koja se nalazi na rastojanju $R = 20\,cm$ od obrtne ose? Odrediti trajanje kočenja do zaustavljanja zamajca.

U pitanju je jednakopromjenljivo obrtanje pa važi

$$(+)\quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0), \quad \omega_0 = 8,5\ rad/s$$

Za $\varphi = \varphi_1 = 25\cdot 2\pi = 157\ rad$ je $\omega = \omega_1 = \frac{\omega_0}{2}$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{3\omega_0^2}{8\varphi_1} = -0,173 \frac{rad}{s^2}; \quad \omega_1 = 4,25 \frac{rad}{s}$$

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_1^4} = 20\sqrt{0,173^2 + 4,25^4} = 361,3 \frac{cm}{s^2} = \boxed{3,61 \frac{m}{s^2}}$$

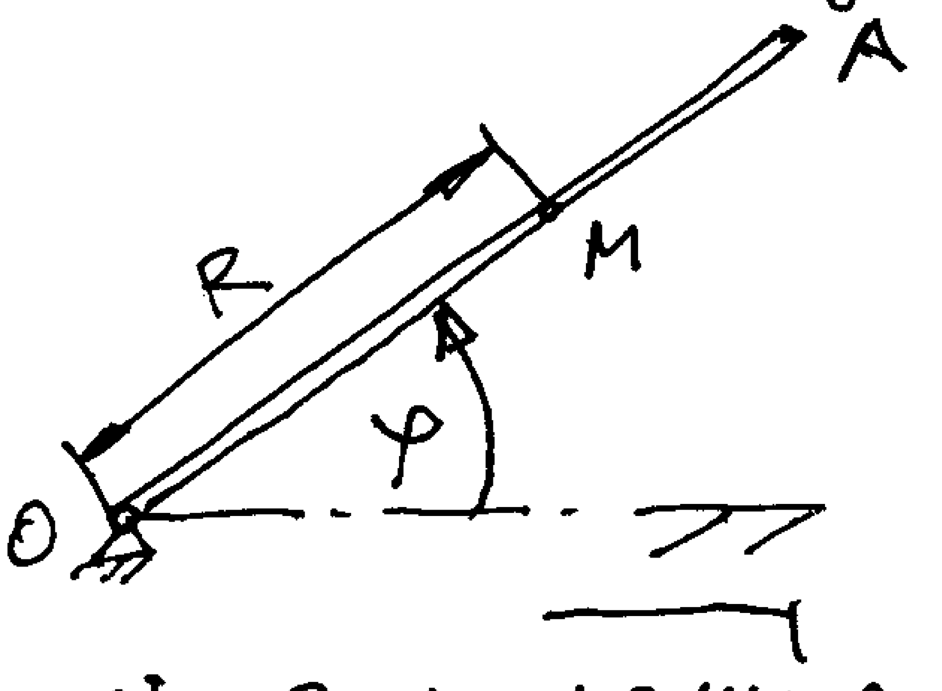
Zakon promjene ugaone brzine je

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$
$$\omega = 8,5 - 0,173 t$$

Ako je t_z – vrijeme zaustavljanja zamajca (trajanje kočenja), tada je $\omega(t_z) = 0 \Rightarrow 8,5 - 0,173 t_z = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{t_z = 49,13\ s}$$

Primjer 7. Štap OA obrće se u horizontalnoj ravni oko tačke O (vertikalne ose kroz tačku O) po zakonu: $\varphi = \frac{9}{32}t^3$, $\varphi[rad]$, $t[s]$. U trenutku $t_1 = 4/3\ s$, odrediti brzinu i ubrzanje tačke M koja se nalazi na rastojanju $R = 0,8\ m$ od tačke O.

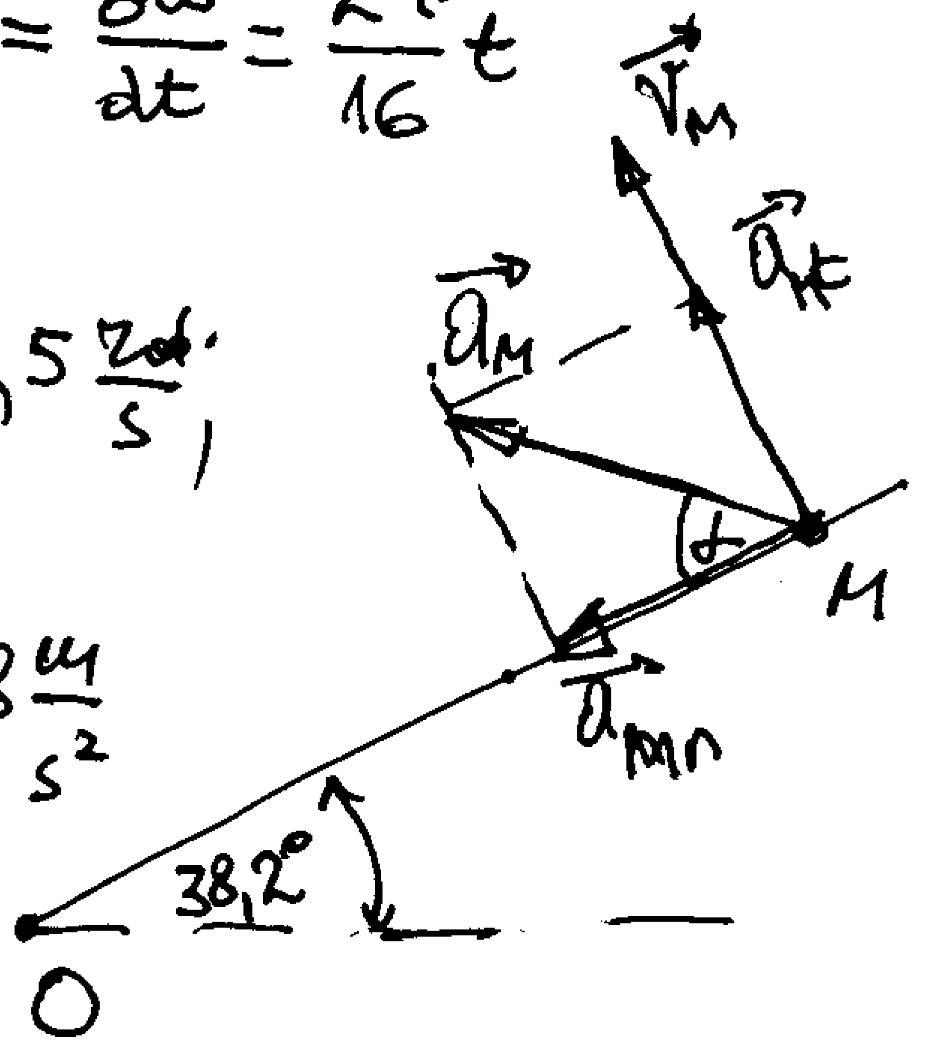


$$(+)\quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{27}{32}t^2, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{27}{16}t$$

Za $t = t_1 = \frac{4}{3}s$:

$\varphi = 0,67\ rad \approx 38,2°$; $\omega = 1,5 \frac{rad}{s}$,

$\varepsilon = 2,25 \frac{rad}{s^2}$.



$v_M = R\omega = \underline{1,2 \frac{m}{s}}$; $a_{Mt} = R\varepsilon = 1,8 \frac{m}{s^2}$; $a_{Mn} = R\omega^2 = 1,8 \frac{m}{s^2}$

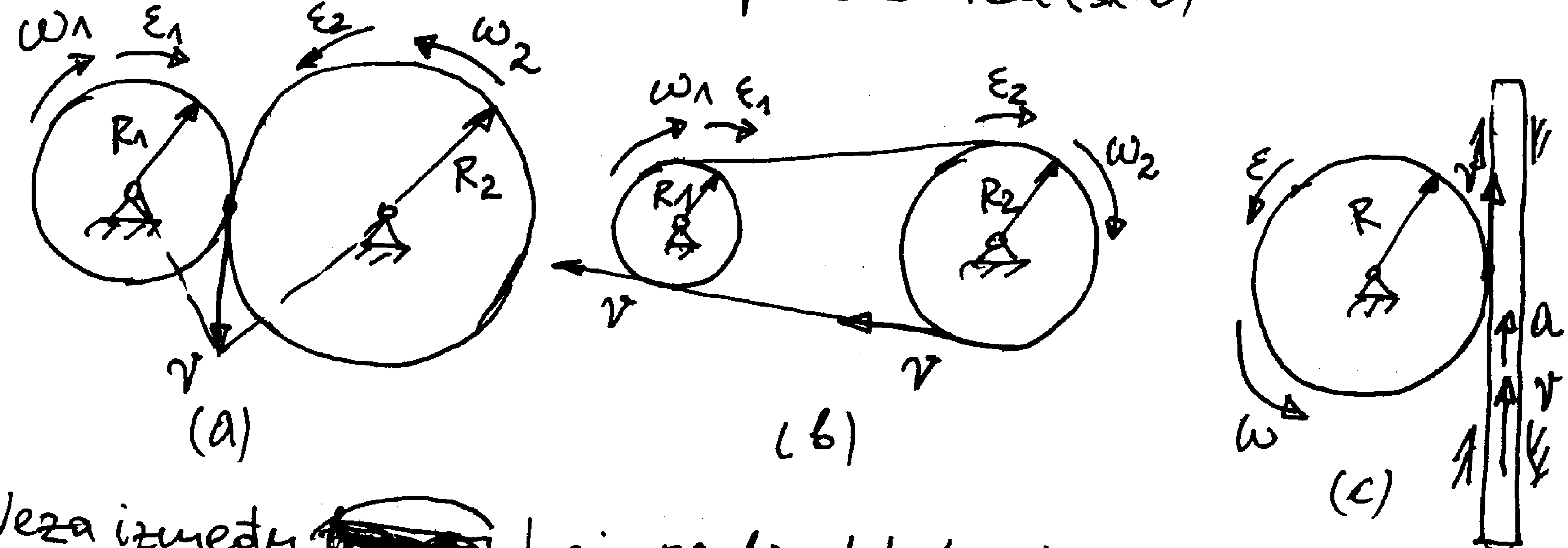
$$a_M = \sqrt{a_{Mt}^2 + a_{Mn}^2} = 2,55 \frac{m}{s^2},$$

$$\tan\alpha = \frac{a_t}{a_N} = 1 \rightarrow \alpha = 45°$$

2.2.4 Transformisanje obrtnog kretanja

S praktičnog stanovišta značajna je mogućnost transformisanja jednog obrtnog kretanja u drugo obrtno kretanje ili u translatorno kretanje (i obrnuto). Ovakve transformacije kretanja ostvaruju se pomoću:

- zupčastih ili frikcionih prenosnika (sl. a, sl. b)
- kaišnih ili lančanih prenosnika (sl. b)



Veza između dvaju različitih kretanja utvrđuje se iz uslova odsustva proklizavanja u tački dodira tijela (jednakosti brzina dodirnih tačaka)

$$(a,b):\quad v = R_1\omega_1 = R_2\omega_2 \Longrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

U slučaju zupčastog prenosnika, imajući u vidu da je broj zubaca z zupčanika proporcionalan njegovom poluprečniku, takođe važi:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

slučaj (c): $v = R\omega$

Uspostavljene veze između brzina važe u proizvoljnom trenutku vremena pa nakon što ih diferenciramo po vremenu dobijemo veze između ubrzanja

$$R_1\varepsilon_1 = R_2\varepsilon_2 \quad \text{(slučajevi (a) i (b))}$$

i

$$a = R\varepsilon \quad \text{(slučaj (c))}$$

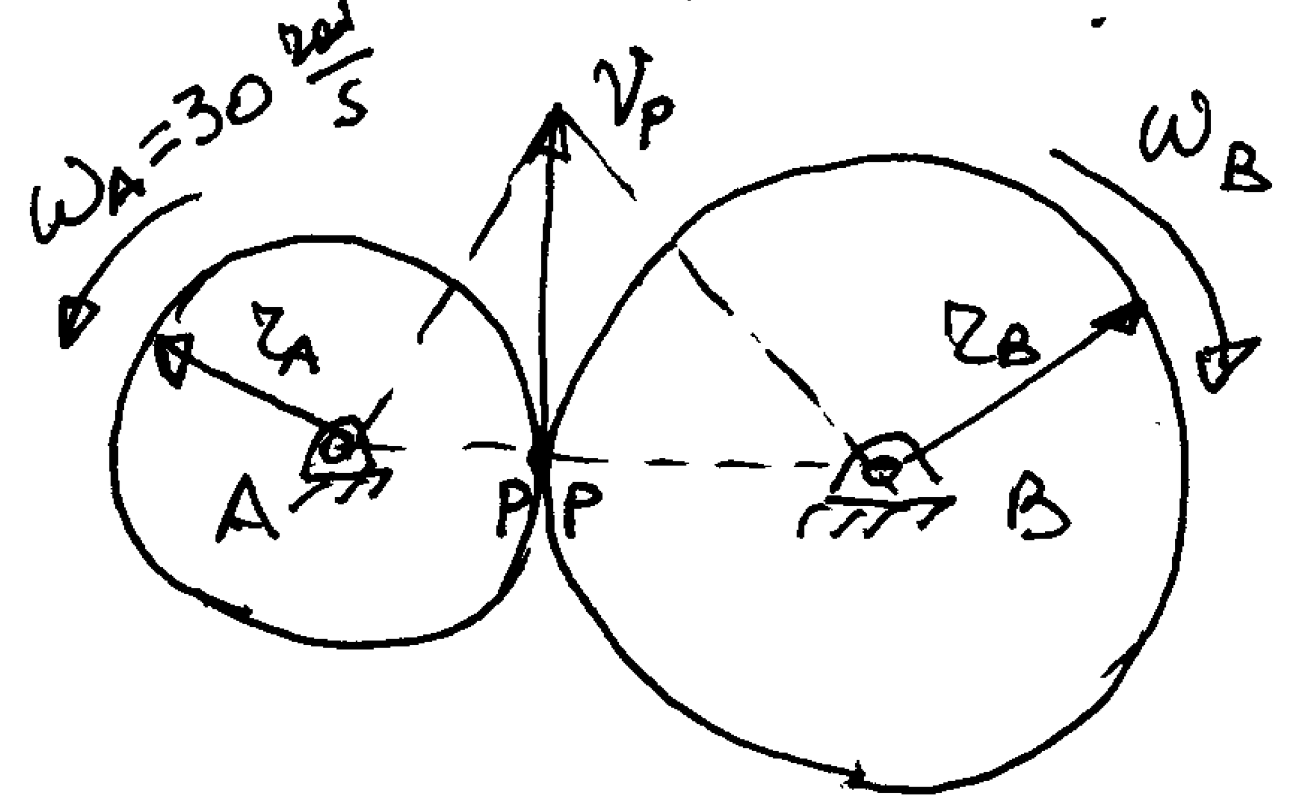
koje izražavaju jednakost <u>tangencijalnih</u> ubrzanja dodirnih tačaka tijela.

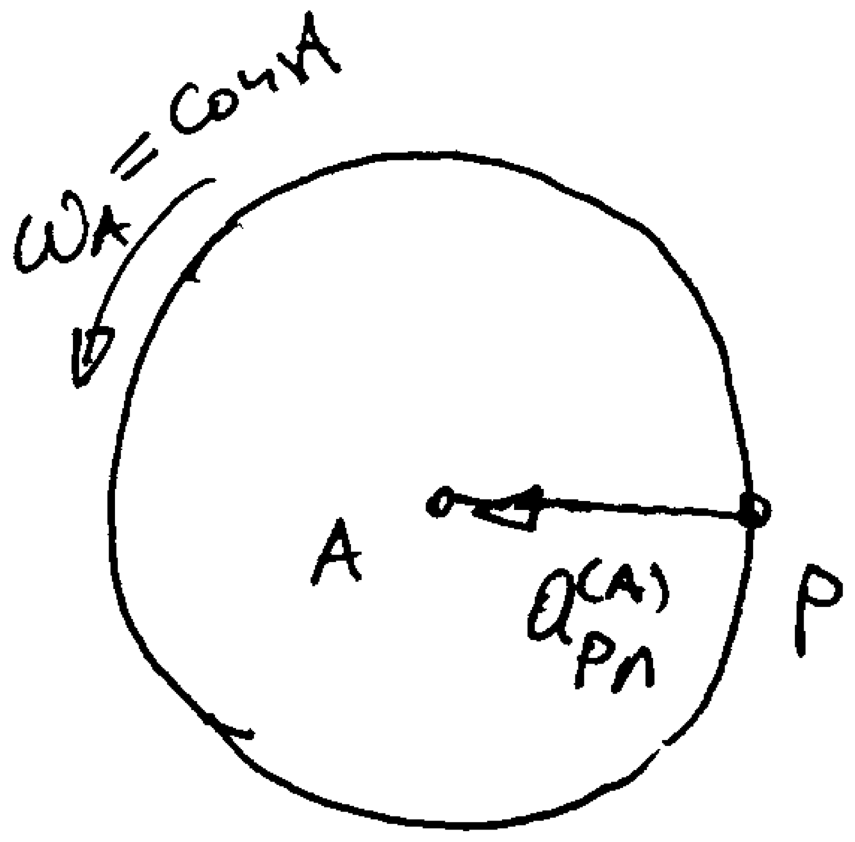
Primer 7. U frikcionom prenosniku točak A, poluprečnika $r_A = 6\ cm$, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega_A = 30\ \frac{rad}{s}$. Kolika je ugaona brzina točka B ako je njegov poluprečnik $r_B = 15\ cm$? Kolika su ubrzanja tačaka dodira točkova?

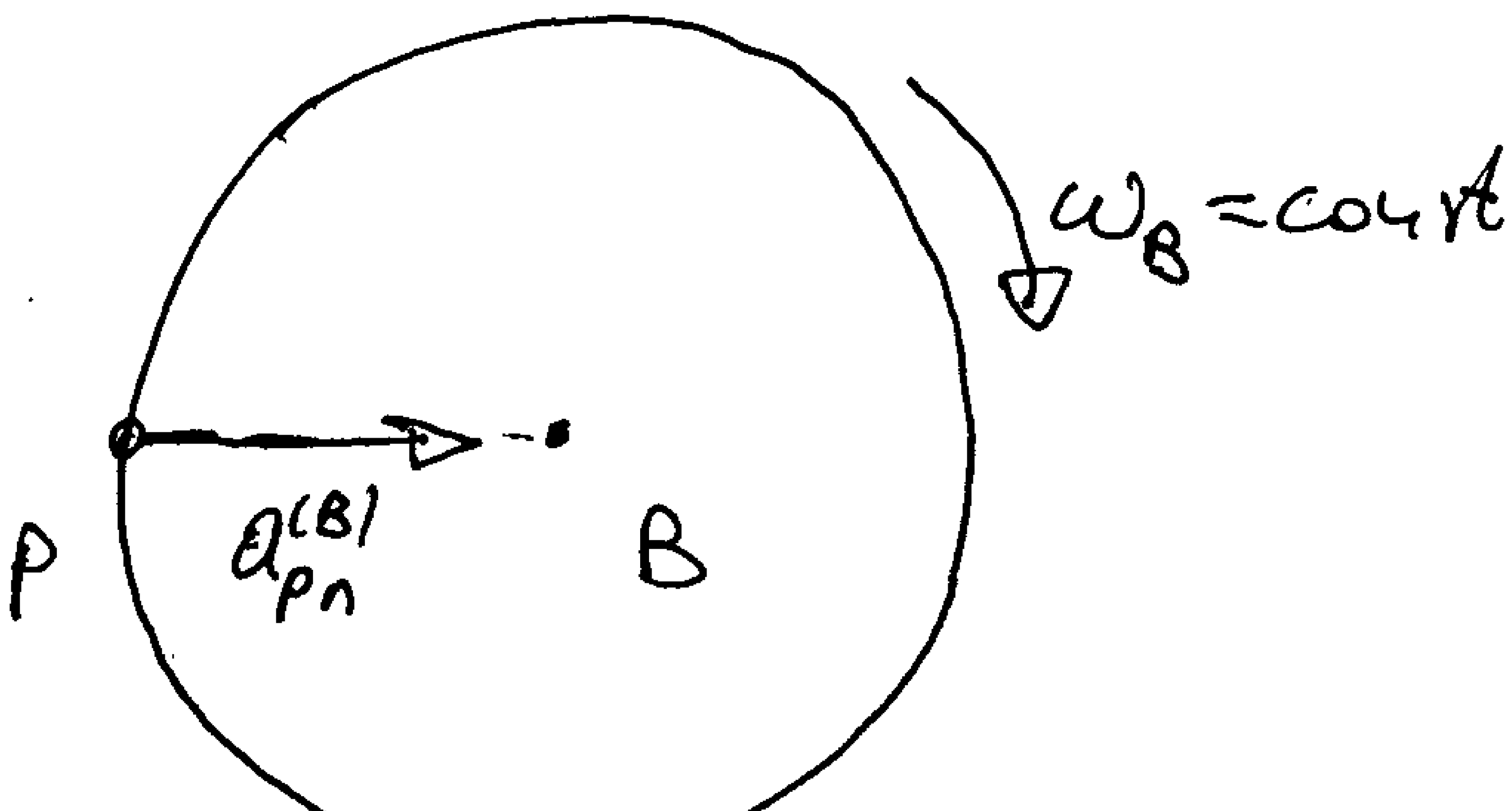
$\omega_A = 30\ \frac{rad}{s}$; $r_A = 6\ cm$; $r_B = 15\ cm$

$v_P = r_A \omega_A = r_B \omega_B$

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B}\omega_A = 12\ \frac{rad}{s}$$



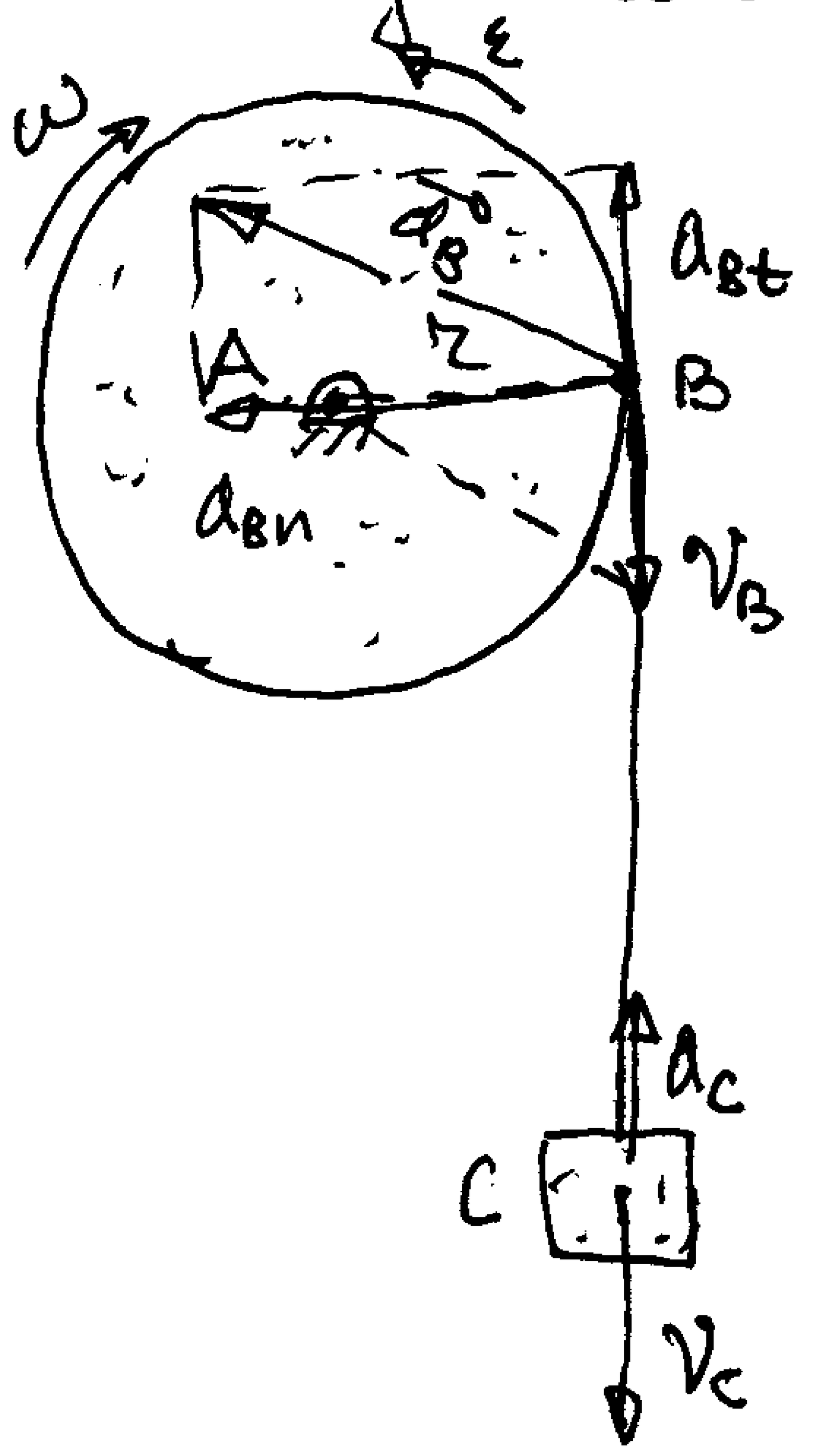




$$a_P^{(A)} = a_{Pn}^{(A)} = r_A \omega_A^2 = 54\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_P^{(B)} = a_{Pn}^{(B)} = r_B \omega_B^2 = 21{,}6\ \frac{m}{s^2}$$

Primer 8. Teg C zakačen za kraj neistegljivog užeta namotanog na kotur A, poluprečnika $r = 0{,}2\ m$, kreće se vertikalno naniže sa konstantnim usporenjem koje iznosi $0{,}4\ m/s^2$. Ako je početna brzina tereta $v_{C0} = 1{,}2\ m/s$, odrediti u trenutku $t_1 = 2\ s$ ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje kotura. Koliko je tada ubrzanje tačke B kotura?



$+\downarrow$ $v_C = v_{C0} + a_C t$, $v_{C0} = 1{,}2$, $a_C = -0{,}4$

$v_C = 1{,}2 - 0{,}4t$

$v_B = v_C$ – jer je uže neistegljivo

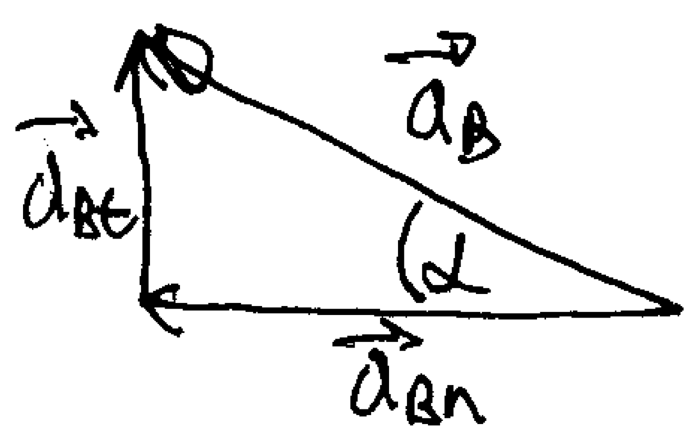
$v_B = r\omega \rightarrow \omega = \frac{v_B}{r} = 6 - 2t$; $\varepsilon = \dot{\omega} = -2$

$t = t_1 = 2\ s$: $\omega = 2\ \frac{rad}{s}$; $\varepsilon = 2\ \frac{rad}{s^2}$

$a_{Bt} = r\varepsilon = 0{,}4\ \frac{m}{s^2} \uparrow$ $(= a_C)$

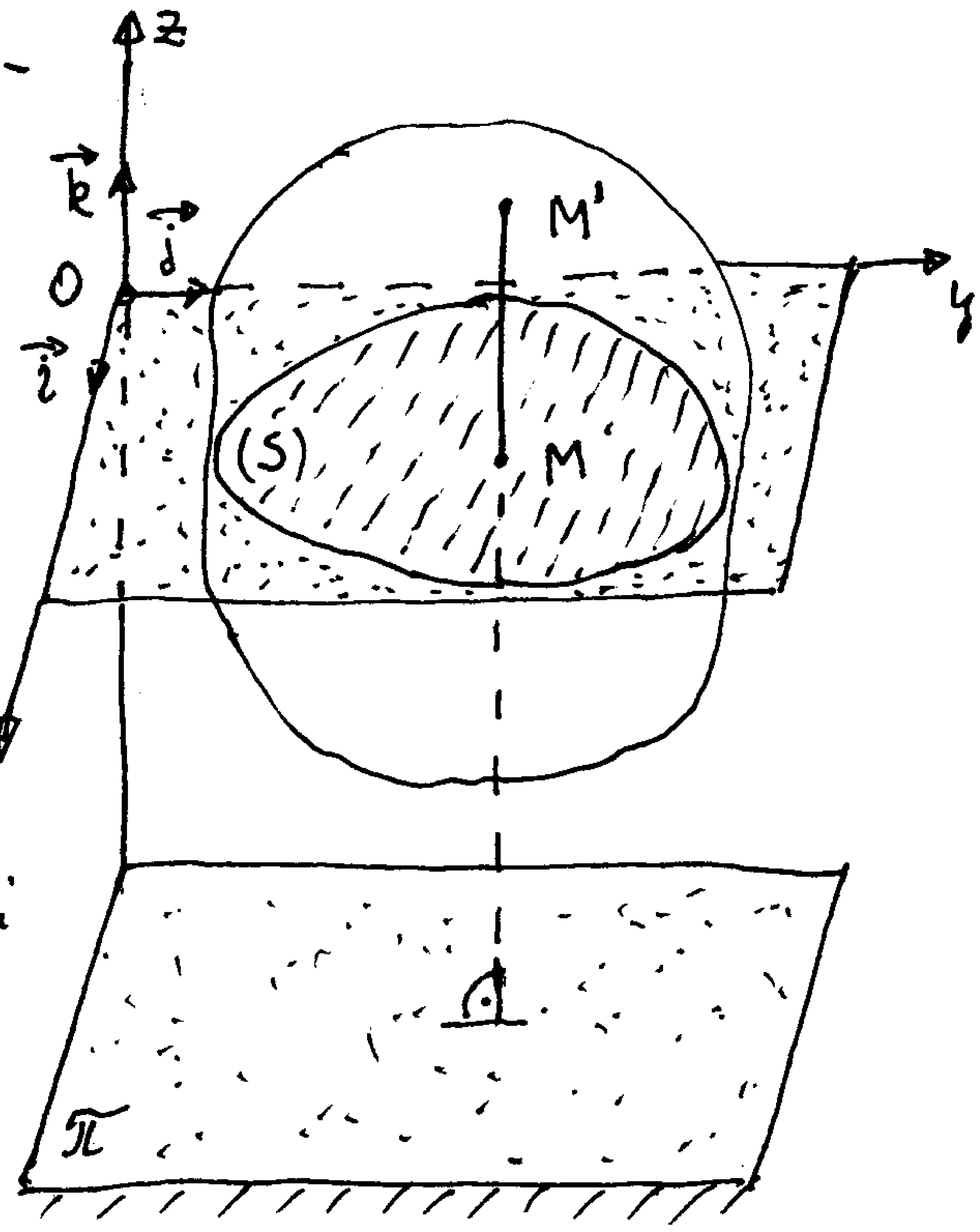
$a_{Bn} = r\omega^2 = 0{,}8\ \frac{m}{s^2} \leftarrow$

$a_B = \sqrt{a_{Bt}^2 + a_{Bn}^2} = 0{,}89\ \frac{m}{s^2}$

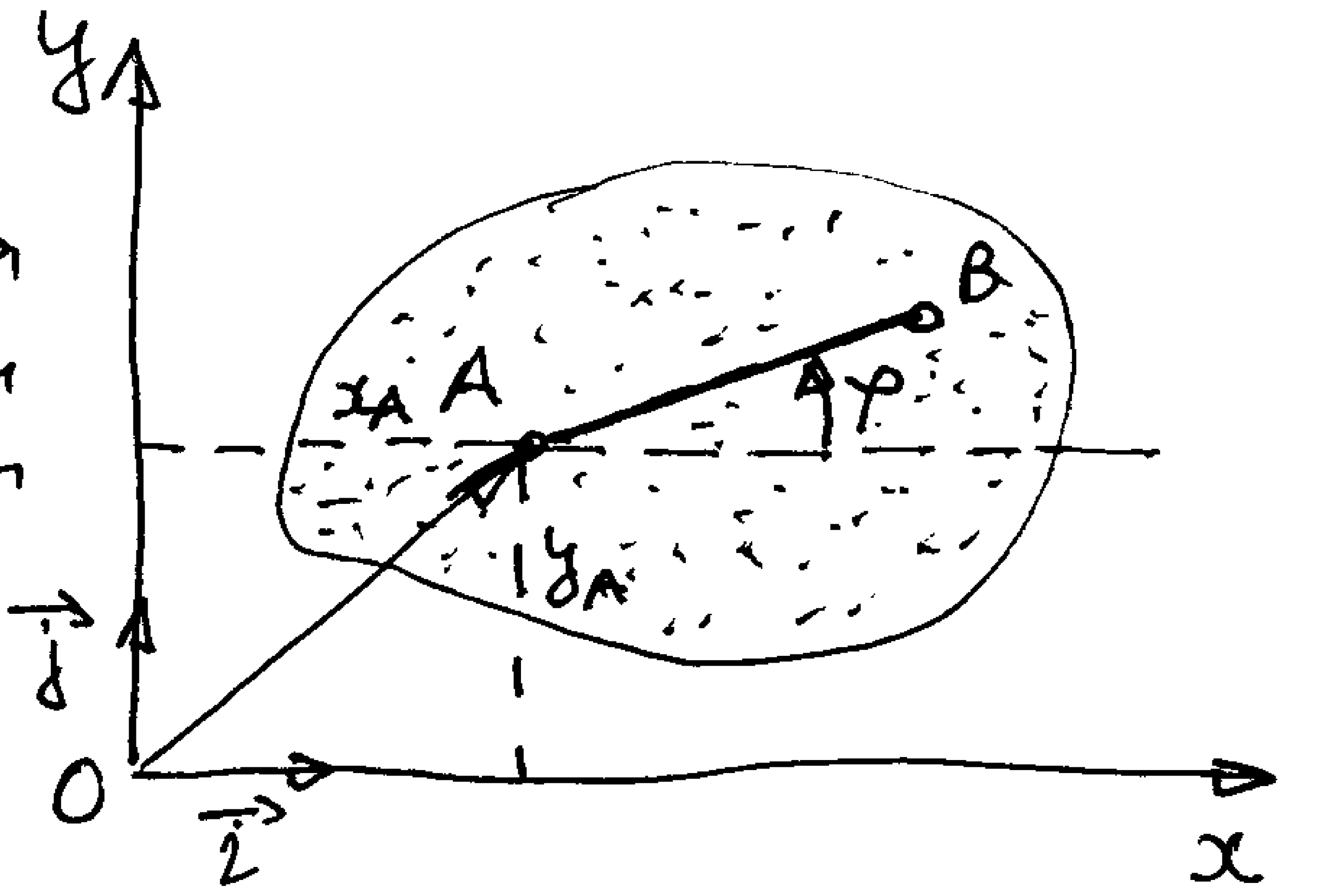


$$\alpha = \arctan\frac{a_{Bt}}{a_{Bn}} = 26{,}6^\circ$$

2.3 Ravansko kretanje krutog tijela



Kretanje krutog tijela naziva se ravanskim ako se sve tačke tijela kreću u ravnima koje su paralelne nekoj nepokretnoj ravni π. U tom slučaju, duž MM' uočena u tijelu a koja je normalna na ravni π ostaje paralelna svom početnom položaju (tj. kreće se translatorno), pa se trajektorije, brzine i ubrzanja tačaka M i M' poklapaju. Prema tome, ravansko kretanje krutog tijela je određeno kretanjem jedne ravne figure S - presjeka tijela sa ravni koja je paralelna referentnoj ravni π.



Položaj presjeka S (ravne figure) u ravni Oxy potpuno je određen ako znamo položaj neke duži AB koja pripada tom presjeku. Položaj duži AB određen je položajem tačke A (njenim koordinatama x_A i y_A) i uglom φ koji duž AB zaklapa sa nepokretnom x-osom. Prema tome, položaj tijela koje vrši ravno kretanje određen je sa tri nezavisna parametra: x_A, y_A, φ, tj. ono ima tri stepena slobode. Da bismo bili u stanju da odredimo položaj tijela u bilo kom trenutku vremena, potrebno je da znamo zavisnosti

$$x_A = x_A(t),\ y_A = y_A(t),\ \varphi = \varphi(t), \quad (1)$$

koje predstavljaju konačne jednačine ravanskog kretanja krutog tijela.

Specijalni slučajevi ovog kretanja su:

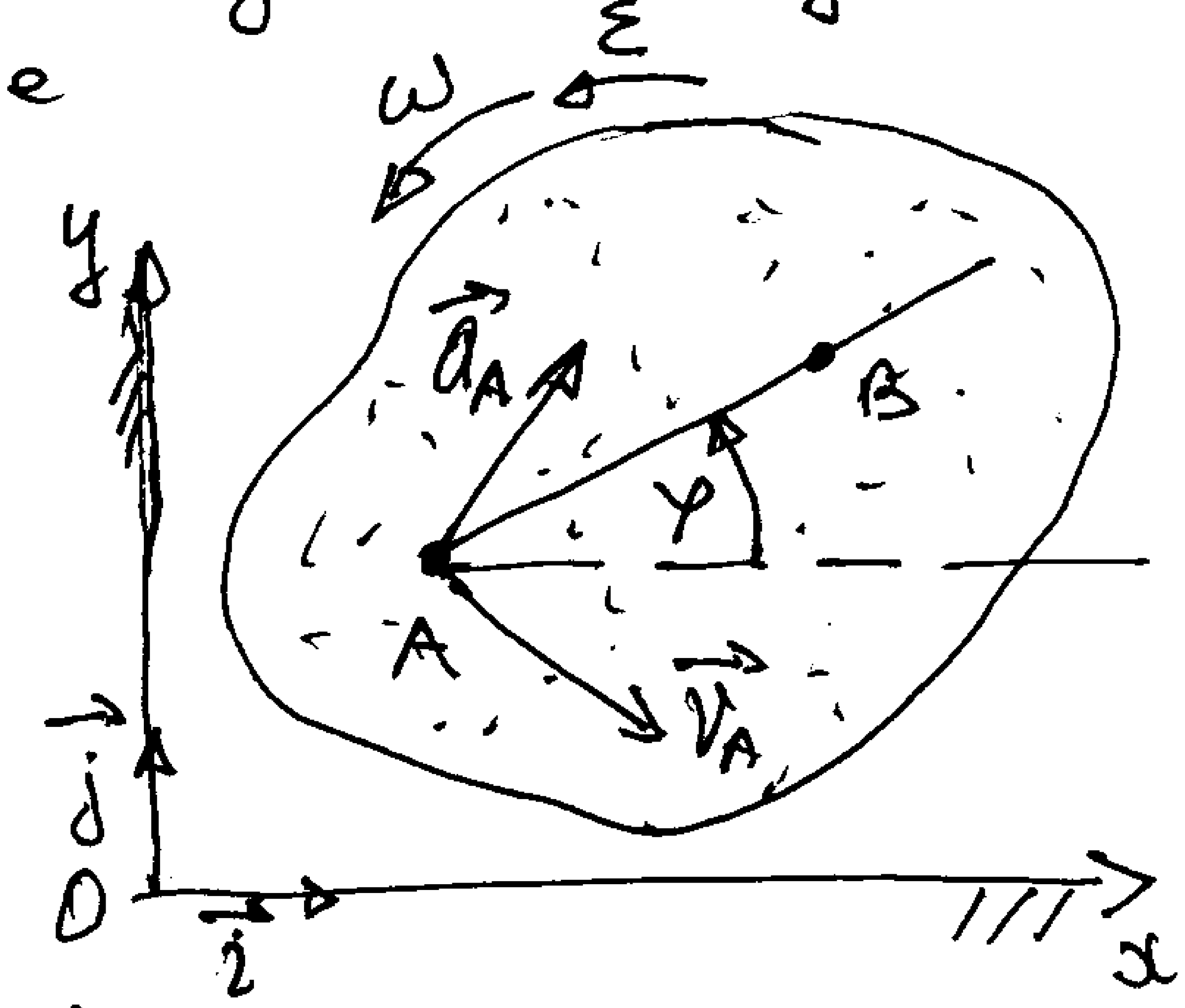
a) $\varphi = const$ – translatorno ravno kretanje

b) $x_A = const,\ y_A = const$ – obrtanje ravne figure S oko tačke A, tj. obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose koja je upravna na ravan π i koja prolazi kroz tačku A.

Odabrana tačka A zove se pol ravanskog kretanja.

U opštem slučaju, ravansko kretanje se može interpretirati kao kretanje sastavljeno iz dva jednostavnija kretanja: translatornog kretanja određenog kretanjem izabranog pola A i obrtanja presjeka S oko pola A. U duhu ove činjenice, translatorni dio ravnog kretanja određen je prvim dvjema jednačinama (1), dok je obrtanje oko pola određeno trećom jednačinom. Naglasimo da je obrtanje oko pola isto što i obrtanje tijela oko ose koja je normalna na ravan kretanja i prolazi kroz pol A.

Kinematičke karakteristike ravanskog kretanja tijela kao cjeline su: brzina $\vec{v}_A$ i ubrzanje $\vec{a}_A$ pola A; ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε tijela. Iz prvih dviju jednačina (1) određuju se brzina i ubrzanje pola A:



$$\vec{v}_A = \dot{x}_A\vec{i} + \dot{y}_A\vec{j}, \quad \vec{a}_A = \ddot{x}_A\vec{i} + \ddot{y}_A\vec{j},$$

dok se iz treće jednačine određuju ugaona brzina i ugaono ubrzanje tijela:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

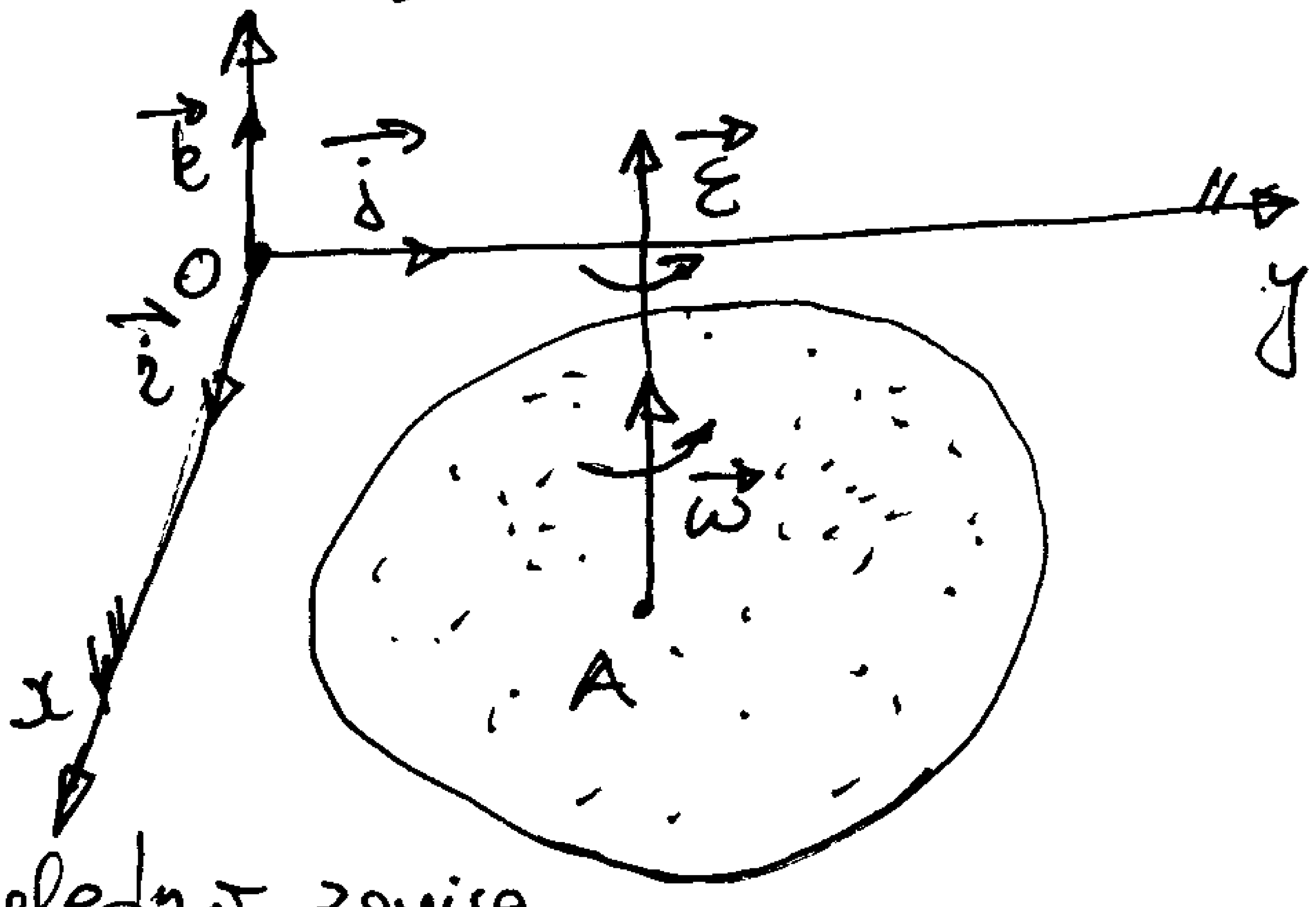
Analogno obrtanju tijela oko nepokretne ose uvodi se vektor ugaone brzine

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

i vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, tj.

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k},$$

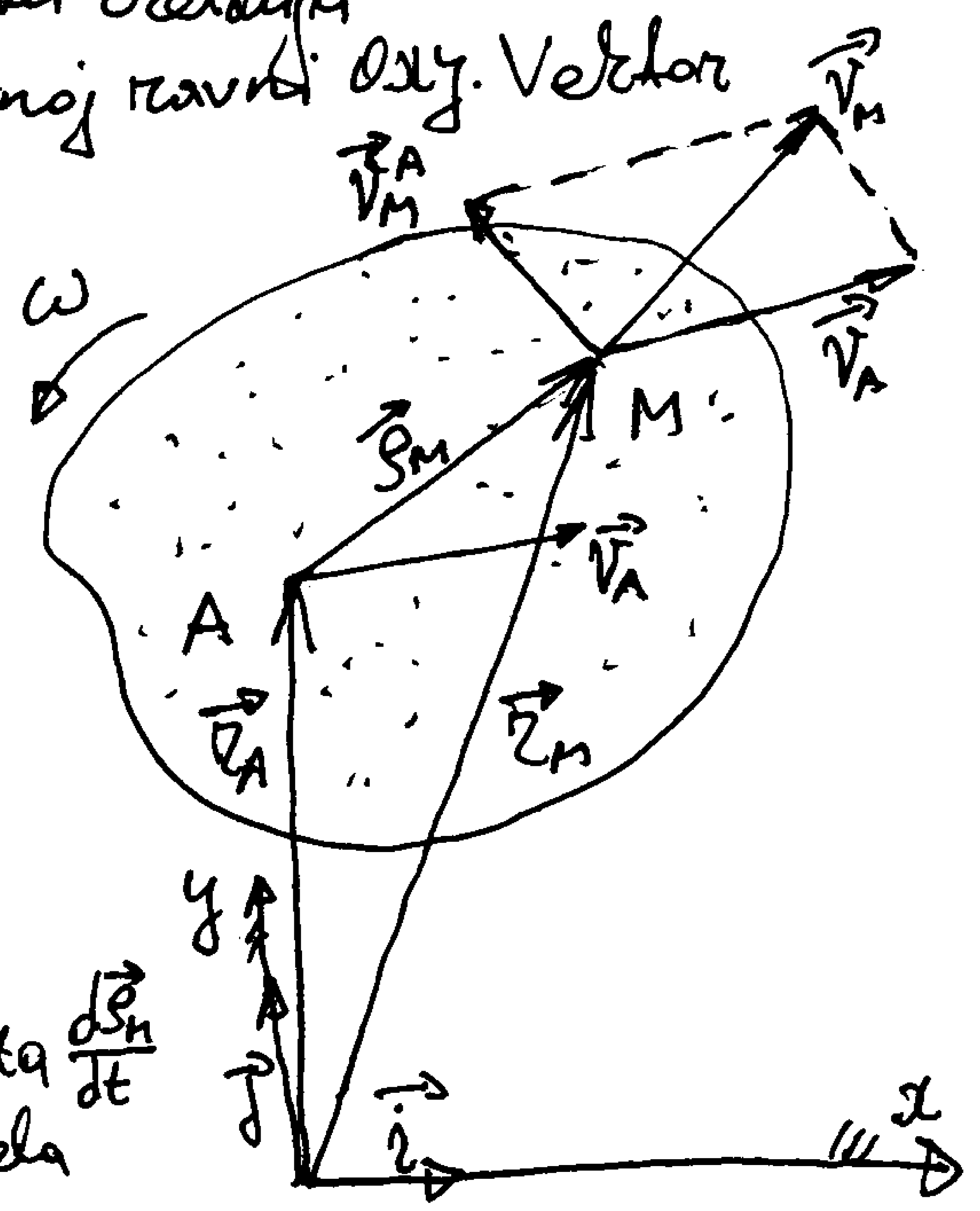
čiji su pravci normalni na ravan figure.



Važno je istaći da:

- kinematičke karakteristike translatorne komponente kretanja ($\vec{v}_A, \vec{a}_A$), očigledno, zavise od izbora pola A;
- kinematičke karakteristike obrtnog tijela kretanja (ω i ε) ne zavise od izbora pola A.

2.3.1 Brzine tačaka tijela pri ravanskom kretanju



Posmatrajmo kretanje ravne figure S u nepokretnoj ravni Oxy. Vektor položaja proizvoljne tačke M figure S je

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}_M, \quad (1)$$

gdje je $\vec r_A$ vektor položaja pola A, a $\vec\rho_M = \vec{AM}$ vektor položaja tačke M u odnosu na tačku A. Pošto vektor $\vec\rho_M$ spaja dvije tačke krutog tijela on je konstantnog inteziteta ($|\vec\rho_M| = \overline{AM} = const$), ali se mijenja po pravcu. Na osnovu definicije brzine tačke, biće

$$\vec v_M = \frac{d\vec r_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec r_A+\vec\rho_M) = \frac{d\vec r_A}{dt}+\frac{d\vec\rho_M}{dt}, \quad (2)$$

gdje je $\frac{d\vec r_A}{dt} = \vec v_A$ brzina tačke A. Druga komponenta $\frac{d\vec\rho_M}{dt}$ u izrazu (2) odgovara brzini tačke M pri kretanju tijela tokom kojeg je $\vec r_A = const$, a takvo kretanje je obrtanje oko pola A (tj. oko ose koja prolazi kroz tačku A i upravna je na ravan kretanja) jer je $|\vec\rho_M| = const$. Ova komponenta brzine tačke M označava se sa $\vec v_M^A$ i naziva se brzina tačke M u odnosu na tačku A. Ona je određena Ojlerovim obrascem za brzinu tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose:

$$\vec v_M^A = \frac{d\vec\rho_M}{dt} = \vec\omega\times\vec\rho_M, \quad (3)$$

gdje je $\vec\omega$ vektor ugaone brzine ravnog kretanja tijela.

Vektor

$$\vec v_M^A = \vec\omega\times\vec\rho_M = \vec\omega\times\vec{AM}$$

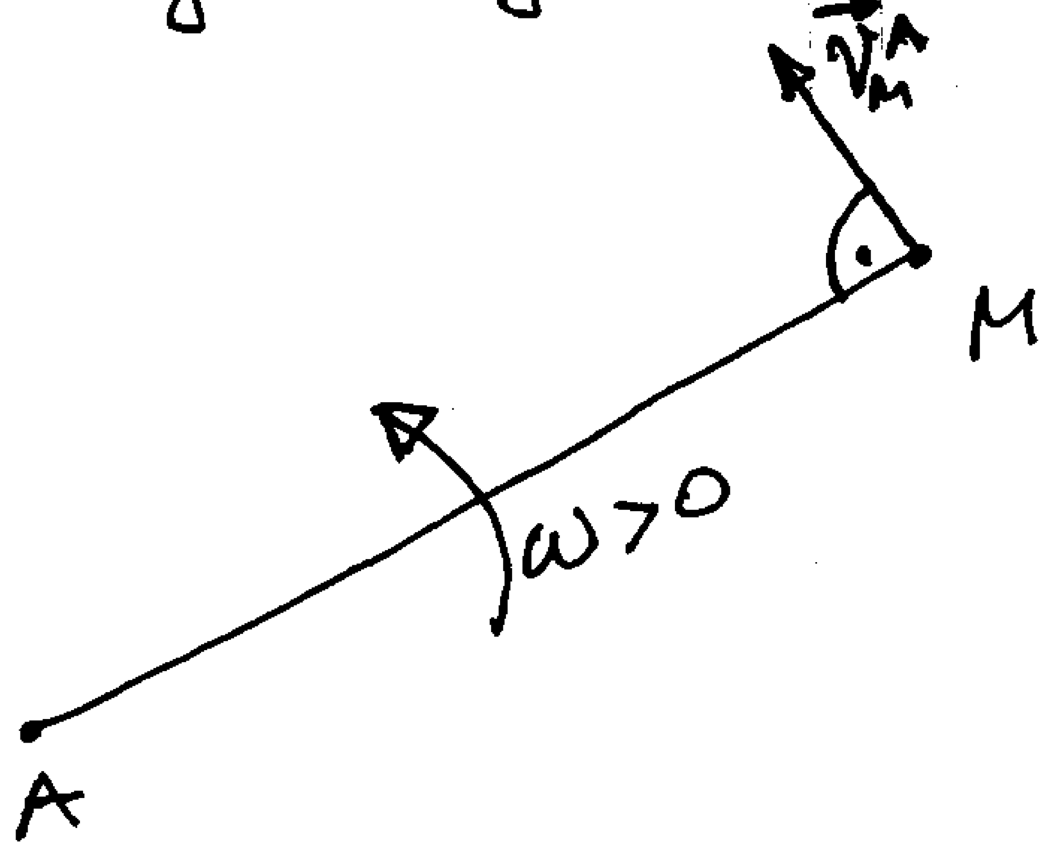
je određen sledećim elementima:

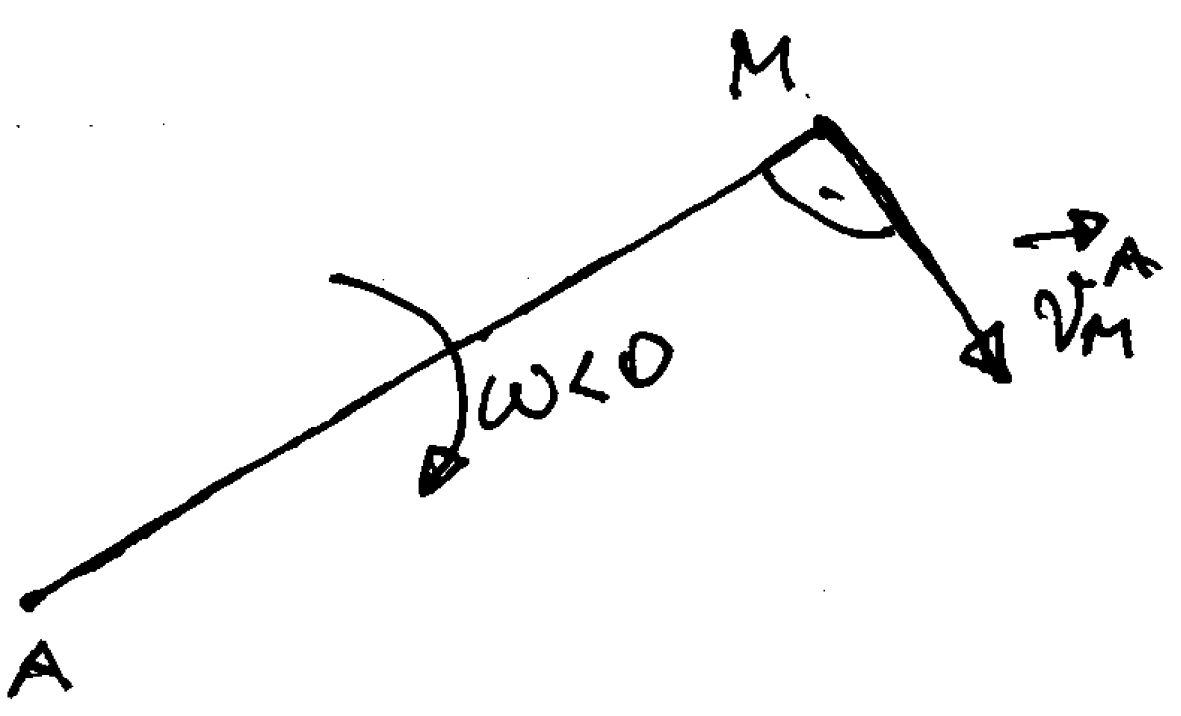
— $v_M^A = |\vec\omega|\cdot\overline{AM}\cdot\underbrace{\sin\angle(\vec\omega,\vec{AM})}_{=1} = |\omega|\cdot\overline{AM}$,

tj. po intezitetu je jednak proizvodu inteziteta ugaone brzine i rastojanja tačke M od tačke A;

— leži u ravni kretanja i normalan je na pravac AM;

— smjer mu je određen smjerom obrtanja figure oko tačke A.

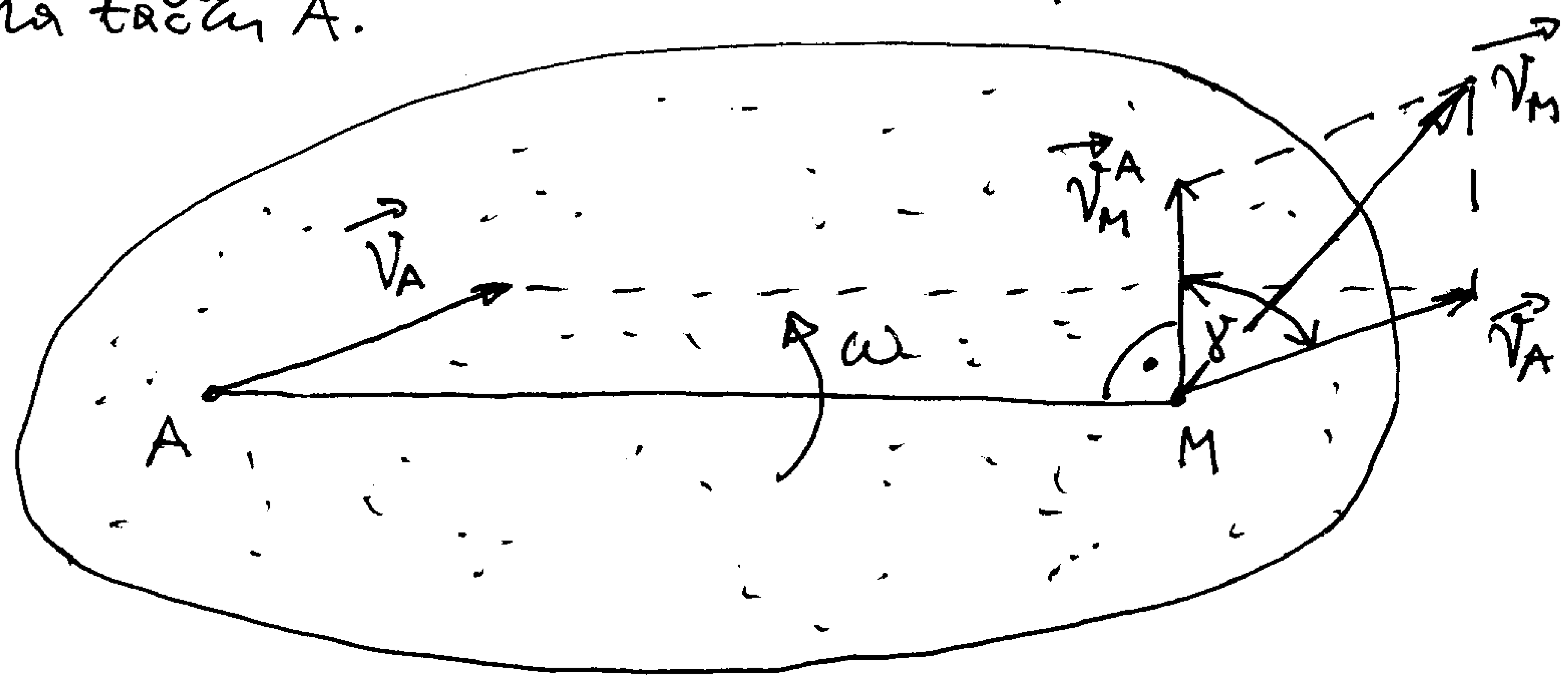




Prema tome, na osnovu (2) i (3) je

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_M^A, \quad \vec{v}_M^A = \vec{\omega} \times \vec{AM}} \qquad (4)$$

Ova relacija je poznata pod imenom "teorema o brzinama tačaka ravne figure" i glasi: brzina proizvoljne tačke M ravne figure S jednaka je vektorskom zbiru brzine pola A i brzine tačke M u odnosu na tačku A.



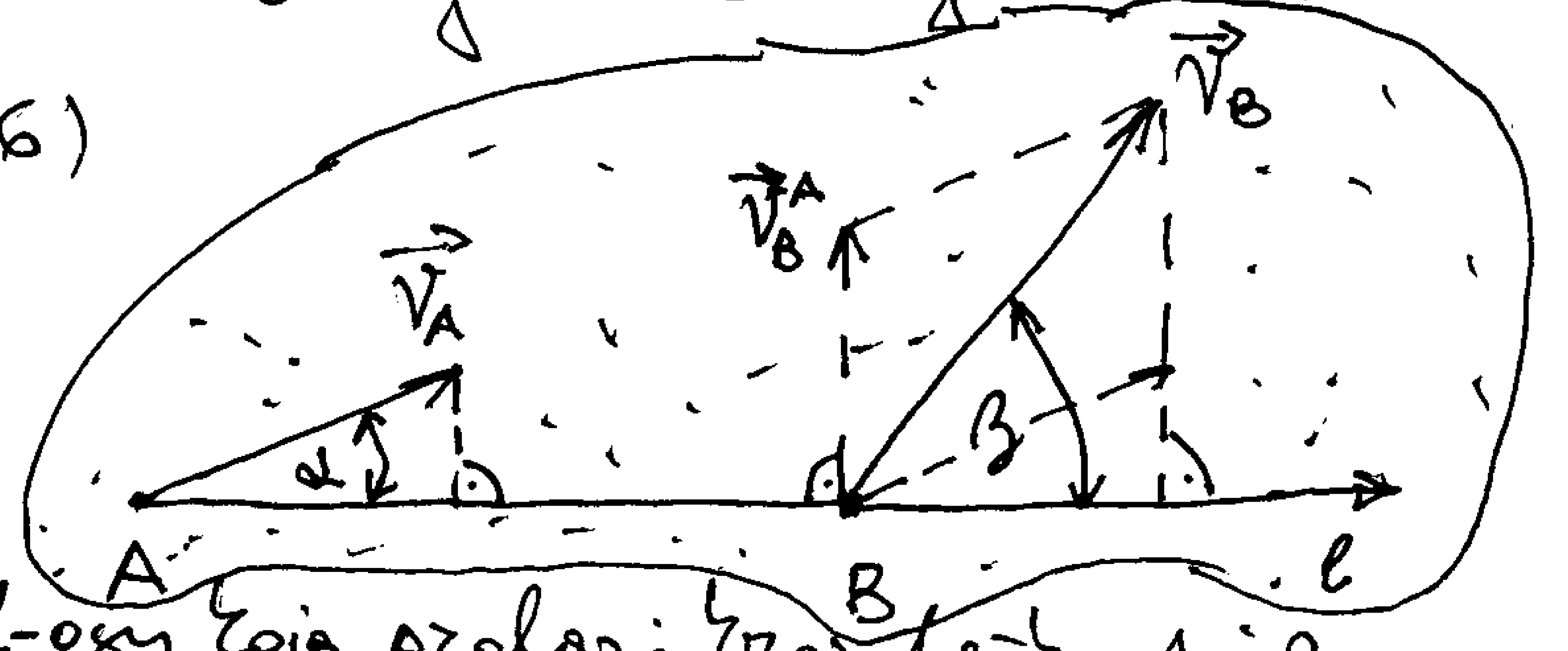
Intenzitet brzine tačke M određujemo pomoću kosinusne teoreme:

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + (v_M^A)^2 + 2 v_A v_M^A \cos\gamma} \qquad (5)$$

Posledica teoreme o brzinama: Projekcije brzina dveju tačaka krutog tijela na osu koja prolazi kroz te dvije tačke su jednake:

$$\boxed{v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha} \qquad (6)$$

Zaista, brzina tačke B je određena relacijom $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$



pa projecirajući ovu jednakost na l-osu koja prolazi kroz tačke A i B, slijedi (6), jer je $v_{Bl}^A = 0$ $(\vec{v}_B^A \perp l)$.

Trenutni pol (centar) brzina

Trenutnim polom brzina naziva se tačka P ravne figure čija je brzina u datom trenutku jednaka nuli. Takva tačka u svakom trenutku postoji (i to samo jedna), pod uslovom da ravansko kretanje nije translatorno.

Ako trenutni pol brzina P usvojimo za pol ravne figure, onda je u datom trenutku brzina bilo koje tačke M:

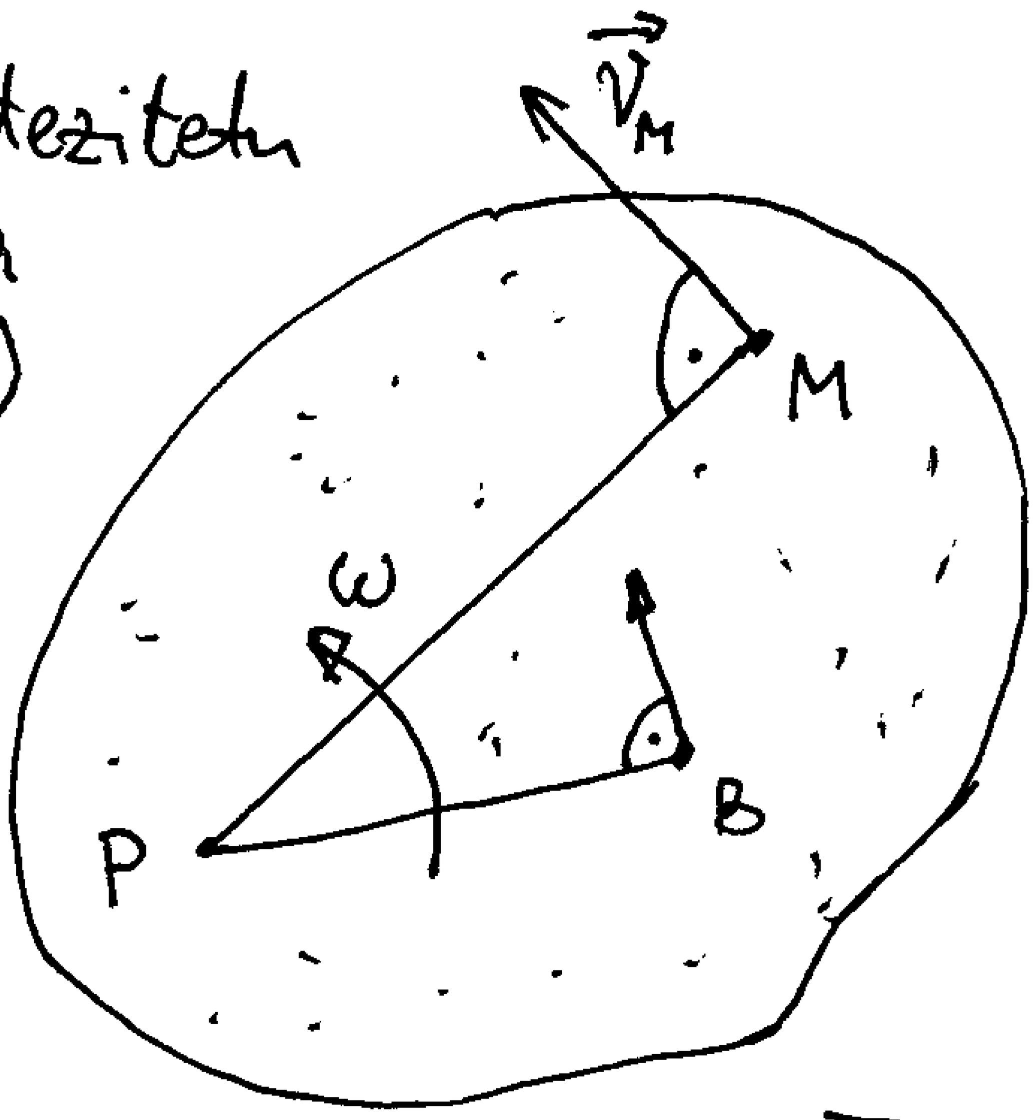
$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_M^P = \vec{v}_M^P = \vec{\omega} \times \vec{PM}, \qquad (7)$$

jer je $\vec{v}_P = 0$.

Odavde slijedi da je brzina tačke M po intezitetu jednaka proizvodu rastojanja tačke do pola brzina P (trenutnog poluprečnika obrtanja $\overline{PM}$) i inteziteta ugaone brzine

$$v_M = \overline{PM}\cdot|\omega|, \qquad (8)$$

pravac joj je upravan na trenutni poluprečnik PM, a usmjerena je u stranu obrtanja ravne figure.



Prema tome, u datom trenutku vremena, brzine svih tačaka tijela pri ravanskom kretanju su raspoređene tako kao da se tijelo obrće oko pola brzina (tj. oko ose koja prolazi kroz pol brzina a upravna je na ravan figure.

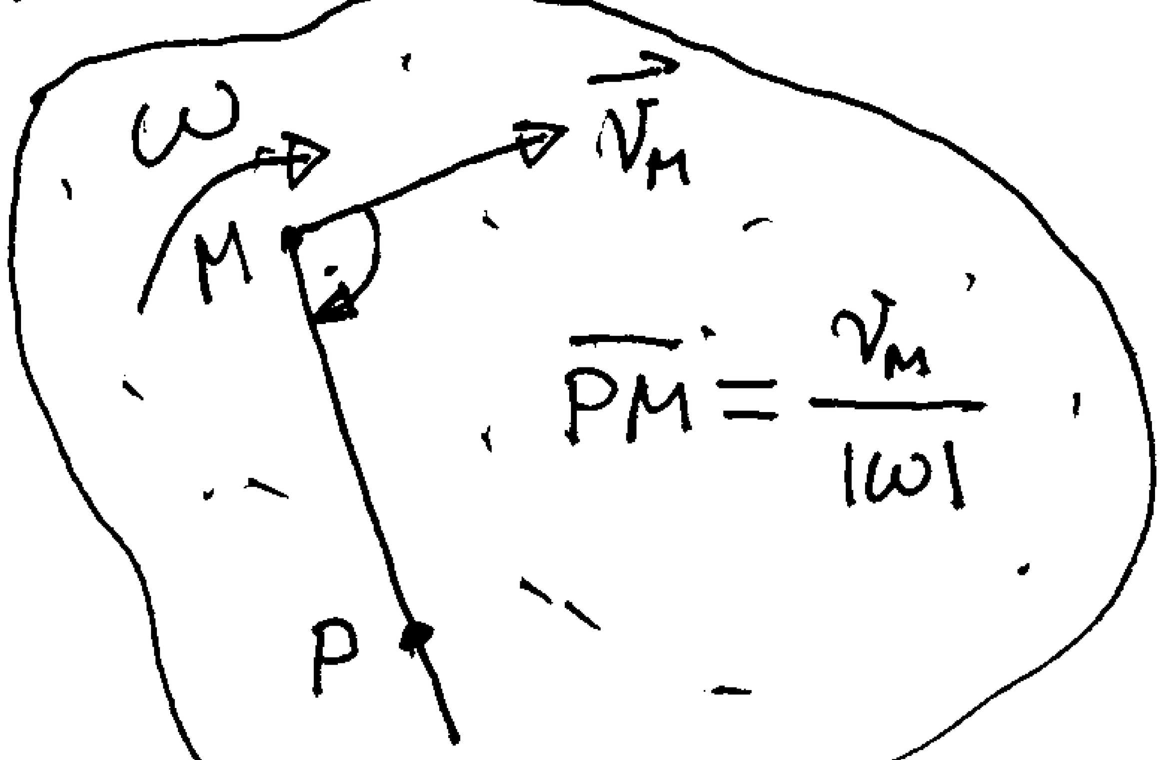
$v_M = \overline{PM}\cdot|\omega|$, $v_B = \overline{PB}\cdot|\omega|$

Važno je napomenuti da u opštem slučaju kretanja ravne figure mijenja se položaj pola brzina kako u odnosu na figuru, tako i u odnosu na nepokretnu ravan.

Određivanje pola brzina.

a) Poznato: $\vec{v}_M$, ω

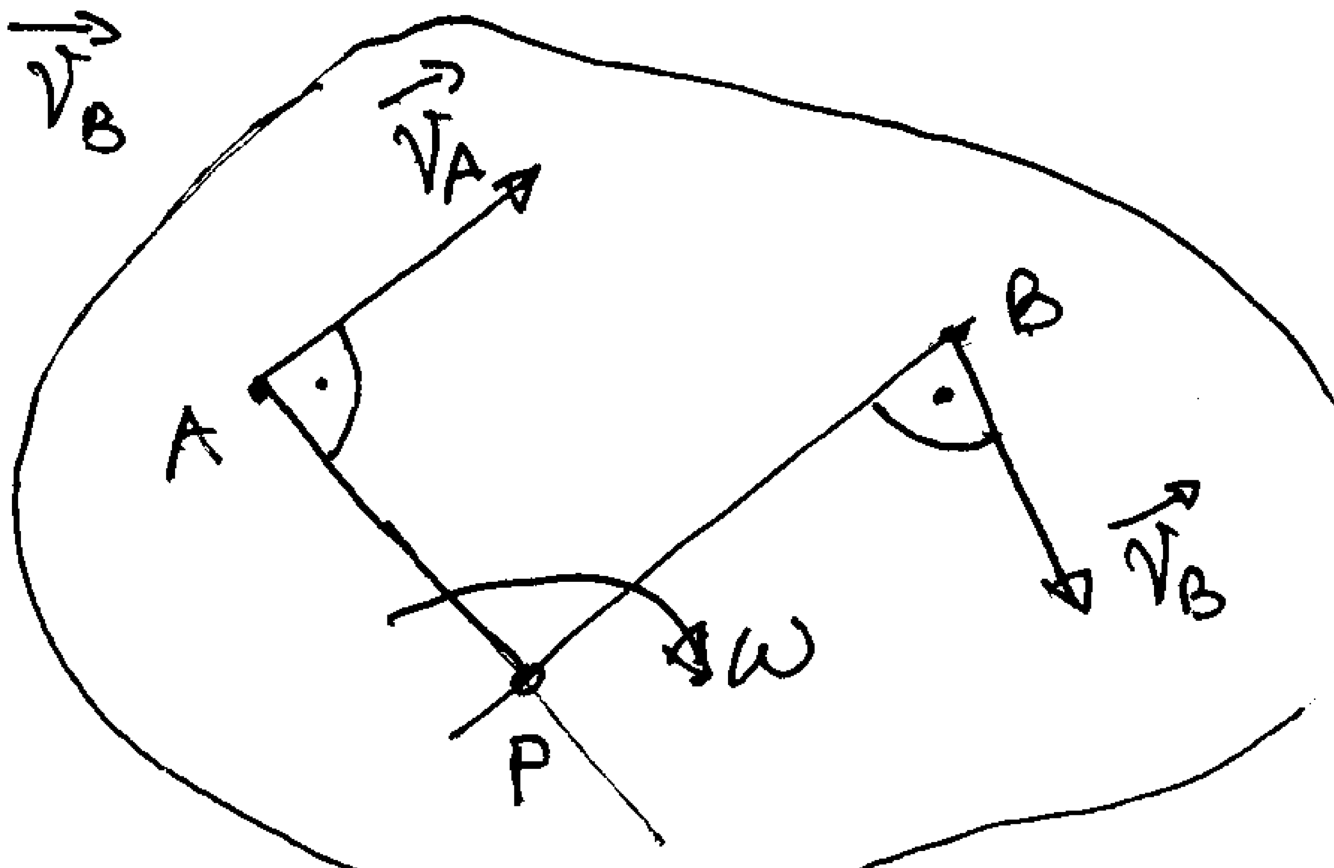
Pol brzina P se nalazi na normali na vektor brzine $\vec{v}_M$, povučenoj kroz tačku M, na rastojanju $\overline{MP} = v_M / |\omega|$ mjerenom u smjeru dobijenim obrtanjem vektora $\vec{v}_M$ u smjeru ugaone brzine ω.



b) Poznate brzine dvije tačaka: $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$

b1) $\vec{v}_A \nparallel \vec{v}_B$

Pol brzina P nalazi se u presjeku normala na vektore brzina koje su povučene kroz tačke A i B.



b2) $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$

b2-1) brzine su normalne na duž AB

Pol brzina se nalazi u presjeku prave povučene kroz vrhove vektora brzina tačaka A i B i prave AB.