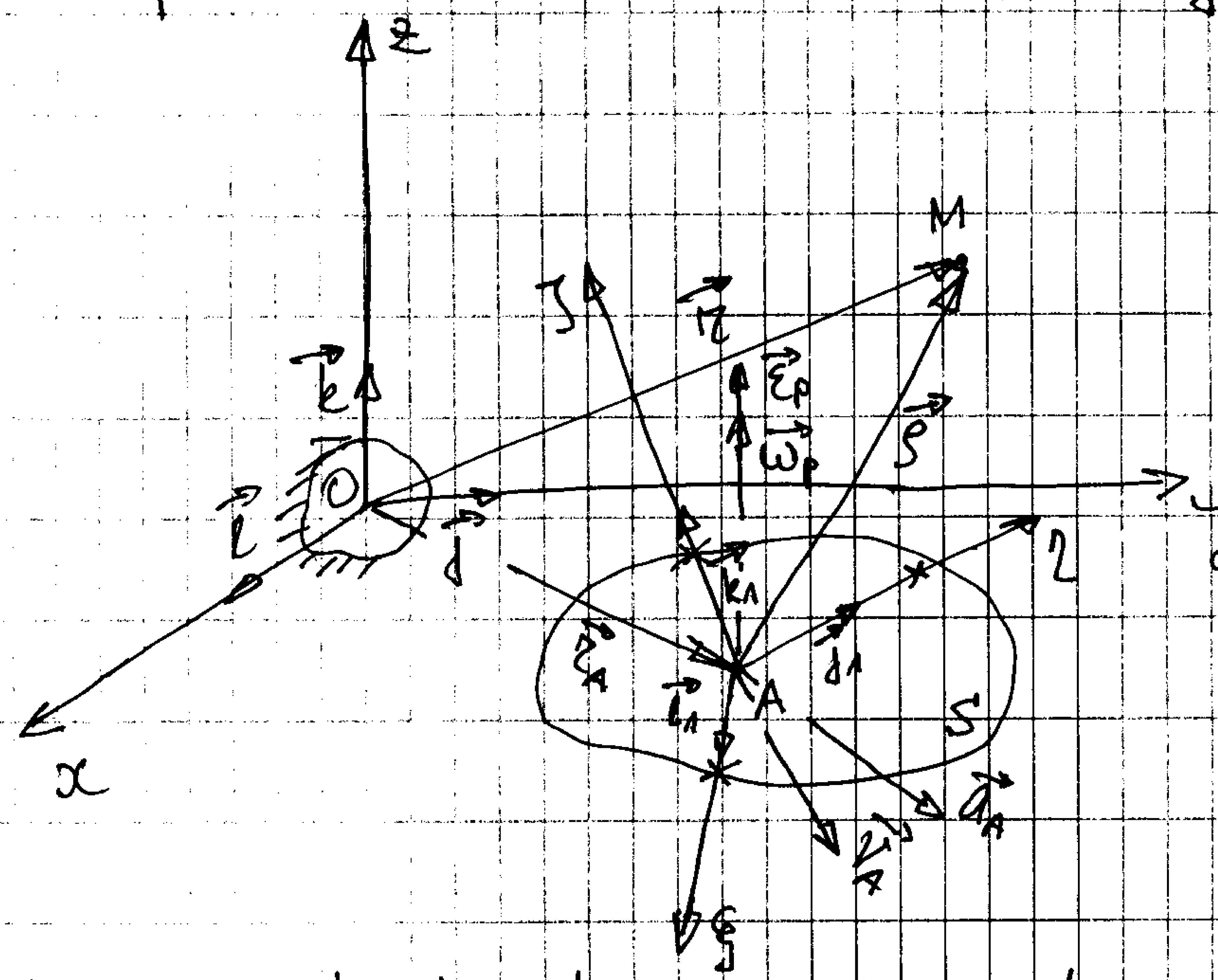
3. Složeno kretanje tačke

Ako se tačka M kreće u odnosu na tijelo (koordinatni sistem vezan za njega) koje se takođe kreće, tada se kaže da ona vrši složeno kretanje u odnosu na nepokretni koordinatni sistem (nepokretnog posmatrača).



$Oxyz$ – nepokretni koor. sistem

$A\xi\eta\zeta$ – koordinatni sistem sa jediničnim vektorima $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, vezan za ploču S koja se kreće u ravni Oxy tako da su $\vec{v}_A$ i $\vec{a}_A$ brzina i ubrzanje pola A, a $\vec{\omega}_p$ i $\vec{\varepsilon}_p$ ugaona brzina i ugaono ubrzanje ravanskog kretanja.

– Kretanje pokretnog koordinatnog sistema (ploče S) zove se prenosno kretanje.

– Kretanje tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ zove se relativno kretanje tačke. Ono je u vektorskom obliku definisano jednačinom

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t) = \xi(t)\vec{i}_1 + \eta(t)\vec{j}_1 + \zeta(t)\vec{k}_1$$

– Kretanje koje vrši tačka M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ zove se apsolutno (složeno) kretanje tačke. Zakon apsolutnog kretanja zadaje se jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Očigledno je $\vec{r}(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}(t)$

3.1 Brzina tačke pri složenom kretanju (teorema o slaganju brzina):

Apsolutna brzina $\vec{v}$ tačke M jednaka je vektorskom zbiru prenosne $\vec{v}_p$ i relativne $\vec{v}_r$ brzine tačke, tj.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r}$$

– Apsolutna brzina je brzina tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$, tj $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

– Relativna brzina $\vec{v}_r$ karakteriše promjenu relativnog vektora položaja $\vec{\rho}$ tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$:

$$\vec{v}_r = \dot{\xi}\vec{i}_1 + \dot{\eta}\vec{j}_1 + \dot{\zeta}\vec{k}_1$$

– Prenosna brzina $\vec{v}_p$ tačke M je brzina tačke pokretnog koordinatnog sistema koja se u datom trenutku poklapa sa pokretnom tačkom M. U slučaju kada pokretni sistem izvodi opšte ravno kretanje biće

$$\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}$$

gdje su: $\vec{v}_A$ – brzina pola A (početka pokretnog koor. sistema), $\vec{\omega}_p$ – ugaona brzina pokretnog koordinatnog sistema (prenosna ugaona brzina).

3.2 Ubrzanje tačke pri složenom kretanju (teorema o slaganju ubrzanja):

Apsolutno ubrzanje $\vec{a}$ tačke M jednako je vektorskom zbiru prenosnog $\vec{a}_p$, relativnog $\vec{a}_r$ i Koriolisovog ubrzanja $\vec{a}_c$, tj.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_c}$$

– Apsolutno ubrzanje $\vec{a}$ tačke M je ubrzanje u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

– Relativno ubrzanje $\vec{a}_r$ je ubrzanje tačke M u odnosu na pokretni koor. sistem $A\xi\eta\zeta$ i karakteriše promjenu relativne brzine pri relativnom kretanju:

$$\vec{a}_r = \ddot{\xi}\vec{i}_1 + \ddot{\eta}\vec{j}_1 + \ddot{\zeta}\vec{k}_1$$

– Prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ je jednako ubrzanju one tačke pokretnog koordinatnog sistema sa kojom se pokretna tačka M u datom trenutku poklapa. U slučaju kada sistem $A\xi\eta\zeta$ izvodi opšte ravno kretanje, biće:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}),$$

gdje su: $\vec{a}_A$ – ubrzanje pola A, $\vec{\omega}_p$ i $\vec{\varepsilon}_p$ ugaona brzina i ugaono ubrzanje pokretnog koor. sistema. Prenosno ubrzanje karakteriše promjenu prenosne brzine pri prenosnom kretanju.

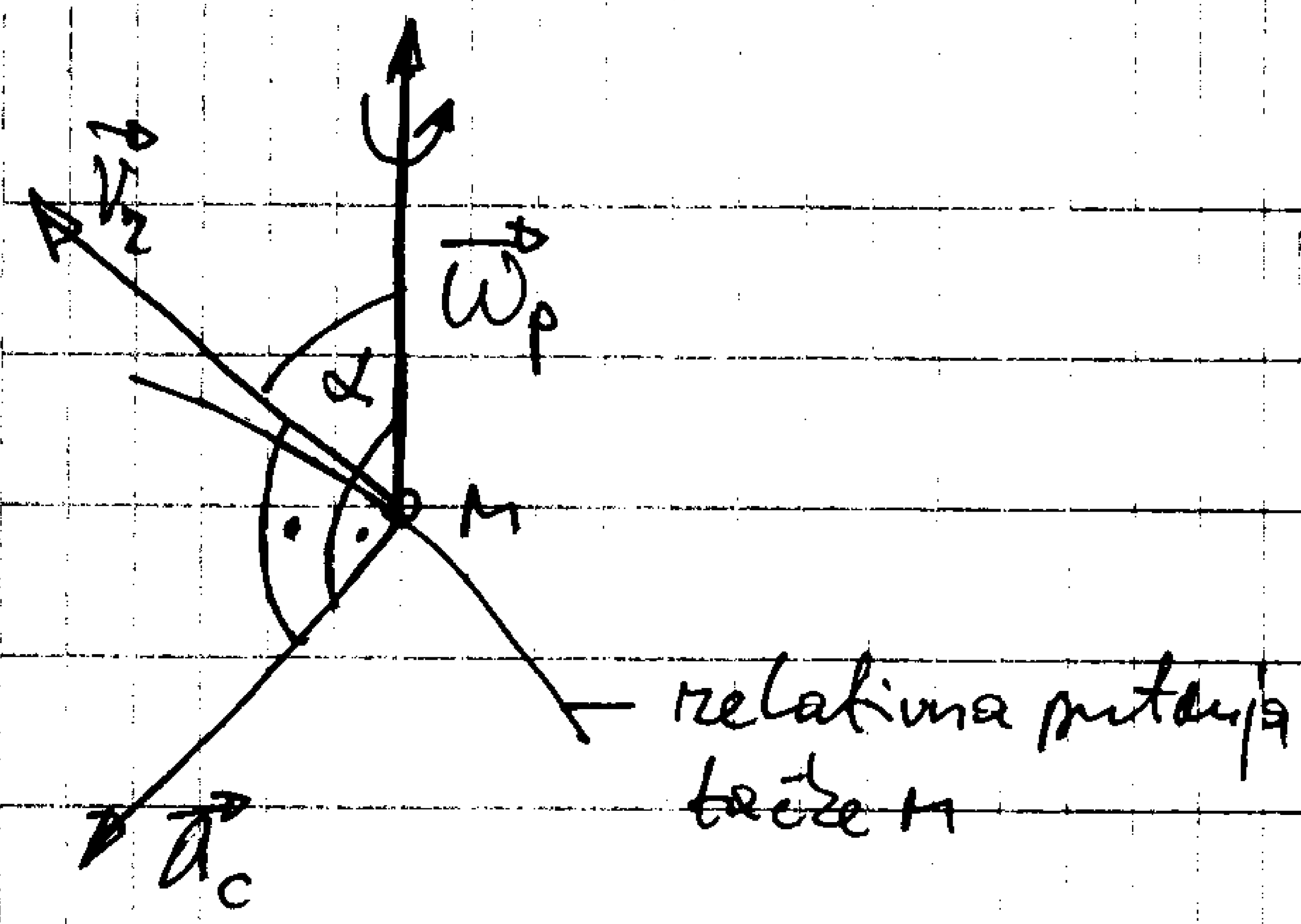
– Koriolisovo ubrzanje $\vec{a}_c$ karakteriše promjenu prenosne brzine usled relativnog kretanja, kao i promjenu relativne brzine usled prenosnog kretanja. Ono je određeno sledećim izrazom:

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

Vektor $\vec{a}_c$ upravan je na ravan koju obrazuju vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$ a usmjeren je tako da ~~se~~ se obrtanje vektora $\vec{\omega}_p$ najkraćim putem ka vektoru $\vec{v}_r$ gledano sa vrha $\vec{a}_c$ vidi u smjeru suprotnom od smjera obrtanja kazaljke na satu.

Intezitet Koriolisovog ubrzanja je

$a_c = 2\omega_p v_r \sin\alpha$, $\alpha = \sphericalangle(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r)$



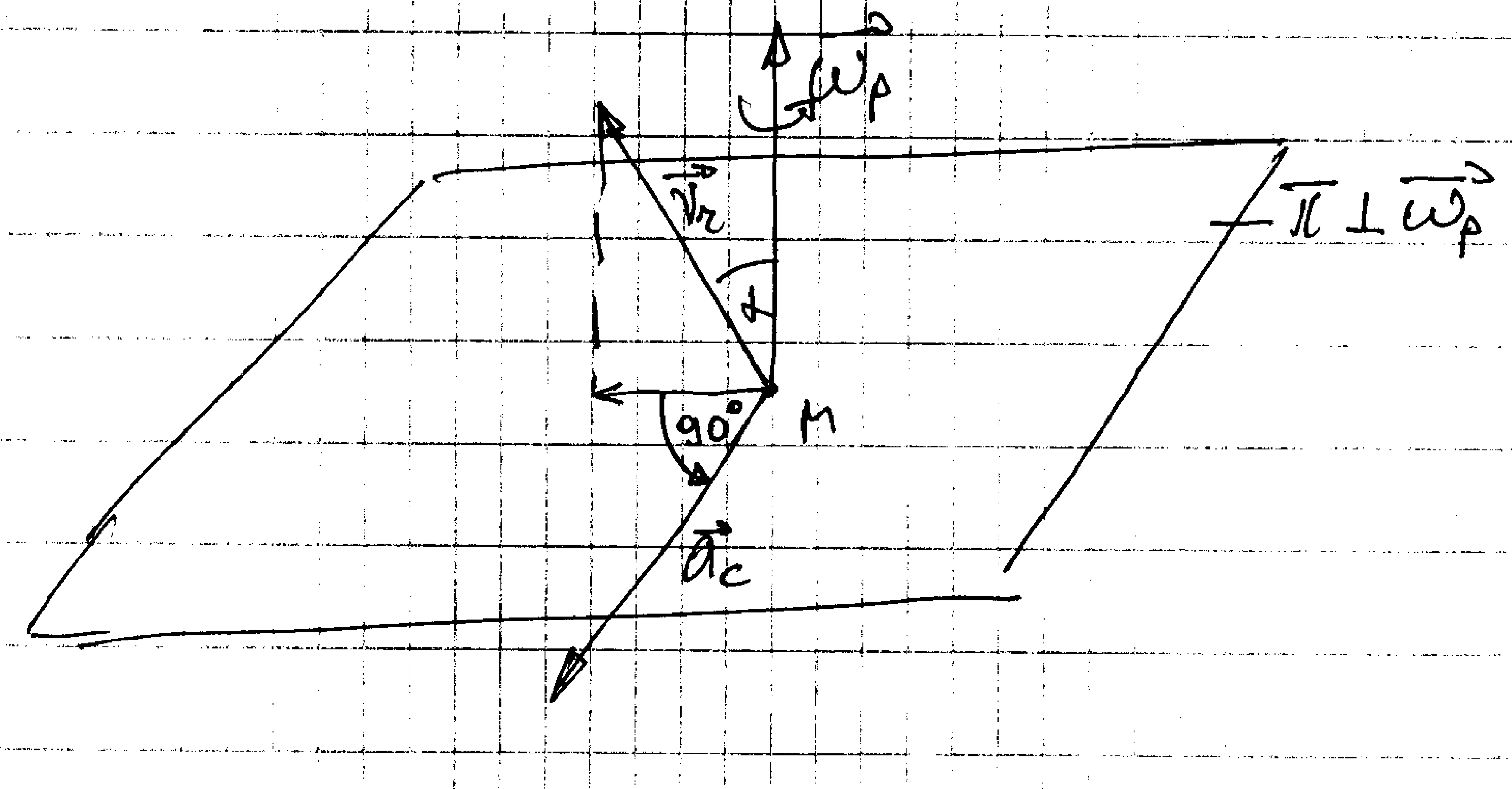
Koriolisovo ubrzanje jednako je nuli u sledećim slučajevima:

1) Ako je $\omega_p = 0$, što može biti samo u nekom trenutku, ili pak na konačnom intervalu vremena kada je prenosno kretanje translacija.

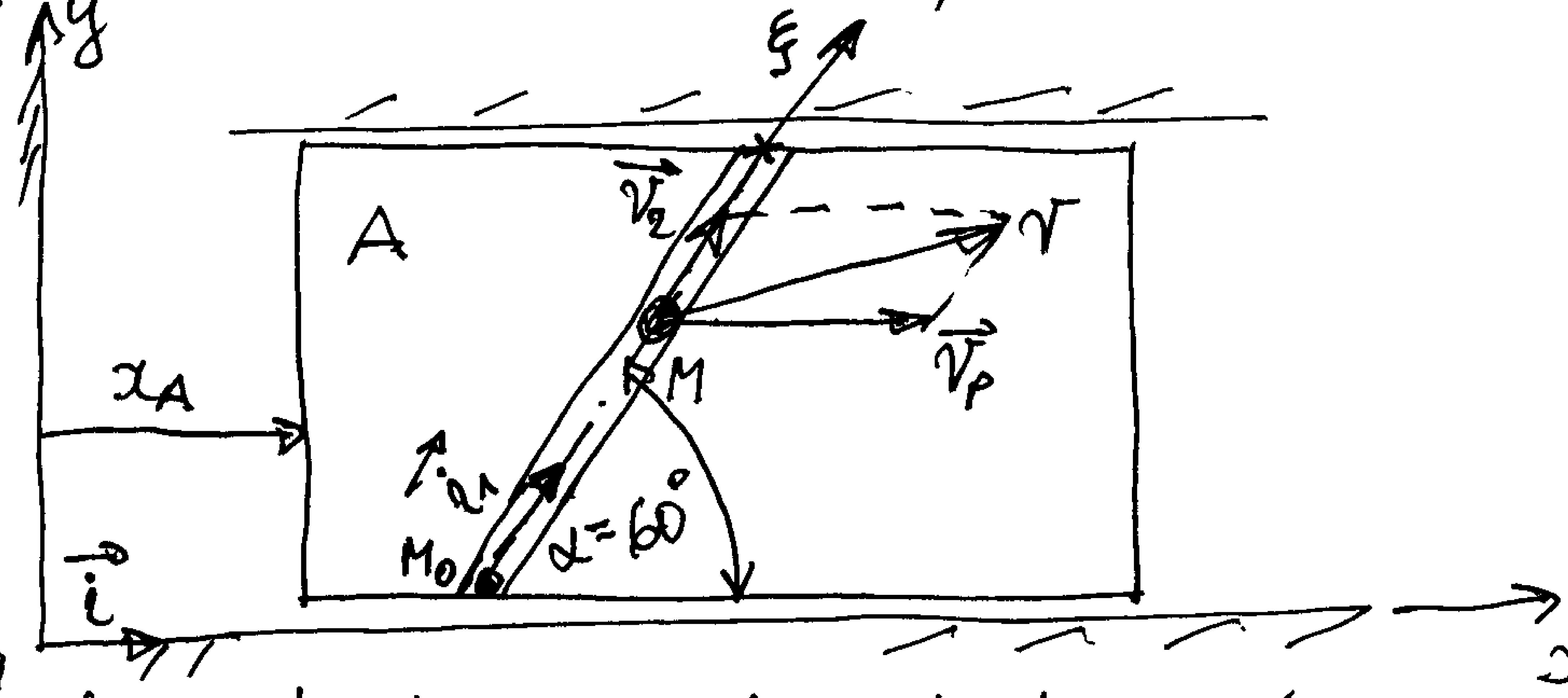
2) Ako je $v_r = 0$

3) Ako je $\vec{\omega}_p \parallel \vec{v}_r$

Pravac i smjer Koriolisovog ubrzanja može se jednostavno odrediti primjenom sledećeg pravila: Projekciju vektora $\vec{v}_r$ na ravan upravnu na vektor prenosne (ugaone) brzine ω_p treba zaokrenuti za ugao $90°$ u smjeru prenosnog obrtanja.



Primjer 1. Klizač A kreće se u horizontalnim vođicama po zakonu $x_A = 0,3\sin(\pi t/3)$ [m]. Kuglica M kreće se u kanalu, izbušenim u klizaču, po zakonu $M_0M = 0,1t^3$ [m]. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje kuglice M u trenutku $t = 0,5$ [s].



Prenosno kretanje je translatorno kretanje klizača po zakonu

$x_A = 0,3\sin(\pi t/3)$

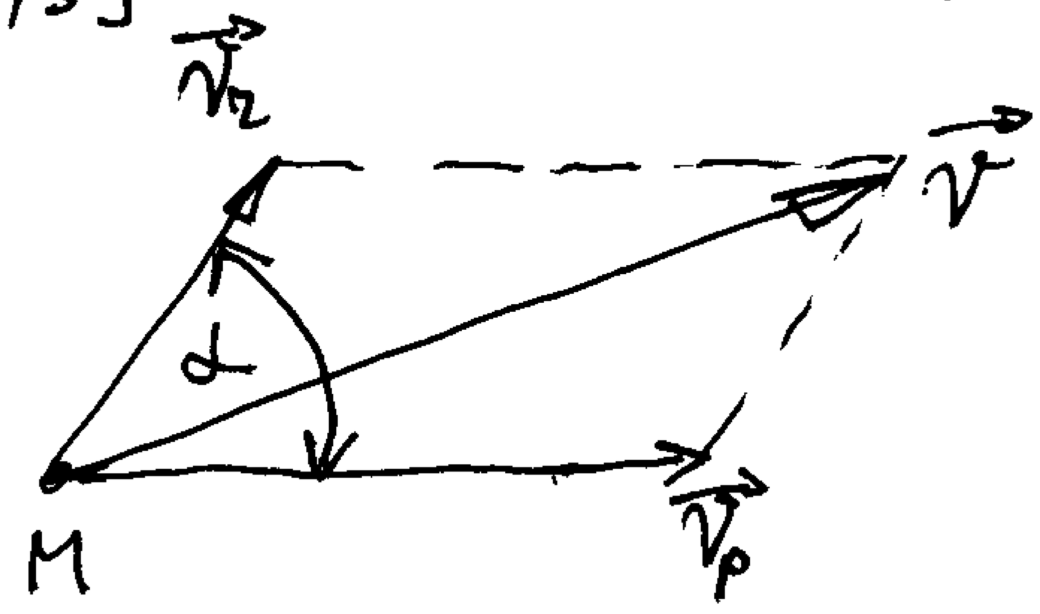
Relativno kretanje tačke M (kuglice) je pravolinijsko kretanje i za definisanje relativnog kretanja dovoljna je jedna pokretna osa (vezana za klizač) $M_0\xi$ u pravcu kanala klizača. Jednačina relativnog kretanja je $\xi = 0,1t^3$.

a) Određivanje apsolutne brzine $\vec{v}$ tačke M

$\vec{v}_p = v_p\vec{i}$, $v_p = \dot{x}_A = 0,1\pi\cos(\pi t/3)$ [m/s] – prenosna brzina

$\vec{v}_r = v_r\vec{i}_1$, $\cancel{\dot{\xi}\vec{i}_1 = 0,3t^2}$ $v_r = \dot{\xi} = 0,3t^2$ [m/s] – relativna brzina

Za $t = 0,5$ s: $v_p = 0,27\,\frac{m}{s}$, $v_r = 0,075\,\frac{m}{s}$



$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r$ – apsolutna brzina

$$v = \sqrt{v_p^2 + v_r^2 + 2v_pv_r\cos\alpha} = \boxed{0,31\,\frac{m}{s}}$$

b) Određivanje apsolutnog ubrzanja $\vec{a}$ tačke M

$\vec{a}_p = a_p\vec{i}$, $a_p = \dot{v}_p = \ddot{x}_A = -0,1\frac{\pi^2}{3}\sin(\pi t/3)$ [m/s²] – prenosno ubrzanje

$\vec{a}_r = a_r\vec{i}_1$, $a_r = \dot{v}_r = \ddot{\xi} = 0,6t$ [m/s²] – relativno ubrzanje

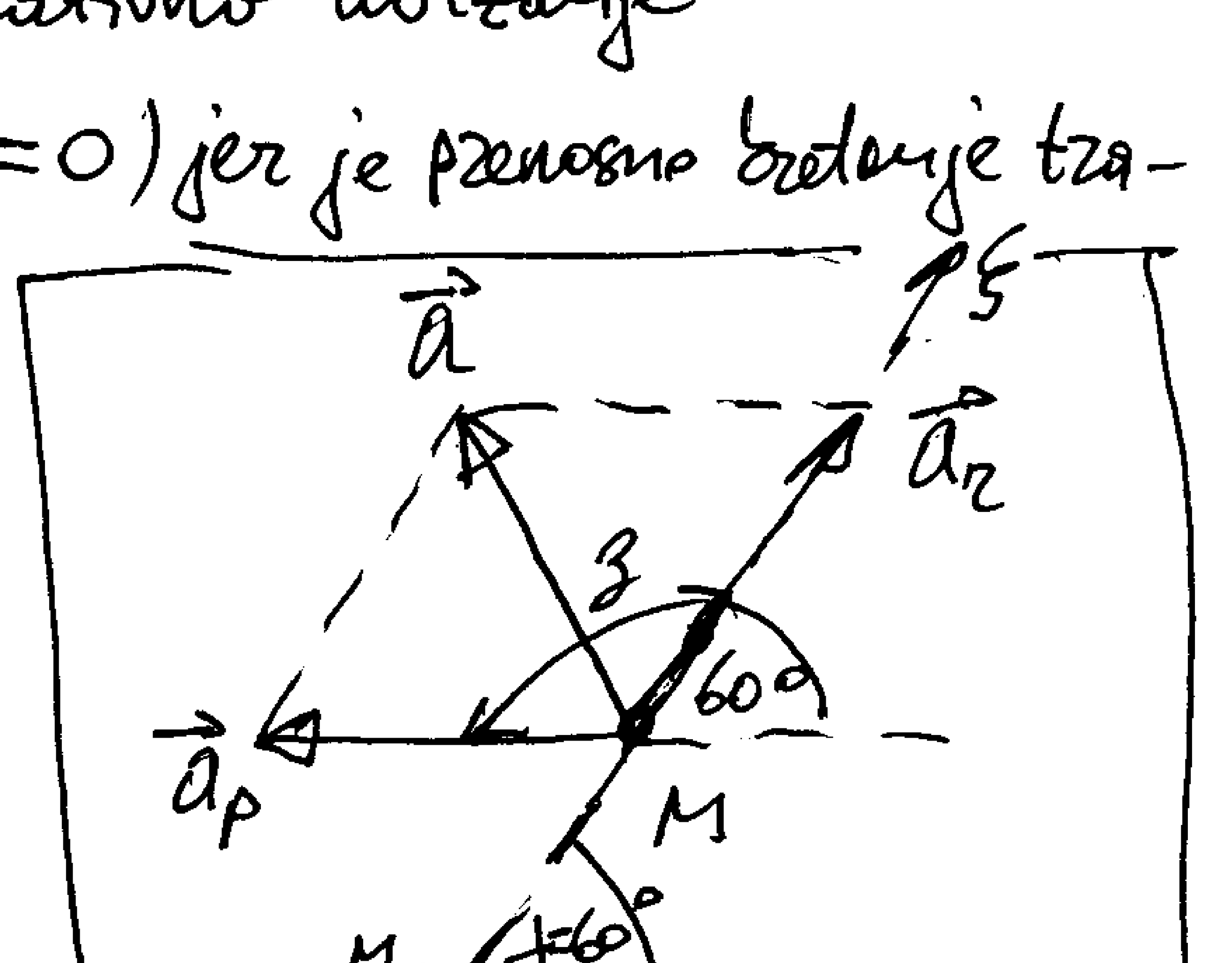
Koriolisovo ubrzanje je jednako nuli ($a_c = 0$) jer je prenosno kretanje translacija.

Za $t = 0,5$ s: $a_p = -0,16\,\frac{m}{s^2}$, $a_r = 0,3\,\frac{m}{s^2}$

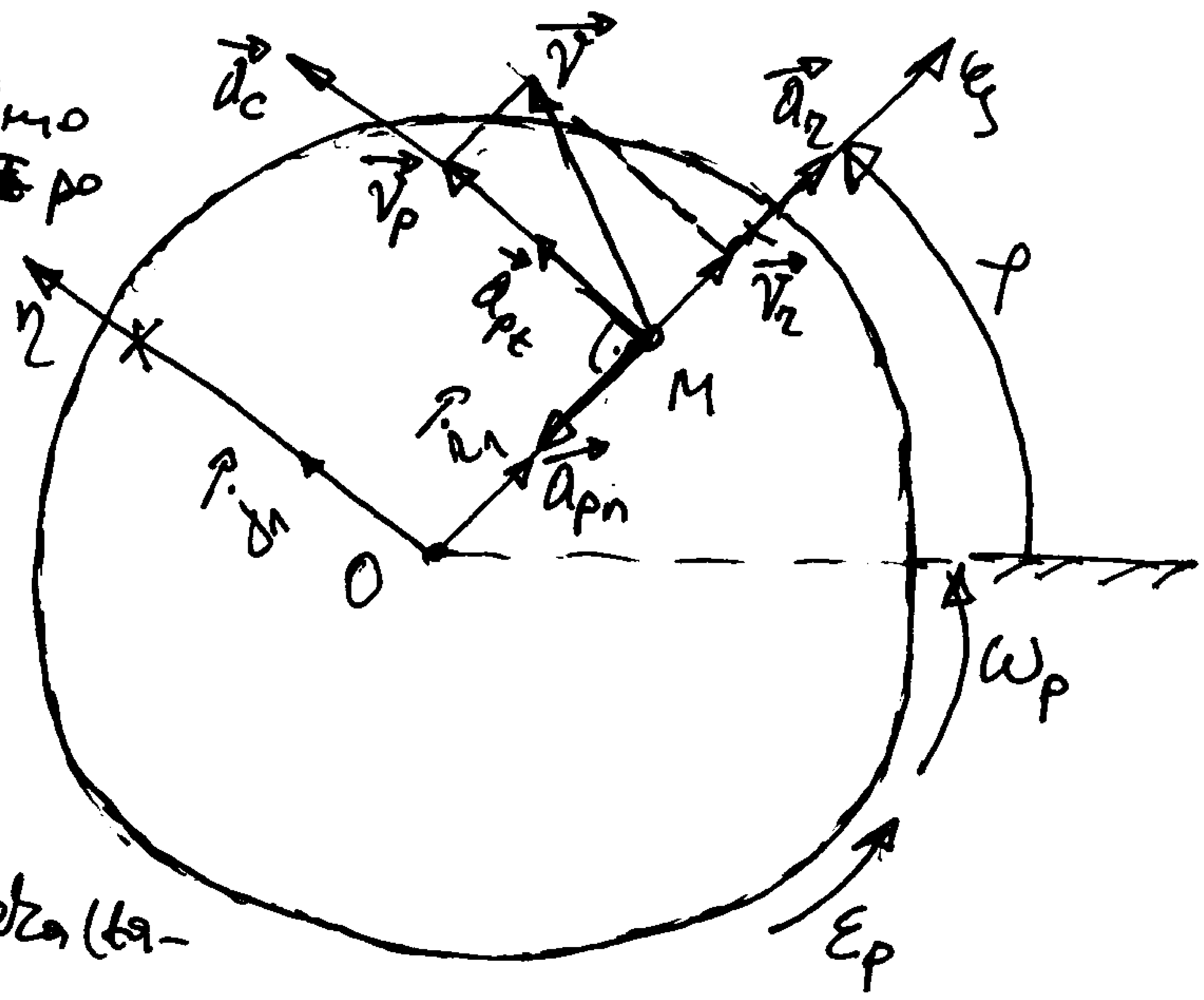
$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \cancel{\vec{a}_c}^{\,0}$ – apsolutno ubrzanje

$$a = \sqrt{a_p^2 + a_r^2 + 2|a_p||a_r|\cos\beta}, \quad \beta = 180° - 60° = 120°$$

$$\boxed{a = 0,26\,\frac{m}{s^2}}$$



Primjer 2. Kružna horizontalna platforma obrće se oko tačke O po zakonu $\varphi = 0,1\,t^2$ [rad]. Duž jednog poluprečnika platforme kreće se čovjek (tačka M) po zakonu $\overline{OM} = 0,2t^2$ [m]. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = 5$ s.



Pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta$ vežimo za platformu tako da ξ-osa pada po poluprečniku duž kog se kreće čovjek.

Prenosno kretanje je okretanje platforme u odnosu na Zemlju za koju je vezan nepokretni koor. sistem.

Relativno kretanje tačke M je pravolinijsko kretanje duž ose $O\xi$ po zakonu

$$\overline{OM} = \xi = 0,2\,t^2$$

Apsolutno kretanje je kretanje čovjeka (tačke M) u odnosu na Zemlju.

a) Određivanje apsolutne brzine

$$\overline{OM}\big|_{t=5} = 5\,m$$

$v_r = \dot{\xi} = 0,4t$ [m/s] – relativna brzina

$\omega_p = \dot{\varphi} = 0,2\,t$ [s^{-1}] – prenosna ugaona brzina, $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r}$

$v_p = \omega_p \overline{OM} = 0,04t^3$ [m/s] – prenosna brzina tačke M, $\vec{v}_p \perp \overline{OM}$

Za t = 5 s: $v_r = 2\,\frac{m}{s}$, $v_p = 5\,\frac{m}{s}$, $v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = 5,4\,\frac{m}{s}$ – apsolutna brzina

b) Određivanje apsolutnog ubrzanja: $\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

$a_r = \dot{v}_r = \ddot{\xi} = 0,4$ [m/s^2] – relativno ubrzanje

tangencijalno

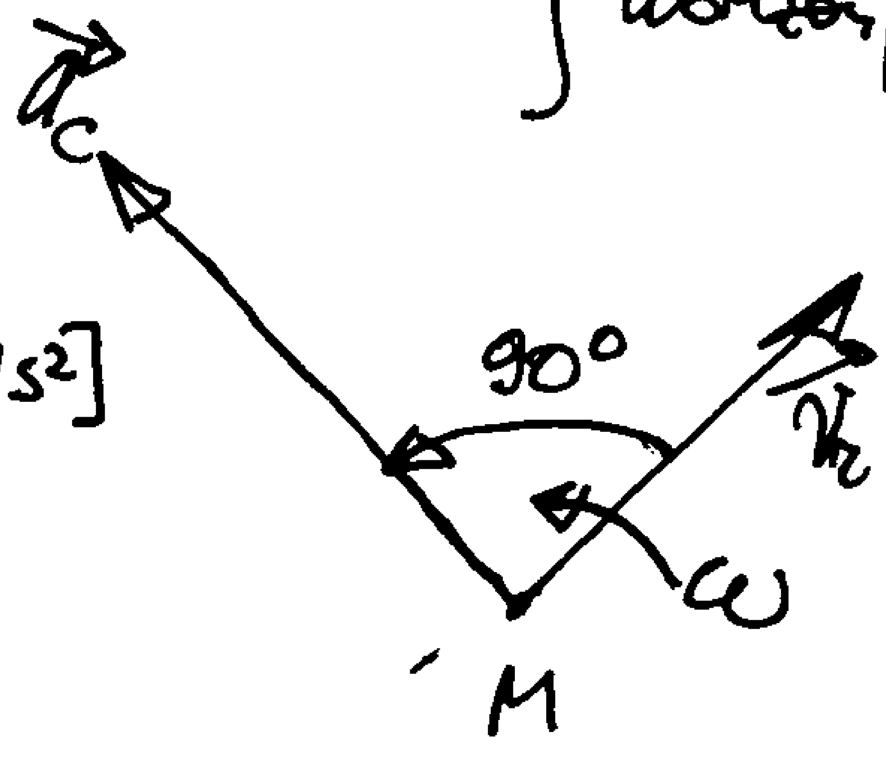
normalno

$\vec{a}_p = \vec{a}_{pt} + \vec{a}_{pn}$, $a_{pt} = \varepsilon_p \overline{OM}$, $a_{pn} = \omega_p^2 \overline{OM} = 0,008t^4$ [m/s^2] } prenosno ubrzanje

$\varepsilon_p = \dot{\omega}_p = \ddot{\varphi} = 0,2$ [s^{-2}] $\rightarrow a_{pt} = 0,04t^2$ [m/s^2]

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$ – Koriolisovo ubrzanje

$a_c = 2\,\omega_p v_r \sin\angle(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r) = 2\omega_p v_r \sin 90^\circ = 0,16t^2$ [m/s^2]



Za t = 5 s: $a_r = 0,4$; $a_{pt} = 1$; $a_{pn} = 5$; $a_c = 4$

$$\vec{a} = \vec{a}_{pt} + \vec{a}_{pn} + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$a_\xi = -a_{pn} + a_r = -4,6\ m/s^2$

$a_\eta = a_{pt} + a_c = 5\ m/s^2$

$\boxed{a = \sqrt{a_\xi^2 + a_\eta^2} = 6,8\,\frac{m}{s^2}}$ – apsolutno ubrzanje

Tehnička mehanika II

Pitanja za I kolokvijum

1. Koji su osnovni zadaci kinematike tačke?
2. Kako se definiše kretanje tačke u Dekarovim koordinatama?
3. Kako se definiše kretanje tačke u prirodnom postupku?
4. Definisati srednju i trenutnu brzinu tačke.
5. Kako se određuje brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu u ravni?
6. Kako se određuje brzina tačke pri prirodnom postupku definisanja kretanja?
7. Definisati srednje i trenutno ubrzanje tačke.
8. Kako se određuje ubrzanje tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu u ravni?
9. Kako se određuje ubrzanje tačke pri prirodnom postupku definisanja kretanja?
10. Za slučaj jednolikog pravolinijskog kretanja tačke napisati konačnu jednačinu kretanja.
11. Za slučaj jednakopromjenljivog pravolinijskog kretanja tačke napisati zakon promjene brzine i konačnu jednačinu kretanja.
12. Kako se definiše translatorno kretanje krutog tijela i kako glase konačne jednačine tog kretanja.
13. Kako se definiše obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose i kako glasi konačna jednačina obrtanja.
14. Definisati srednju i trenutnu ugaonu brzinu krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose.
15. Definisati srednje i trenutno ugaono ubrzanje krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose.
16. Kako se određuje brzina tačke krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose?
17. Kako se određuje ubrzanje tačke krutog tijela koje se obrće oko nepokretne ose?
18. Za slučaj jednolikog obrtanja napisati konačnu jednačinu kretanja.
19. Za slučaj jednakopromjenljivog obrtanja napisati zakon promjene ugaone brzine i konačnu jednačinu obrtanja.
20. Kako se definiše ravno kretanje krutog tijela i kako glase konačne jednačine njegovog kretanja?
21. Kako glasi teorema o brzinama kod ravnog kretanja i koja je njena posledica?
22. Šta je trenutni pol brzina i kako se određuje?
23. Kako se određuje ubrzanje tačke tijela pri ravnom kretanju?
24. Šta je apsolutno, relativno i prenosno kretanje tačke?
25. Kako se određuje brzina tačke pri složenom kretanju?
26. Kako se određuje ubrzanje tačke pri složenom kretanju?
27. Kako se definiše Koriolisovo ubrzanje? Kada je ono jednako nuli?