

## 4. Dinamika materijalne tačke

Dinamika je dio mehanike koji proučava kretanja materijalnih tijela pod dejstvom sila.

Materijalnom tijelu se pridružuje pojam mase, kao mjere inercije tijela - svojstva materijalnog tijela da se protivi promjeni stanja svog kretanja. Masa je pozitivna skalarna veličina; njena jedinica mjere je kilogram (kg), i to je osnovna jedinica u međunarodnom sistemu (SI) jedinica.

Sila je veličina koja predstavlja količinsku mjeru uzajamnog dejstva materijalnih tijela. Ona je, kao što je poznato iz statike, vektorska veličina koja je određena svojim intenzitetom, pravcem i smjerom.

Materijalna tačka je najjednostavniji model u dinamici. To je materijalno tijelo čije se dimenzije pri proučavanju kretanja mogu zanemariti. Drugim riječima, to je geometrijska tačka koja posjeduje konačnu masu. Ova idealizacija je opravdana kada su predena razmatranja, koja izuze tačke tijela, mnogo veća od dimenzija samog tijela. Takođe, translatorno kretanje tijela može se uvijek tretirati kao kretanje materijalne tačke čija je masa jednaka masi tijela.

### 4.1 Osnovni zakoni dinamike (Njutnovi zakoni)

Osnovni zakoni dinamike odnose se na model materijalne tačke. Oni imaju status aksioma, tj. usvajaju se bez doazivanja, a njihova ispravnost je potvrđena mnogovjekovnom praktičnom djelatnošću čovjeka. Formulirao ih je Isaac Njuton u svom čuvenom djelu "Matematički osnovi prirodne filozofije" izdatom 1687. godine.

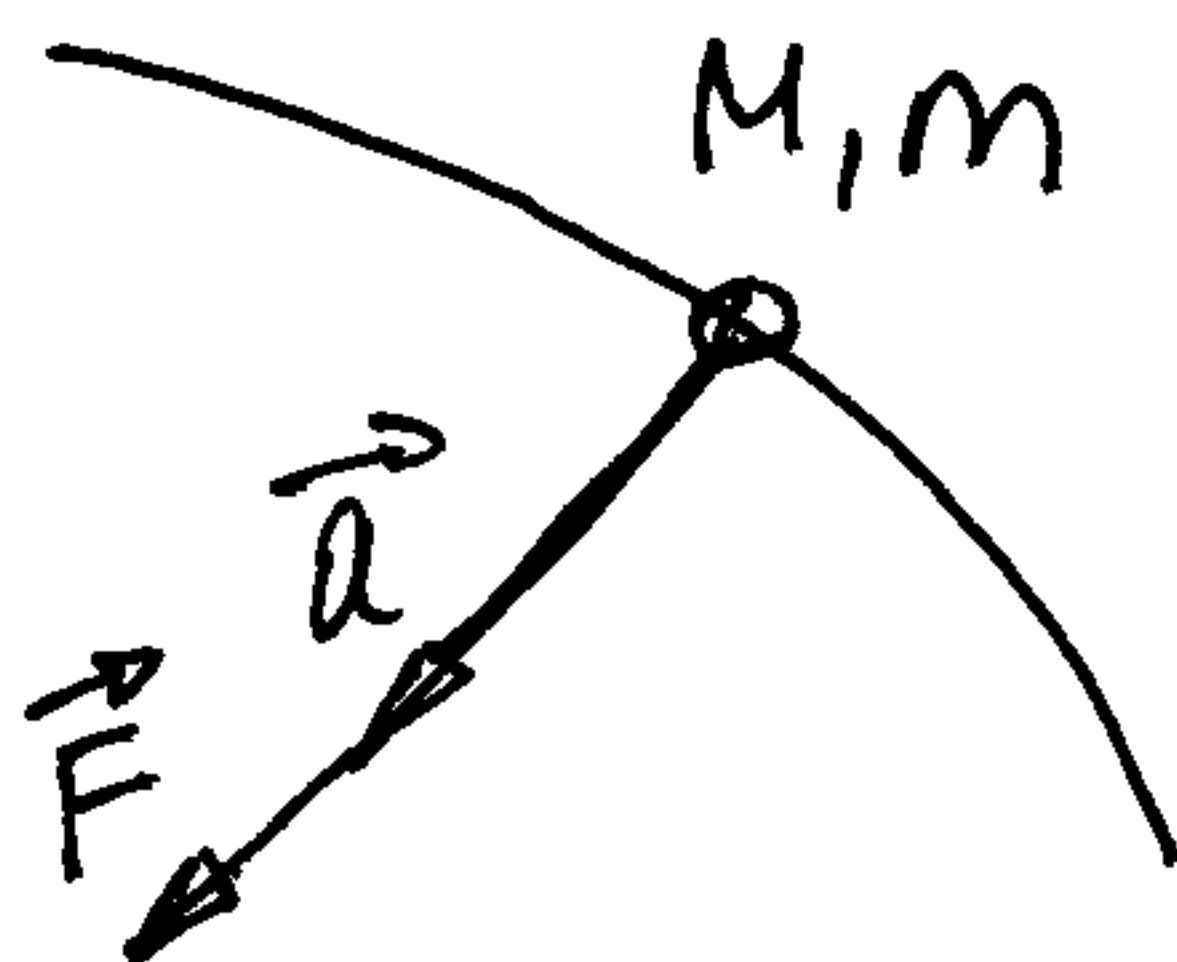
Prvi Njutnov zakon (zakon inercije). Materijalna tačka ostaje u stanju mirovanja ili jednolizog pravolinijskog kretanja sve dok pod dejstvom sile ne bude primetena da to stanje promijeni.

Drugi Njutnov zakon (osnovni zakon dinamike). Proizvod mase i ubrzanja materijalne tačke, koje ona dobija kada na nju djeluje sila, jednak je po intenzitetu toj sili a pravac i smjer ubrzanja se poklapaju sa pravcem i smjerom sile.

Ako je  $m$  - masa tačke,  $\vec{a}$  - ubrzanje tačke i  $\vec{F}$  - sila koja djeluje na tačku, onda se ovaj zakon izražava vektorskom jednačinom:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

koja se često naziva osnovna jednačina dinamike materijalne tačke.



Ako na materijalnu tačku djeluje istovremeno više sila  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , njihovo se dejstvo može zamijeniti dejstvom jedne sile - rezultante tih sila. U ovom slučaju drugi Njutnov zakon ima oblik

$$m\vec{a} = \vec{F}_2 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

gdje je  $\vec{F}_2 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  rezultanta svih sila koje djeluju na uočenu tačku.

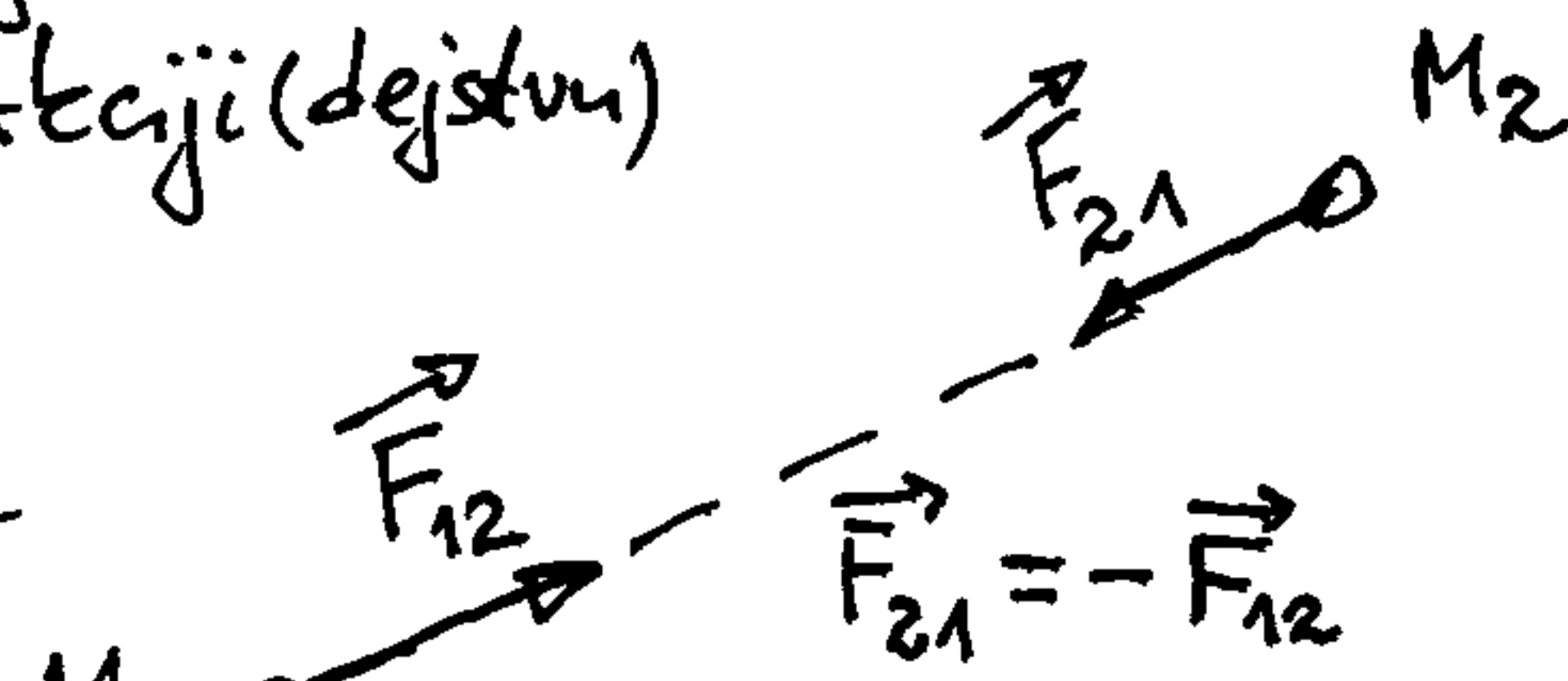
Prvi i drugi Njutnov zakon važe u inercijalnim koordinatnim sistemima. To su koordinatni sistemi koji su nepokretni u odnosu na apsolutni (nepokretni) prostor, čije je postojanje Njuti pretpostavio, ili koji se kreću translatorno, pravolinijski i jednoliko. Strogo govoreći, takvi sistemi referencije ne postoje, ali se za većinu tehničkih zadataka, sa praktično zadovoljavajućom tačnošću, može smatrati da je koordinatni sistem vezan za površinu Zemlje inercijalni.

Jedinica za silu u SI sistemu je izvedena na osnovu (1) i zove se Njuti (N):  $1\text{ N} = 1\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . To je sila koja materijalnoj tački mase od  $1\text{ kg}$  saopštava ubrzanje od  $1\text{ m/s}^2$ .

Treći Njutnov zakon (zakon akcije i reakcije). Dvije materijalne tačke djeluju jedna na drugu silama jednakih intenziteta, suprotno usmjerenim duž pravce koja spaja te tačke.

Kraće, često se ovaj zakon izražuje riječima: Akciji (dejstvu) uvijek je jednaka reakcija (protivdejstvo).

Ovaj zakon ukazuje na izvor sile, tj. pokazuje da je za postojanje sile potrebno najmanje dva materijalna tijela od kojih je jedno izvor sile. Dejstvo sile se može ostvariti direktno - neposrednim kontaktom dva tijela ili indirektno - posredstvom fizičkog polja (npr, dejstvo gravitacionog polja Zemlje na tijelo u njenoj blizini).

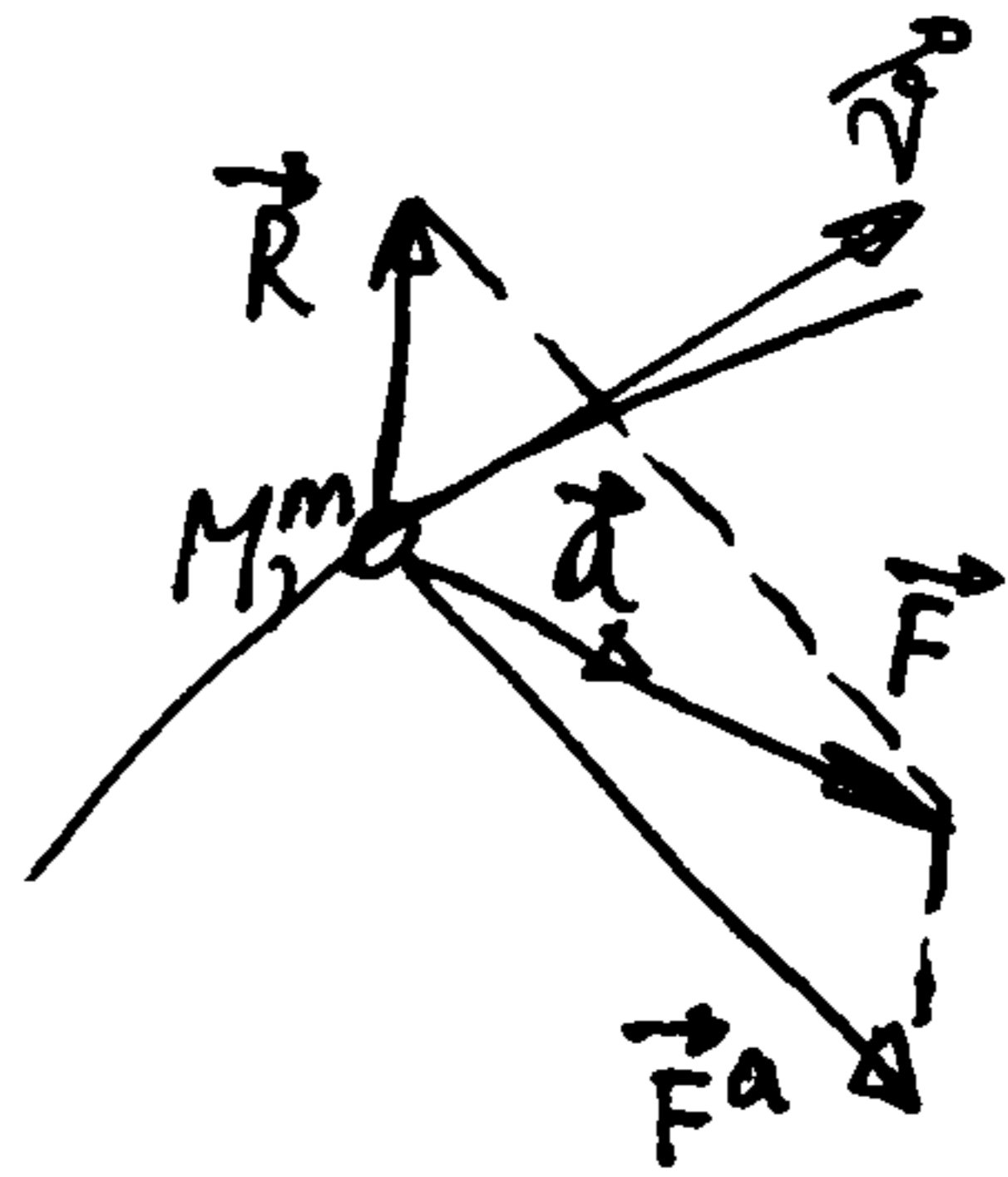


Napomena o neslobodnom kretanju tačke. Važno je istaći da je drugi Njutnov zakon formulisan za slobodnu materijalnu tačku - tačku koja može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru. U slučaju vezanog (neslobodnog) kretanja primjenjuje se aksiom oslobađanja od veza: Neslobodnu materijalnu tačku možemo posmatrati kao da je slobodna ako veze (tijela koja ograničavaju njeno kretanje) uklonimo i njihovo dejstvo na datu tačku zamijenimo silama reakcije veza. U skladu sa ovim, osnovna jednačina dinamike neslobodne tačke je oblika



$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{F}^a + \vec{R}, \quad (2)$$

gdje je  $\vec{F}^a$  rezultanta aktivnih sila (sila koje djeluje na materijalnu tačku bez obzira da li veze postoje ili ne), a  $\vec{R}$  rezultanta sila reakcije veza.



#### 4.2 Nekoliko zakona sila

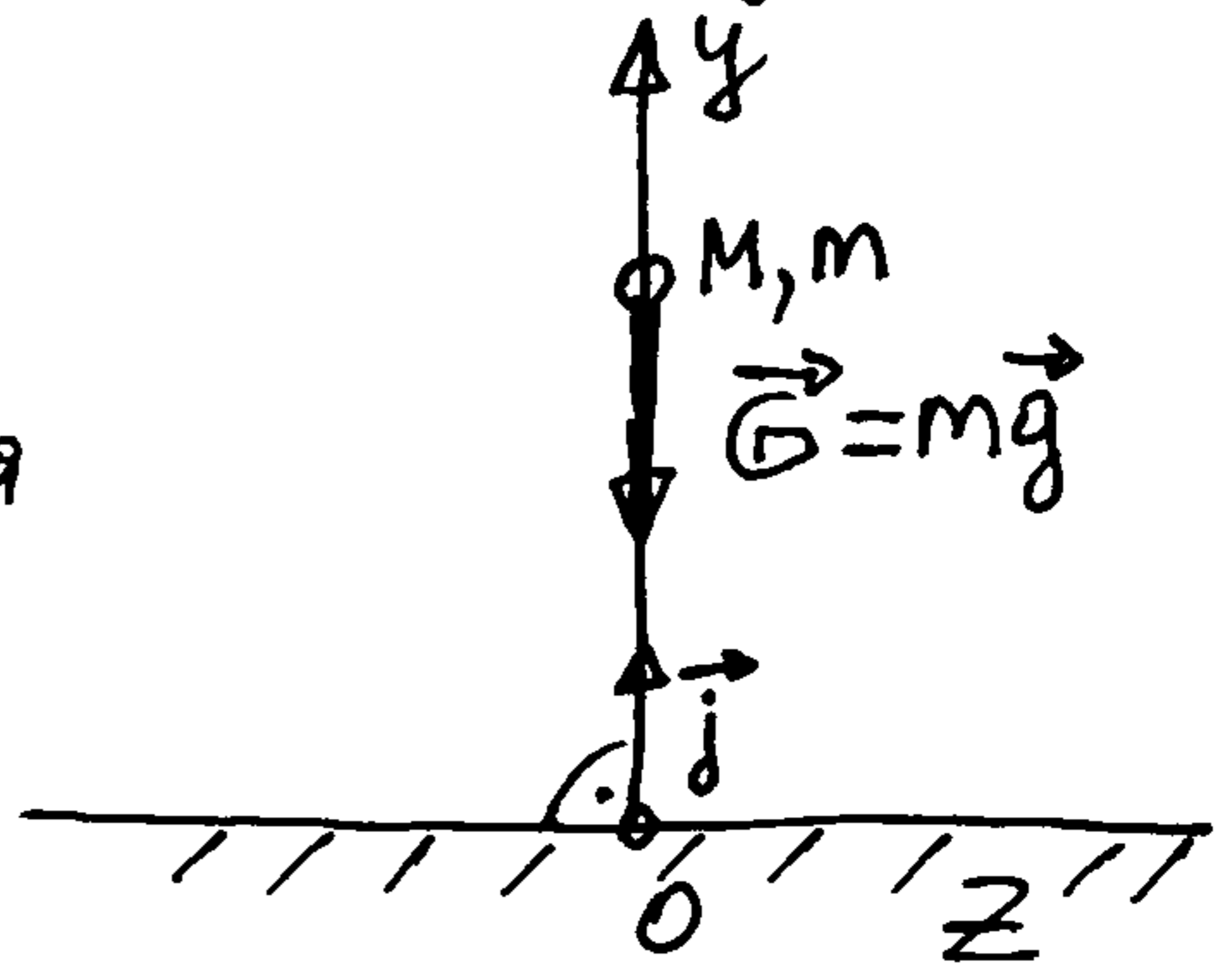
U opštem slučaju sila koja djeluje na materijalnu tačku može zavisiti od vremena  $t$ , položaja tačke  $\vec{r}$  i njene brzine  $\vec{v}$ :

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}). \quad (3)$$

Zakoni konkretnih sila (analitičke zavisnosti oblika (3)) se po pravilu utvrđuju eksperimentalno i dalje navodimo neke od njih.

##### a) Sila zemljine težine $\vec{G}$ .

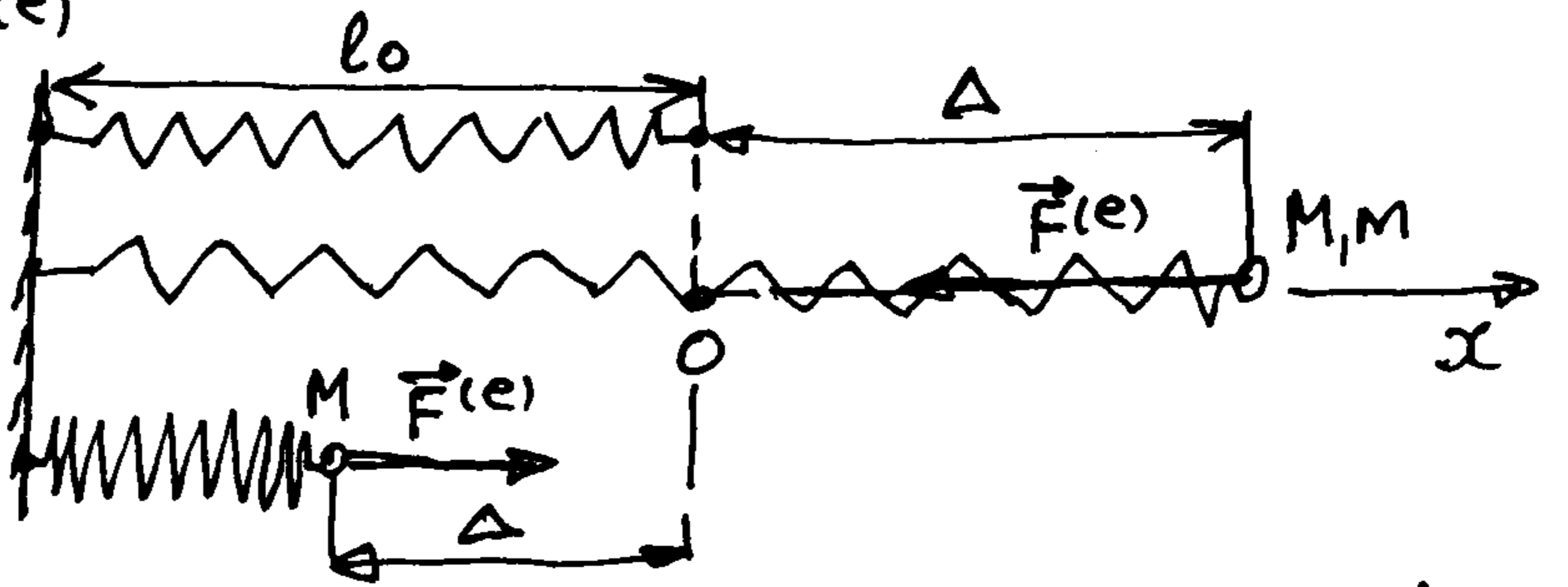
Ako se tijelo (materijalna tačka) mase  $m$  nalazi u blizini površine Zemlje (rastojanje tačke od Zemlje malo u odnosu na njen poluprečnik), onda se može smatrati da je sila kojom Zemlja privlači tijelo (sila težine) konstantna. Ona je određena težinom tijela  $G = mg$ , gdje je  $g$  ubrzanje slobodnog pada (ubrzanje sile težine), pravcem vertikale i smjerom ka Zemlji. Ubrzanje  $g$  zavisi od geografske širine mjesta, a za naša područja je  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Ako vertikalnu os  $y$  orijentisemo kao na slici, onda je sila težine



$$\vec{G} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$$

##### b) Elastična sila opruge $\vec{F}^{(e)}$

$l_0$  - dužina nedeformisane opruge. Intenzitet sile kojom opruga djeluje na materijalnu tačku  $M$  srazmjeran je (u domenu važenja Hukovog zakona) izduženju (skraćivanju) opruge  $\Delta$ , a konstanta proporcionalnosti je krutost opruge  $c: F^{(e)} = c\Delta$ . Sila  $F^{(e)}$  je usmjerena po osi opruge ka položaju koji odgovara kraju nedeformisane opruge. Ako  $x$ -osu postavimo kao na slici, elastičnu silu opruge možemo zapisati u vektorskom obliku:

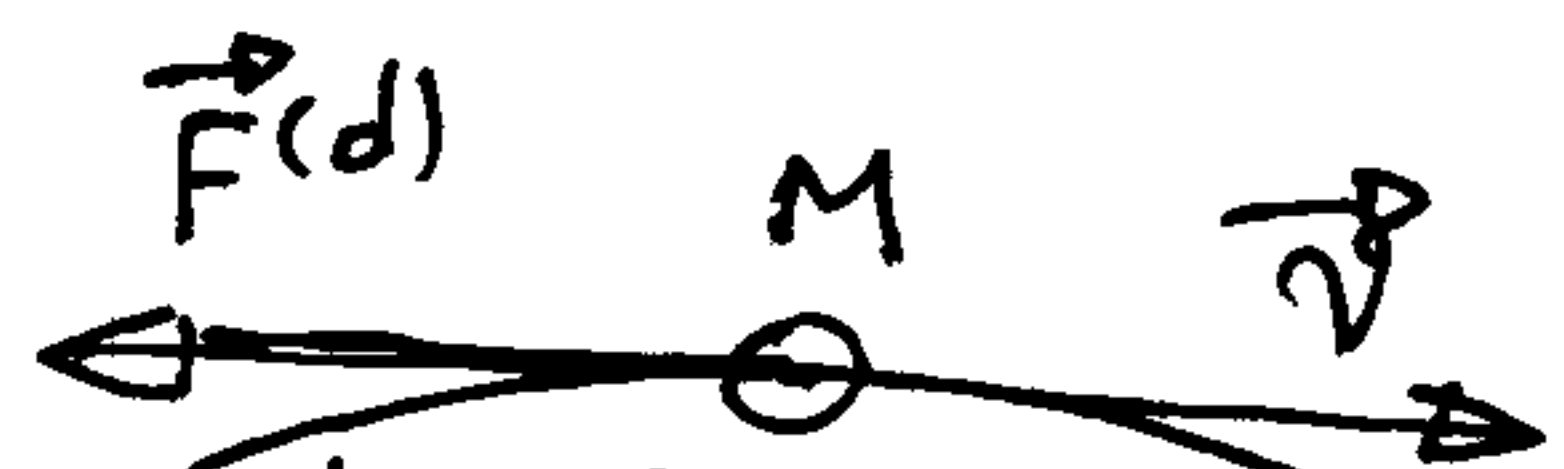


$$\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$$

i kao što vidimo ona zavisi od položaja tačke.

### c) Sile fluidnog otpora

Kada se tijelo kreće kroz fluid (vazduh, voda, ...) trpi određeni otpor koji suštinski zavisi od brzine. Sila otpora  $\vec{F}^{(d)}$  ima pravac brzine, a smjer suprotan od smjera kretanja. Opšti oblik zavisnosti sile otpora od brzine je



$$\vec{F}^{(d)} = -F^{(d)}(v) \frac{\vec{v}}{v}$$

Pri čemu se razlikuju dva tipična slučaja:

– viskozni otpor (javlja se pri manjim brzinama):  $F^{(d)} = \gamma v$ , tj.  $\vec{F}^{(d)} = -\gamma \vec{v}$ ,

– turbulentni otpor (javlja se pri većim brzinama):  $F^{(d)} = \gamma v^2$

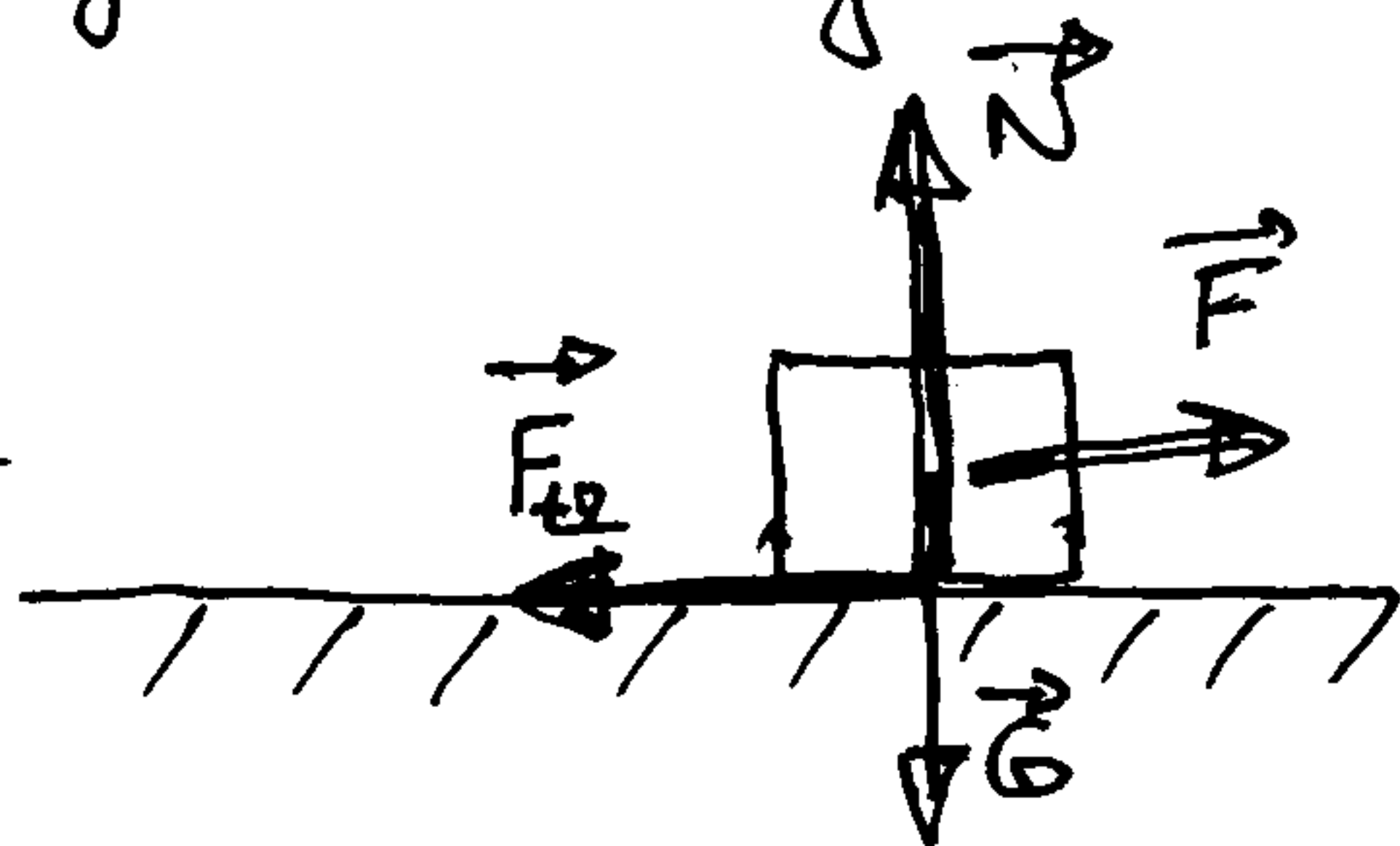
Koeficijenti  $\gamma$  i  $\gamma$  zavise od oblika tijela i fizičkih osobina otporne sredine.

### d) Sila suvog (Kulonovog) trenja

Kulonovo ili suvo trenje se javlja na mjestima dodirg dva tijela. Zbog hrapavosti tijela osim sile uzajamnog pritiska koja ima pravac normale na površine tijela u tački dodirg, javlja se i sila trenja koja leži u tangenatnoj ravni.

Ekperimenti potvrđuju da će tijelo koje se nalazi na hrapavoj horizontalnoj podlozi i izloženo je dejstvu <sup>aktivne</sup> horizontalne sile  $\vec{F}$  ostati u stanju mirovanja sve dok aktivna sila ne dostigne određenu granicnu vrijednost.

Ovu silu uzavotešuje sila trenja koja je usmjerena u suprotnom smjeru od smjera u kome aktivna sila leži da pomjeri tijelo. Dakle, u stanju mirovanja intezitet sile trenja se kreće između nule i granicne vrijednosti:



$$0 \leq F_{tr} \leq F_{gr}$$

Intezitet granicne sile trenja klizanja jednak je proizvodu statičkog koeficijenta trenja  $\mu_s$  i sile uzajamnog pritiska (normalne reakcije)  $N$ :

$$F_{gr} = \mu_s N$$

Koeficijent  $\mu_s$  se određuje eksperimentalno. Ako se tijelo kreće, g intezitet sile trenja je određen relacijom

$$F_{tr} = \mu_0 N,$$

(a smjer joj je suprotan smjeru brzine)

gdje je  $\mu_0$  dinamički koeficijent trenja. Dinamički koeficijent trenja je nešto manji od statičkog, ali se često, zbog jednostavnosti proračuna, uzima da je  $\mu_0 = \mu_s$ .



## 4.3 Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke

Neka se tačka  $M$ , mase  $m$ , kreće u inercijalnom (nepobremnom) sistemu referencije pod dejstvom rezultujuće sile  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ . Imajući u vidu relaciju (3), kao i definicije brzine i ubrzanja tačke,  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  i  $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ , drugi Njutnov zakon (1) dobija oblik

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}), \quad (4)$$

koji se naziva diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke u vektorskom obliku. Ona je diferencijalna jednačina drugog reda u kojoj je nezavisno promenljiva vrijeme  $t$ , a zavisno promenljiva vektor položaja tačke  $\vec{r}$ .

Projiciranjem vektorske jednačine (4) na ose odabranog koordinatnog sistema dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja tačke u skalarnom (koordinatnom) obliku.

a) Diferencijalne jednačine u Dekartovim koordinatama.

Projicirajući jednačinu (4) na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema  $Oxyz$ , dobijemo tri skalarne jednačine

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (5)$$

gdje su  $a_x = \ddot{x}$ ,  $a_y = \ddot{y}$  i  $a_z = \ddot{z}$  projekcije ubrzanja, a  $F_x$ ,  $F_y$  i  $F_z$  projekcije sile na ose ovog koordinatnog sistema.

Jednačine (5) nazivaju se diferencijalne jednačine kretanja tačke u Dekartovim koordinatama.

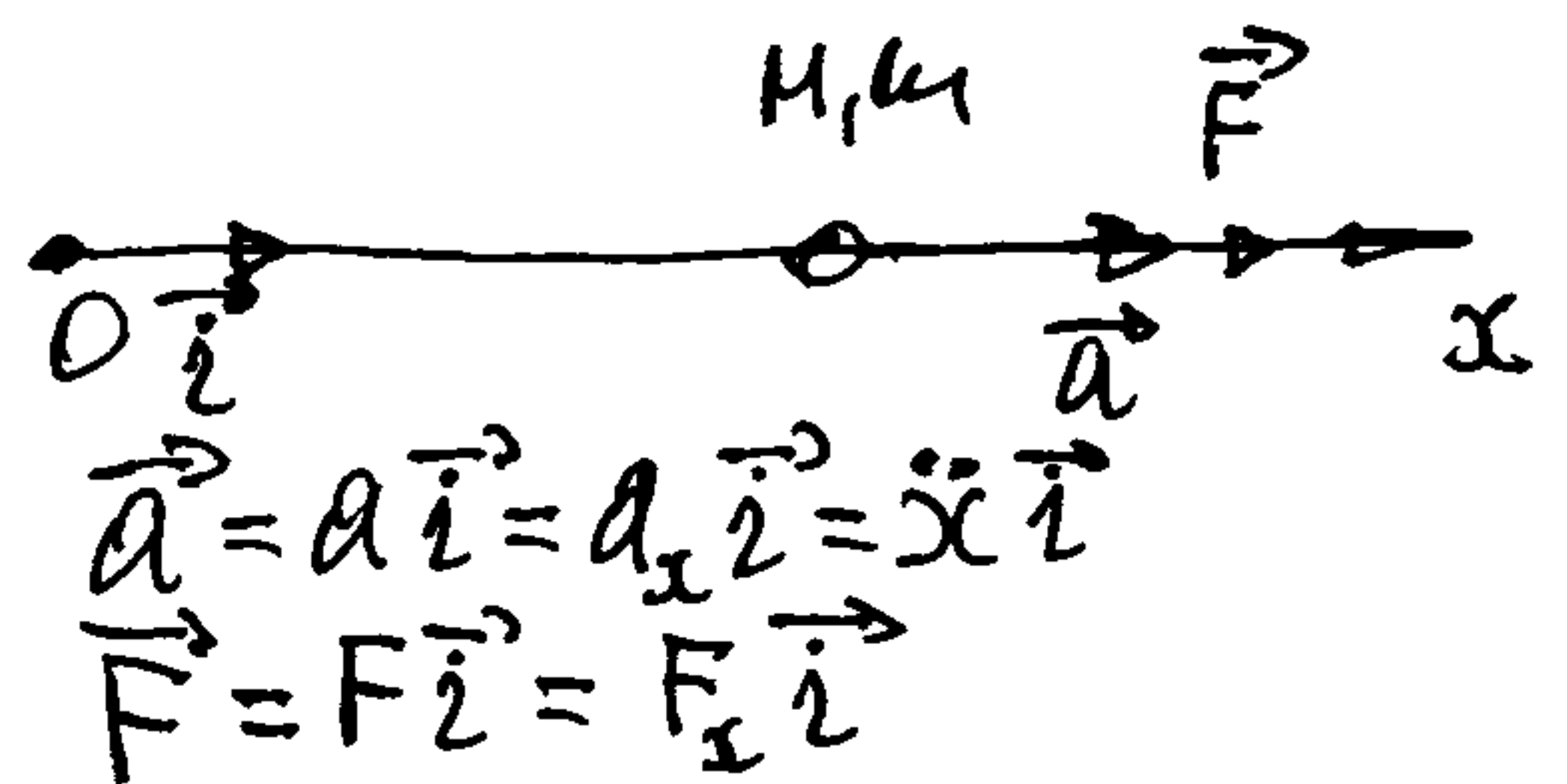
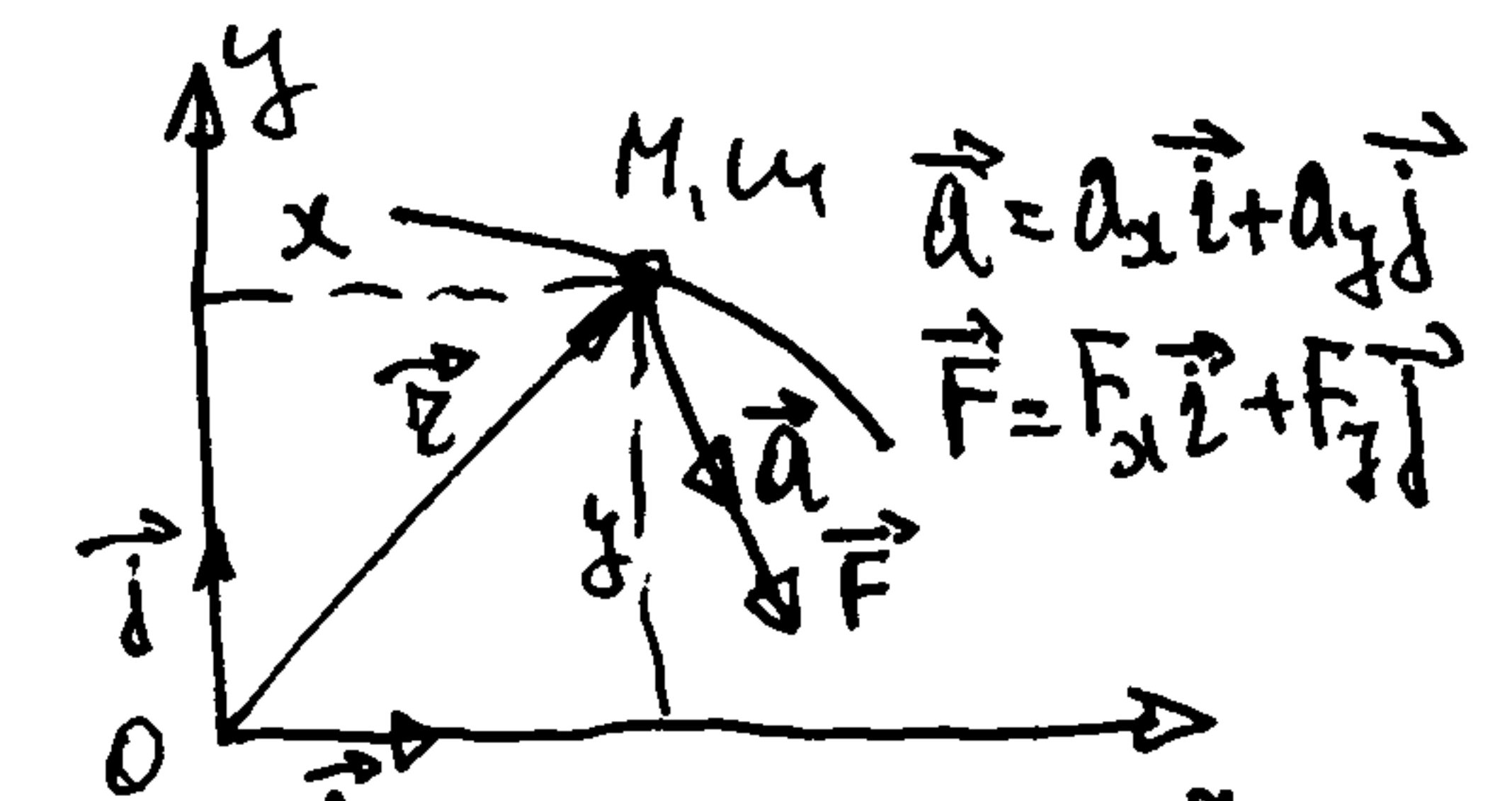
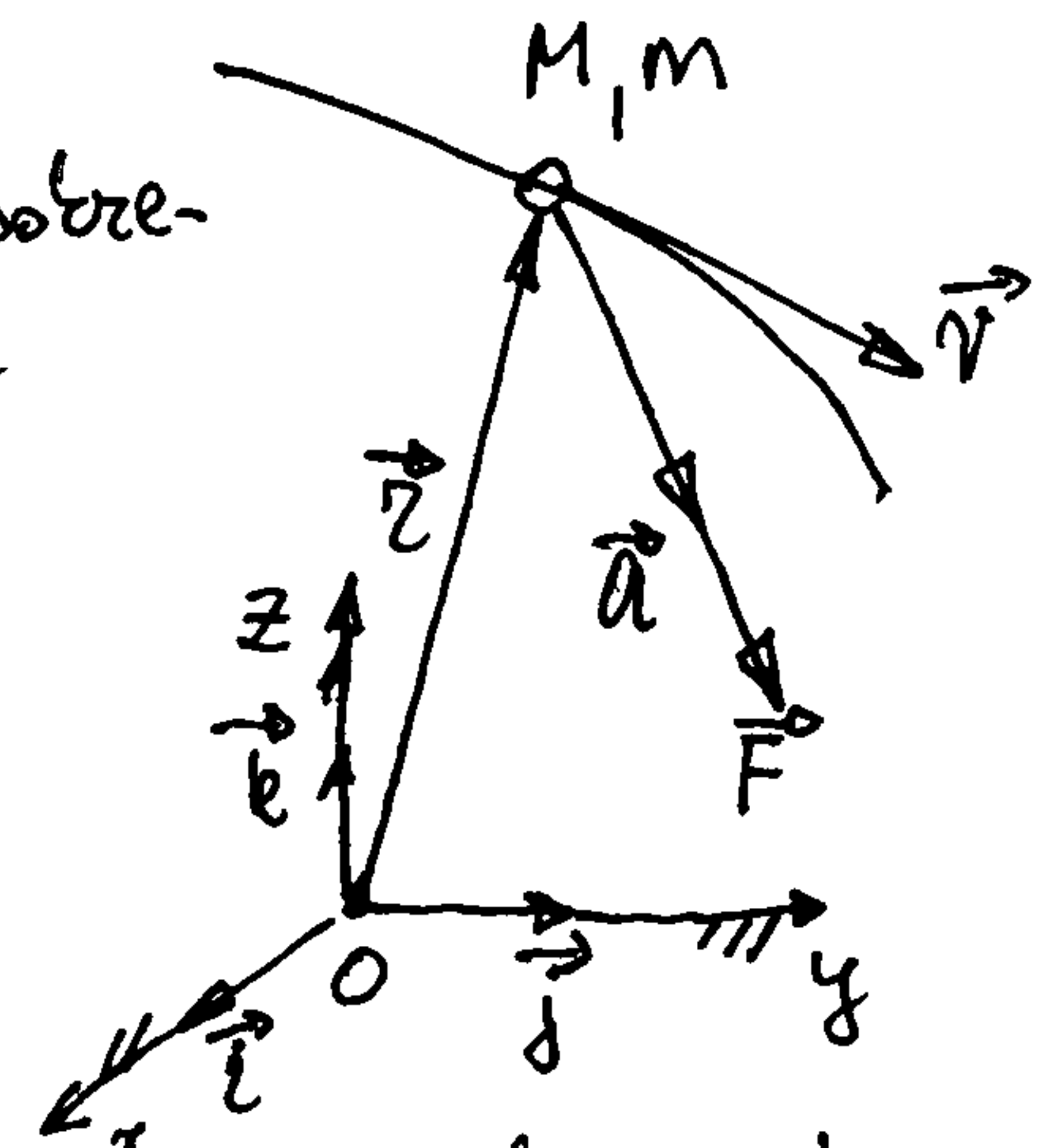
Ako se tačka kreće u ravni, recimo  $Oxy$ , sistem jednačina (5) se svodi na dvije

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y \quad (6)$$

U slučaju pravolinijskog kretanja tačke, recimo duž  $x$ -ose, imamo samo jednu skalarnu jednačinu

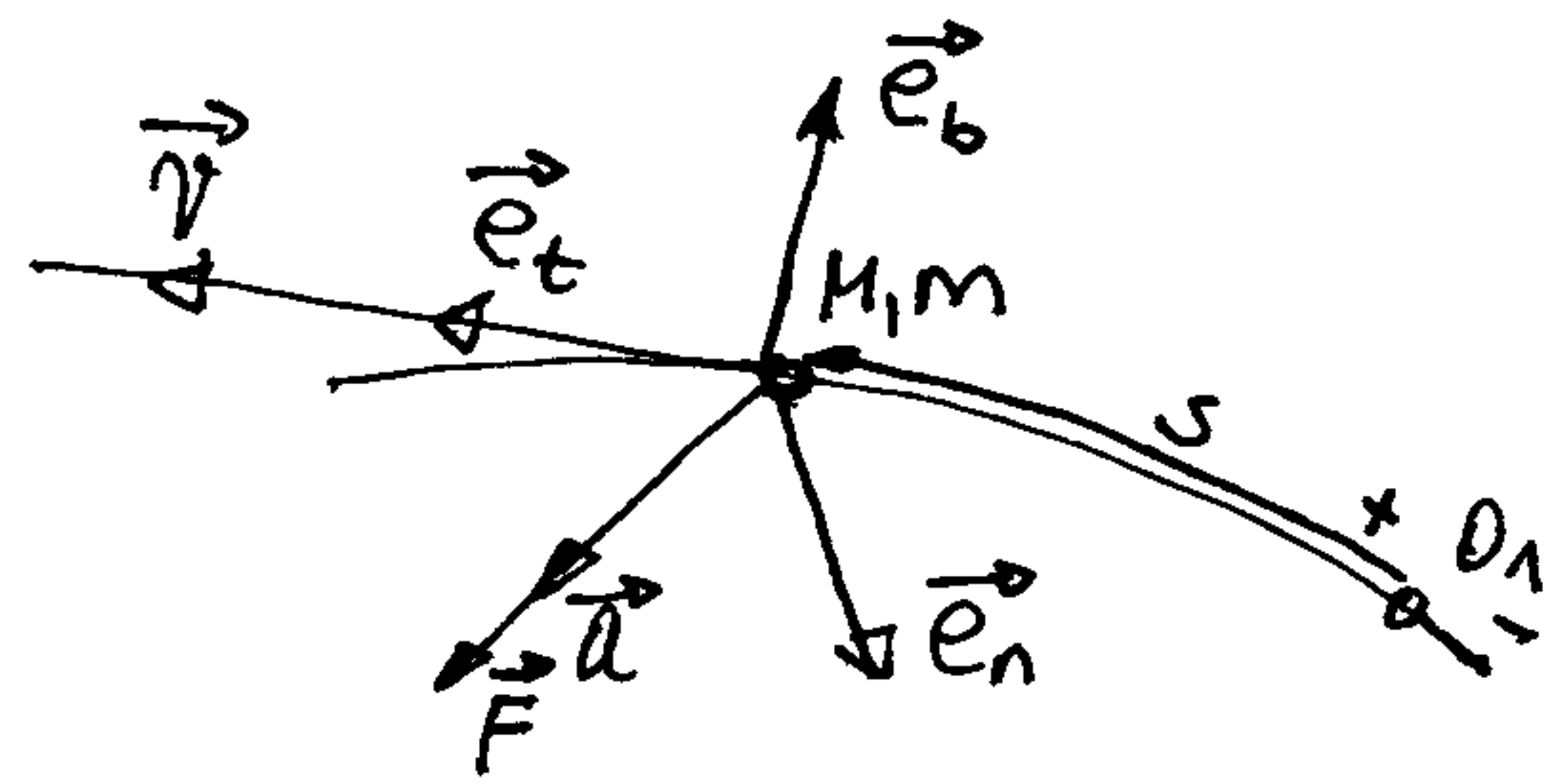
$$m\ddot{x} = F_x, \quad (7)$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu pravolinijskog kretanja.



## 6) Diferencijalne jednačine u prirodnom koordinatnom sistemu (Djlerove jednačine)

U prirodnom koordinatnom sistemu, koji čine tangenta na putanju tačke, glavna normala i binormala, određene jediničnim vektorima  $\vec{e}_t$ ,  $\vec{e}_n$  i  $\vec{e}_b$ , respektivno, vektori brzine i ubrzanja tačke dati su sa:



$$\vec{v} = v \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t; \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_t = a_t \vec{e}_t = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t = \ddot{s} \vec{e}_t, \quad \vec{a}_n = a_n \vec{e}_n = \frac{v^2}{R_k} \vec{e}_n,$$

gdje je  $R_k$  poluprečnik krivine trajektorije u tački M.

Projicizacijem lijeve i desne strane osnovne vektorske jednačine (4) na ose prirodnog koordinatnog sistema dobija se

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_t, \\ m \frac{v^2}{R_k} &= F_n, \\ 0 &= F_b, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

gdje su  $F_t$ ,  $F_n$  i  $F_b$  projekcije rezultante svih sila koje djeluju na tačku na ose prirodnog trijedra.

Jednačine (8) zovu se Djlerove (prirodne) diferencijalne jednačine kretanja tačke. Ove jednačine pogodno je koristiti u slučajevima kada je poznata putanja tačke.

### 4.4 Osnovni zadaci dinamike tačke

a) Prvi (direktni) zadatak: Ako je poznato kretanje tačke i njena masa treba odrediti silu koja izaziva to kretanje.

Primjer 1. Konačne jednačine kretanja tačke M, mase  $m = 1 \text{ kg}$ , u ravni odz su

$$x = \cos 2t \text{ [m]}, \quad y = \sin 2t \text{ [m]} \quad (*)$$

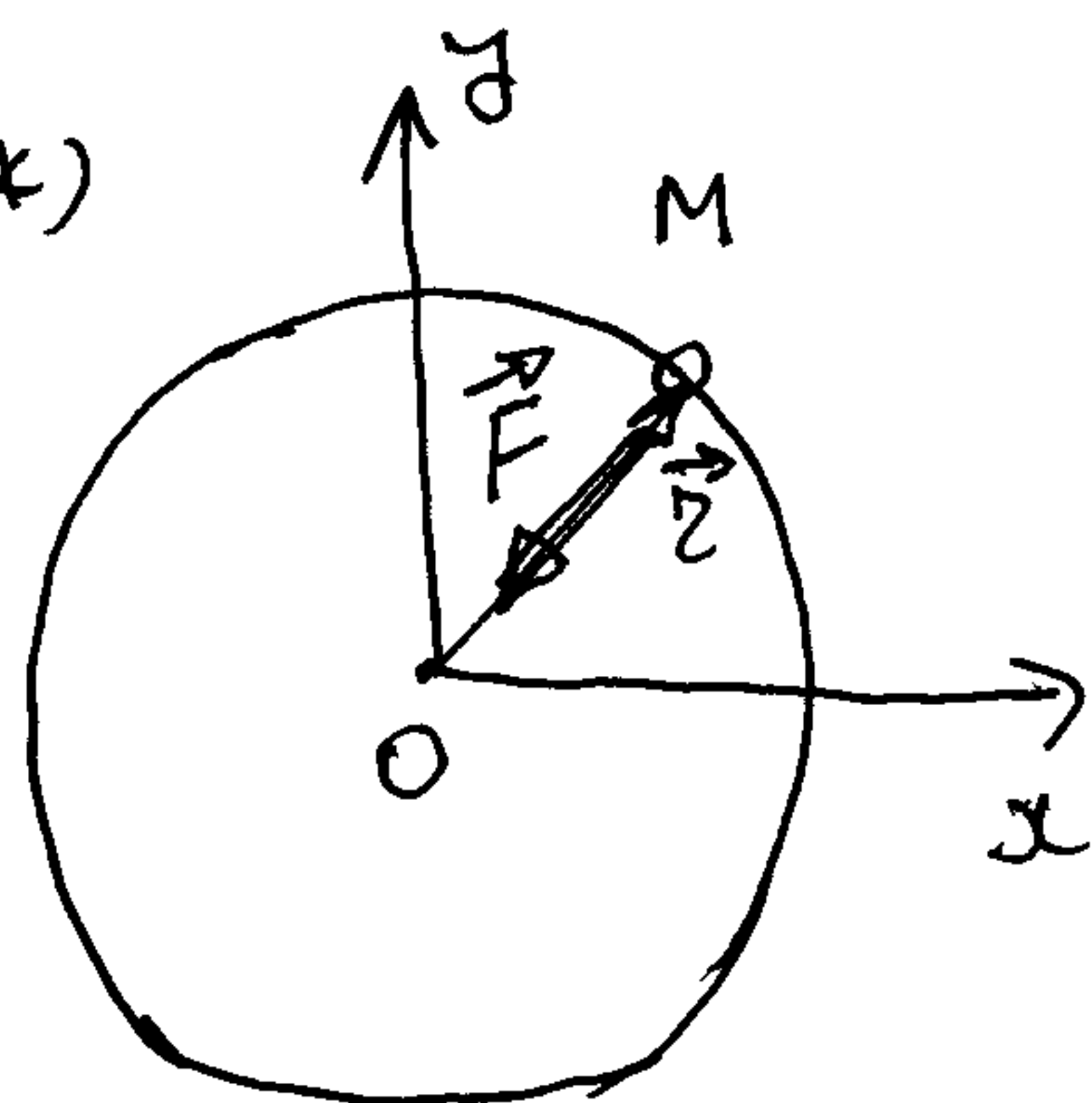
Odrediti silu  $\vec{F}$  koja djeluje na tačku.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} = -4(\cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j})$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = \cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -4 \vec{r} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\vec{F} = m \vec{a} = -4 \vec{r} \text{ [N]}$$





Primer 2. Lift, čija je težina zajedno sa putnicima  $G = 10000 \text{ N}$  (10 kN), počinje da se podiže ubrzanjem  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . Odrediti silu zatezanja sajle, kojom je lift povezan sa električnim motorom.

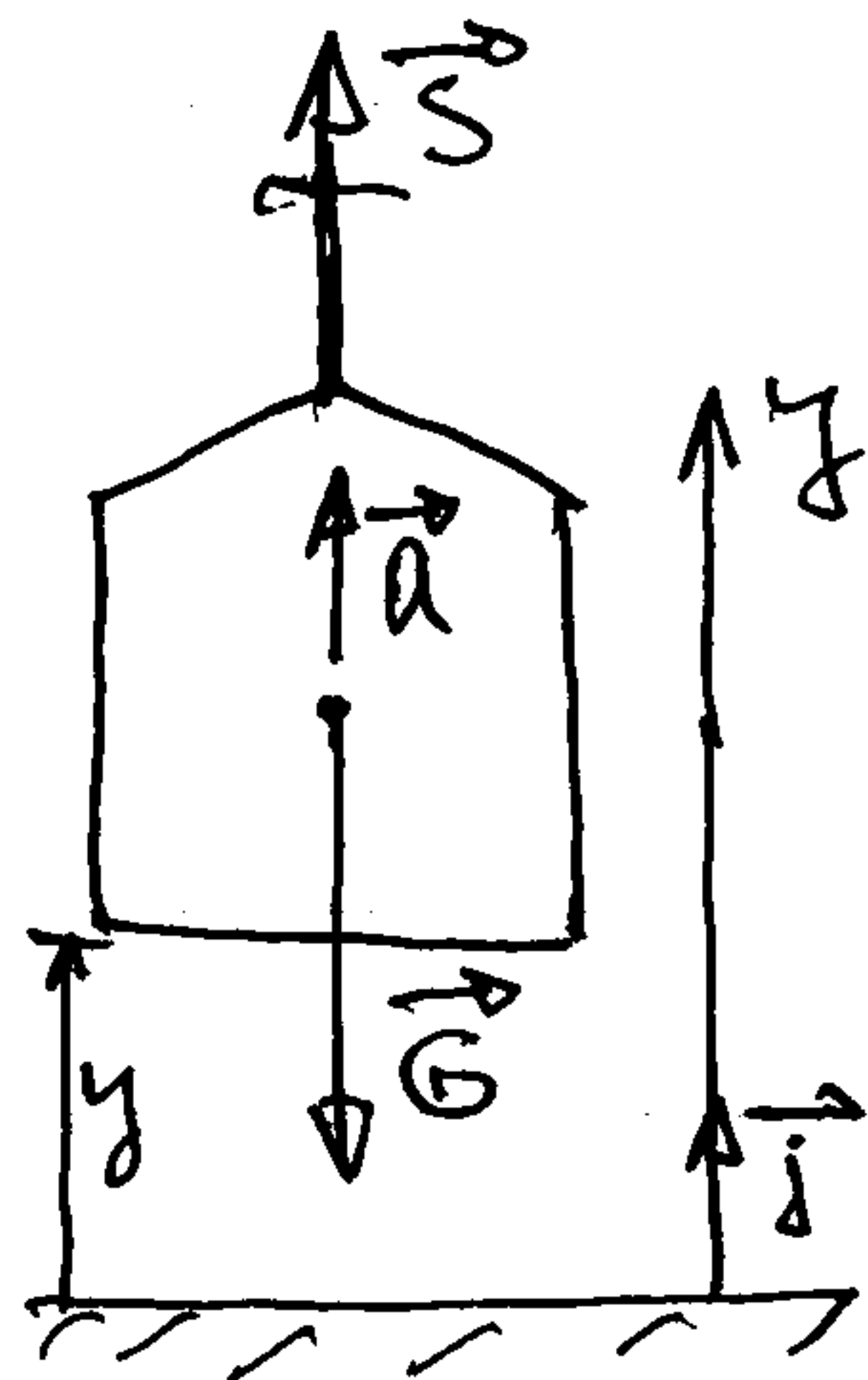
Lift posmatramo kao materijalnu tačku, mase  $m = \frac{G}{g}$ , koja se kreće pravolinijski duž vertikalne ose  $y$ . Na lift djeluje jedna aktivna sila, sila težine  $\vec{G} = -G \vec{j}$ , usmjeren na dole, a dejstvo sajle zamjenjivamo silom zatezanja sajle  $\vec{S} = S \vec{j}$ , koja ima karakter reakcije veze. Osnovna jednačina dinamike za ovaj slučaj kretanja glasi:

$$\frac{G}{g} \vec{a} = \vec{G} + \vec{S},$$

odnosno u skalarnom obliku

$$\frac{G}{g} a = -G + S,$$

odakle je  $S = \frac{G}{g} a + G = \left(\frac{a}{g} + 1\right) G = \left(\frac{2}{9,81} + 1\right) \cdot 10000 = 12039 \text{ N} \approx 12 \text{ kN}$



kilonjutra

Primer 3. Poluprečnik krivine u tački A mosta iznosi  $R_k = 100 \text{ m}$ . Automobil mase  $m = 1000 \text{ kg}$  kreće se po mostu konstantnom brzinom  $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Kolika je sila pritiska automobila na most u tački A.

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N}, \quad \vec{N} \text{ - reakcija (sila kojom most djeluje na automobil)}$$

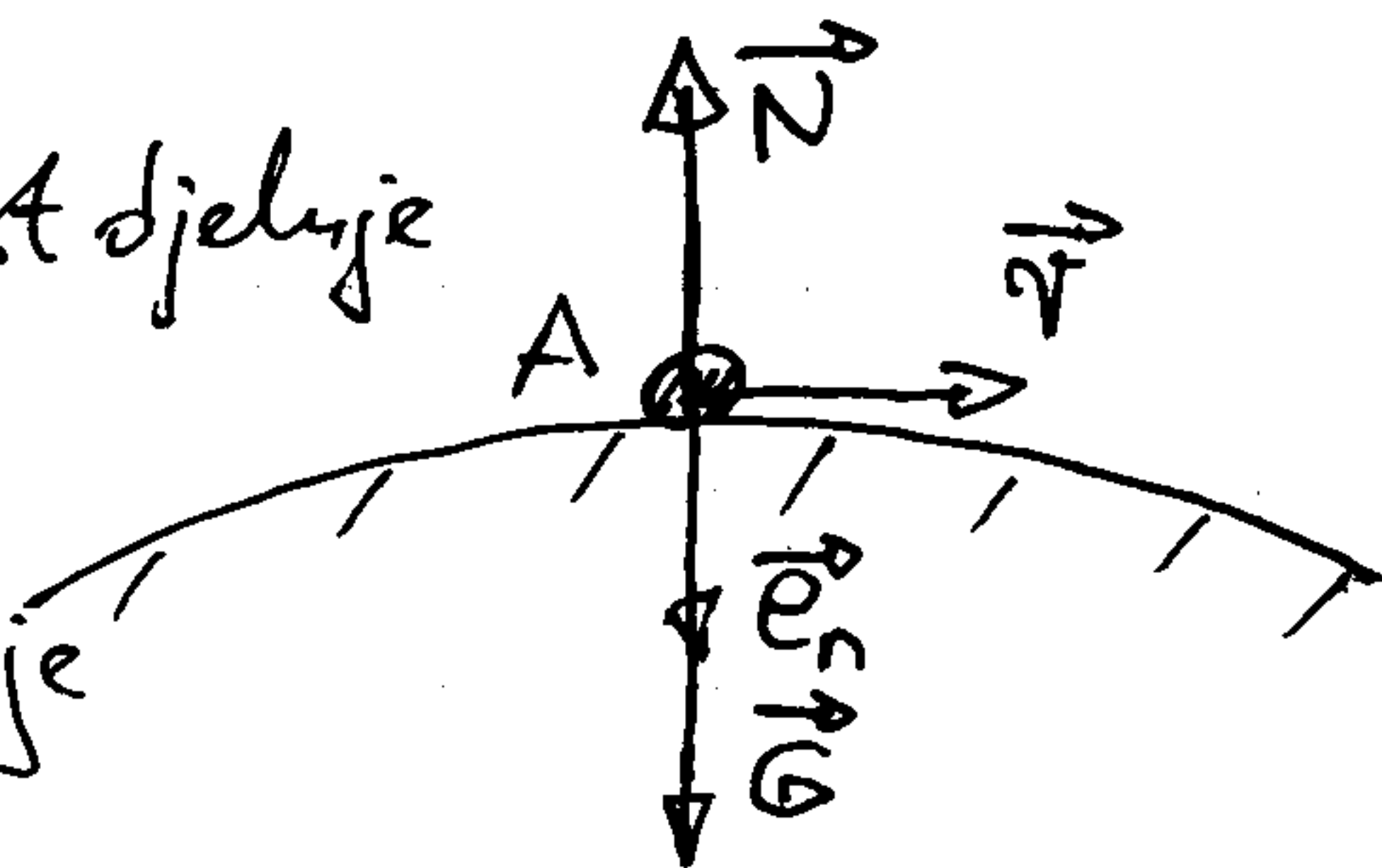
$$G = mg = 1000 \cdot 9,81 = 9810 \text{ N}$$

Projekcija ove vektorske jednačine na normalu je

$$m a_n = G - N, \quad a_n = \frac{v^2}{R_k}$$

$$\Rightarrow N = m \left( g - \frac{v^2}{R_k} \right) = 1000 \left( 9,81 - \frac{(72 \cdot \frac{1000}{3600})^2}{100} \right) = 5810 \text{ N (Njutna)}$$

Pritisak na most  $\vec{P}$  po zakonu akcije i reakcije je  $\vec{P} = -\vec{N}$ , tj. po intenzitetu je jednak  $N$  ali je usmjeren vertikalno naniže.



b) Drugi (inverzni) zadatak: Ako je poznata masa tačke, njen početni položaj i početna brzina (tj. početni uslovi:  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ ,  $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ ) i sila koja djeluje na tačku, treba odrediti kretanje tačke  $\vec{r}(t)$ .

Ovaj zadatak se često naziva i osnovni zadatak dinamike, a u matematičkom smislu je složeniji od direktnog zadatka jer zahtijeva rješavanje (integraciju) diferencijalnih jednačina kretanja. Ovom zadatku će, u narednim razmatranjima, biti posvećena značajna pažnja.

## 4.5 Pravolinijsko kretanje tačke

Potrebni i dovoljni uslovi za pravolinijsko kretanje materijalne tačke jesu da rezultirajuća sila koja djeluje na tačku ima konstantan pravac, a početna brzina, ukoliko je različita od nule, ima pravac te sile.

Jednu osu, recimo  $x$ , postavimo tako da se poklapa sa pravom duž koje se vrši kretanje.

Diferencijalna jednačina kretanja je (7), tj.

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}) \quad (9')$$

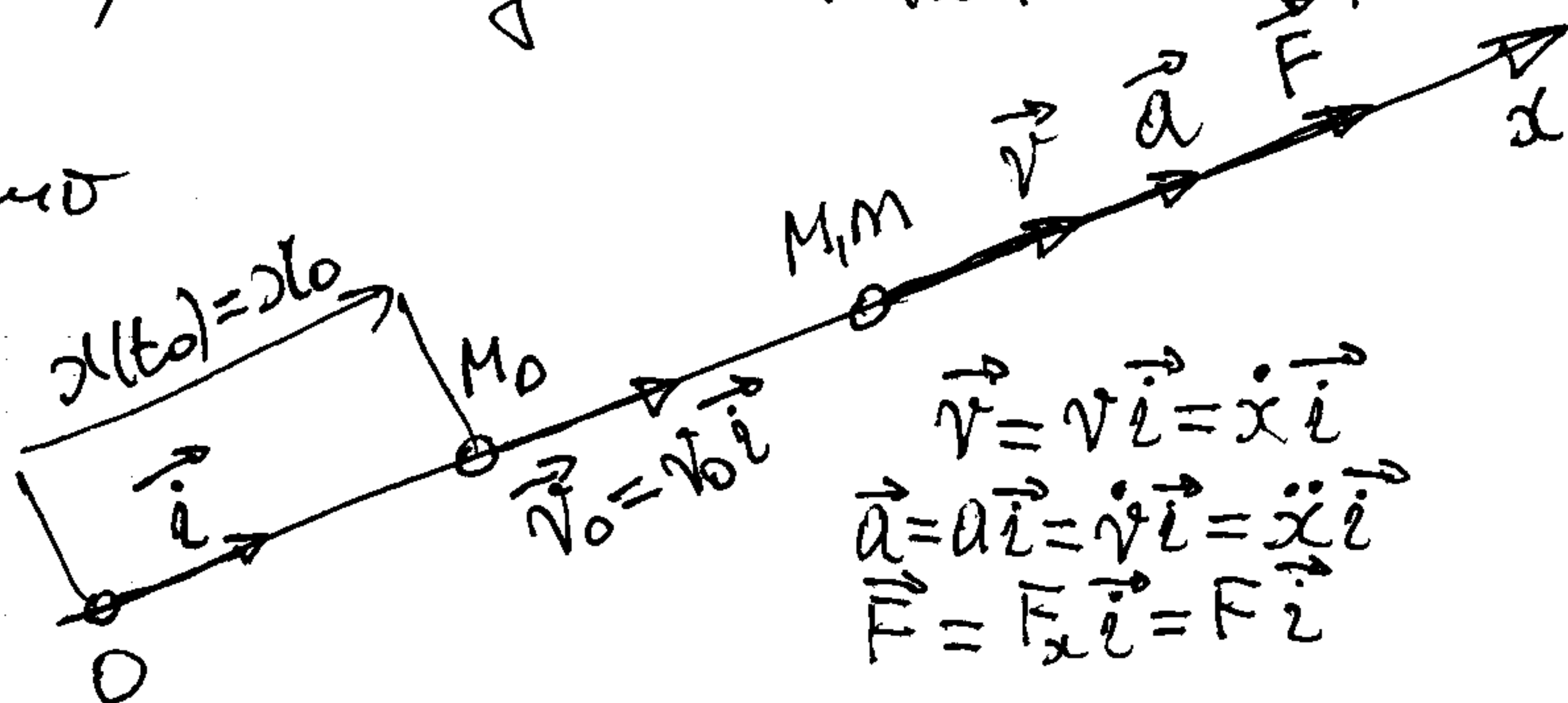
i predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda u kojoj je nezavisna promjenljiva vrijeme  $t$  a tražena funkcija  $x$ . Odrediti kretanje znači naći rješenje ove jednačine koje zadovoljava početne uslove:

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \quad (10)$$

### 4.5.1 Pravolinijsko kretanje pod dejstvom konstantne sile

Ako je  $F_x = \text{const}$ , onda je, na osnovu (9'),  $\ddot{x} = a = \text{const} = F_x/m$ , pa imamo jednostavno promjenljivo pravolinijsko kretanje. Zakon promijene brzine i konačna jednačina kretanja u ovom slučaju su (v. § 1.6.1):

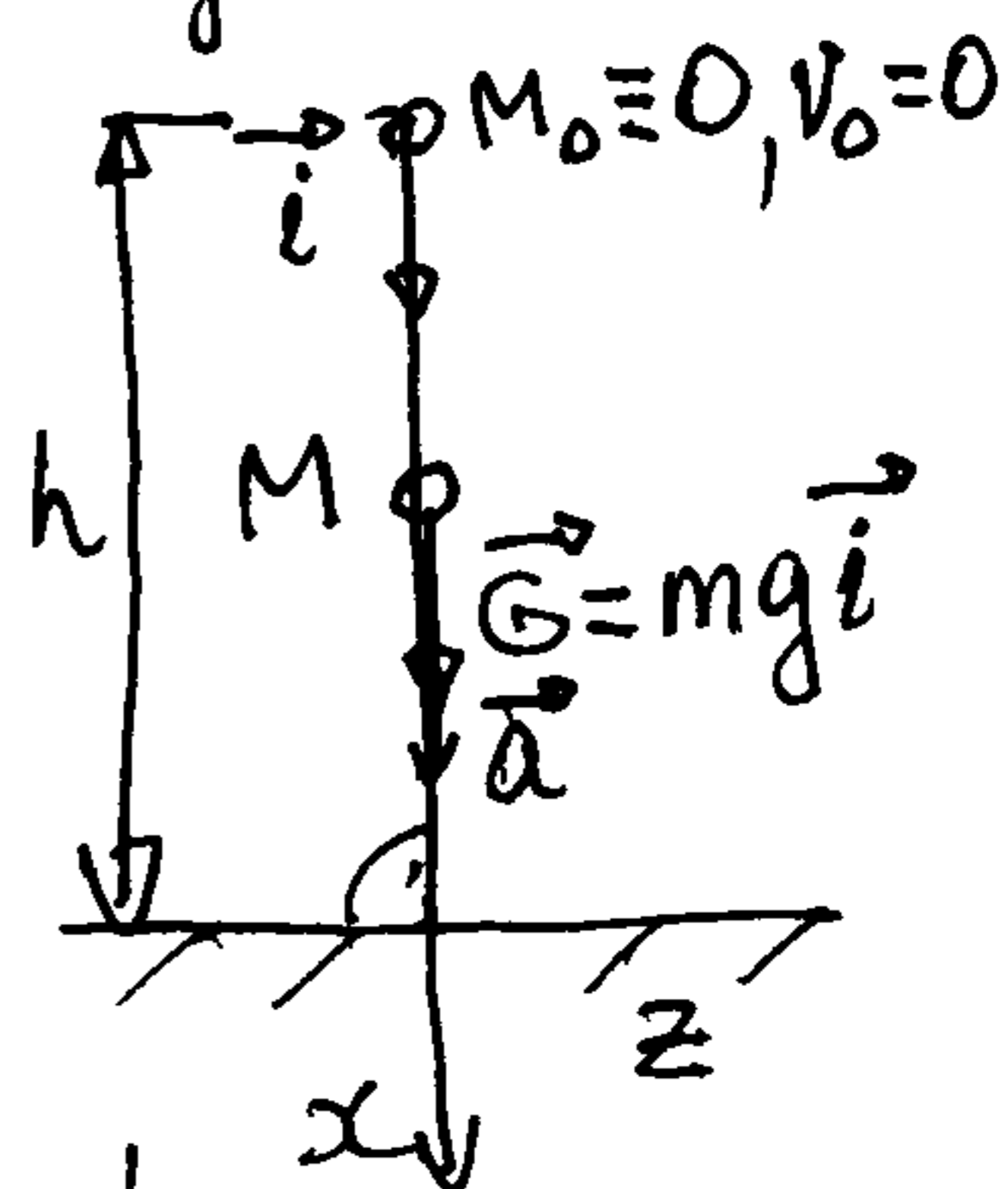
$$\left. \begin{aligned} v &= \dot{x} = v_0 + at, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2, \quad a = \frac{F_x}{m} \end{aligned} \right\} (11)$$





Primer 4. Slobodni pad u homogenom polju sile zemljine težine u bezvazdušnom prostoru.

Tačka M, mase  $m$ , puštena je da slobodno pada, bez početne brzine ( $v_0=0$ ), sa visine  $h$  iznad zemljine površine. Otpor vazduha se zanemaruje. Vertikalnu os  $x$  postavimo kao na slici.



$$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow ma = mg \Rightarrow a = g = \text{const}$$

Početni uslovi:  $x(0) = x_0 = 0, v(0) = v_0 = 0$

(1)  $\Rightarrow v = gt$  - zakon promjene brzine pri slobodnom padu

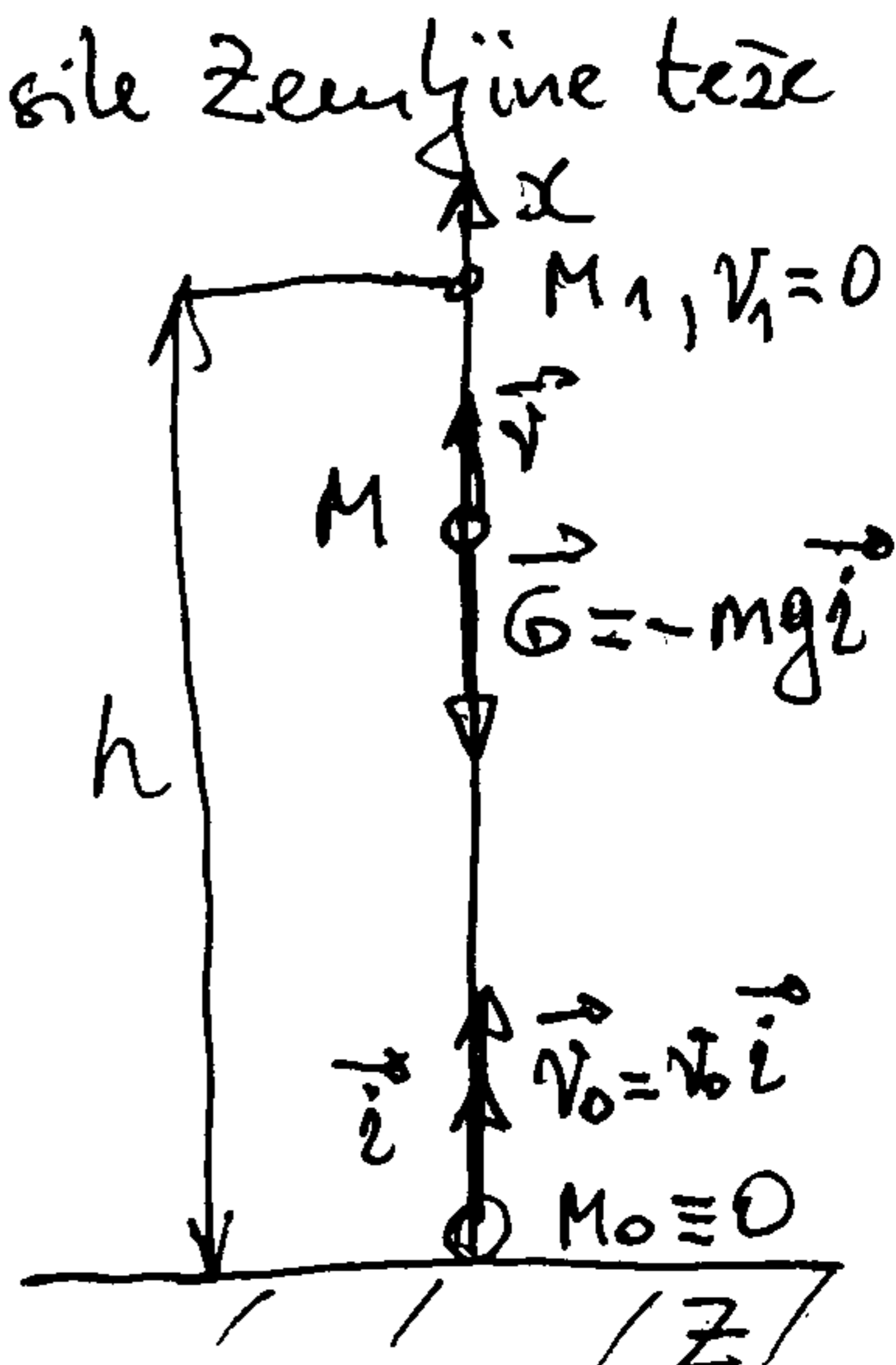
$$x = g \frac{t^2}{2} - \text{konstantna jednaka brzina (zakon slobodnog pada)}$$

$$x(t_1) = h \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \text{vrijeme padanja tačke}$$

$$v_1 = v(t_1) = \sqrt{2gh} - \text{brzina udara tačke o zemljinu površinu.}$$

Primer 5. Vertikalni hitac u homogenom polju sile zemljine težine u bezvazdušnom prostoru

Tačka M, mase  $m$ , izbačena je sa površine zemlje vertikalno navise početnom brzinom intenziteta  $v_0$ . Vertikalnu os  $x$  postavimo kao na slici.



$$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow ma = -mg \Rightarrow a = -g = \text{const}$$

Početni uslovi:  $x(0) = x_0 = 0, v(0) = v_0$

(1)  $\Rightarrow v = v_0 - gt$

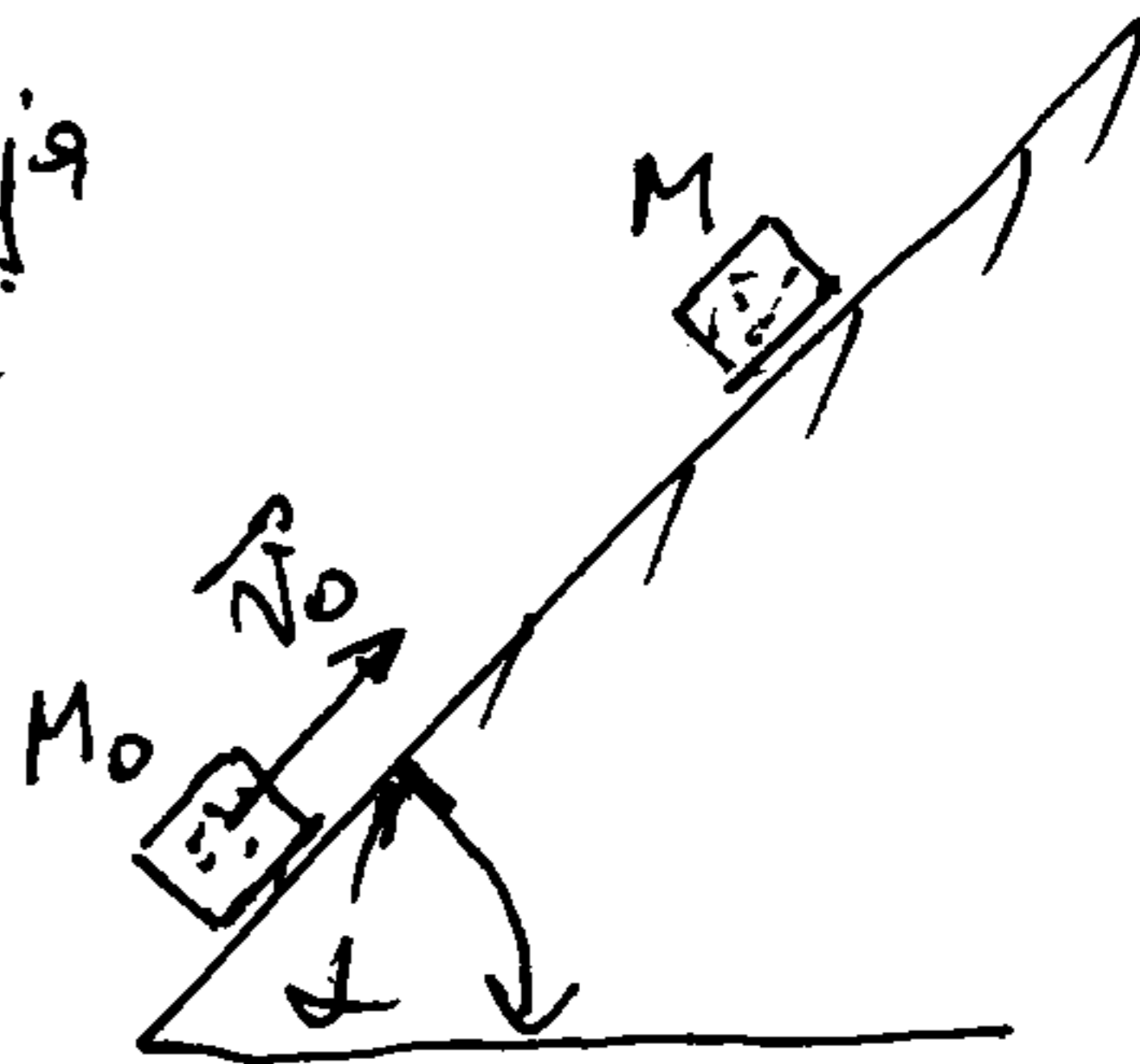
$$x = v_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

$$v_1 = v(t_1) = 0 \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} - \text{vrijeme penjanja}$$

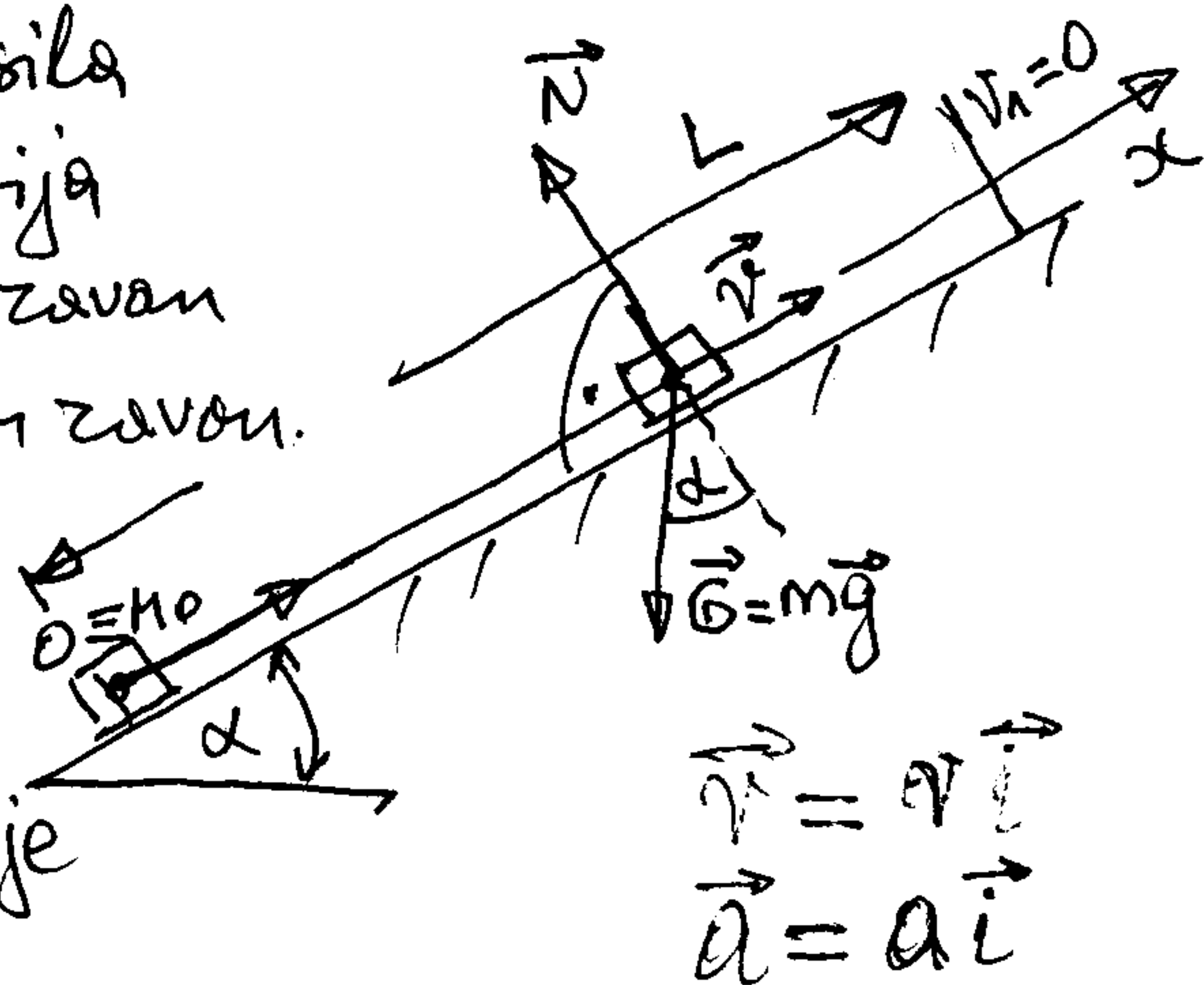
$$h = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} - \text{visina penjanja (najveća visina koju dostigne tačka)}$$

Primer 6. Tijelo M (materijalna tačka), mase  $m$ , kreće se po strmoj ravni koja je nagnuta pod uglom  $\alpha$  prema horizontu. Početna brzina, intenziteta  $v_0$ , usmjerena je uz strmu ravan.

Odrediti vrijeme koje protekne do zaustavljanja tijela i put pređen za to vrijeme, smatrajući da je: a) strma ravan glatka, b) strma ravan hrapava a koeficijent dinamički trenja  $\mu_0$ .



a) Na tijelo  $M$ , u točku kretanja, djeluje sila težine  $\vec{G} = m\vec{g}$  (aktivna sila) i reakcija  $\vec{R} = \vec{N}$  koja je, s obzirom da je struna zavon glatka, u pravcu normale na strunu zavon.



Projekcija osnovne jednačine

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

na x-osu duž koje se vrši kretanje je

$$ma = -mg \sin \alpha,$$

odakle je  $a = -g \sin \alpha = \text{const}$

Dakle, kretanje je jednostavno uniformno pravolinijsko sa početnim uslovima  $x(0) = 0$  i  $v(0) = v_0$  pa iz (11) slijedi

$$v = v_0 - g t \sin \alpha$$

$$x = v_0 t - g \frac{t^2}{2} \sin \alpha$$

U trenutku zaustavljanja  $t_1$  je  $v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = v_0 / g \sin \alpha,$

a preteniput za to vrijeme je  $L = x(t_1) = v_0^2 / 2g \sin \alpha$

b) U slučaju hrapave strune zavni, kao komponenta reakcije veze (strune zavni) osim normalne komponente  $\vec{N}$  javlja se i sila trenja klizanja  $\vec{F}_{tr}$  čiji je intenzitet  $F_{tr} = \mu_0 N$  a smjer suprotan smjeru brzine tačke.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{tr} + \vec{N}$$

$$x: ma = -mg \sin \alpha - F_{tr}$$

$$y: m \cdot 0 = -mg \cos \alpha + N \rightarrow N = mg \cos \alpha \rightarrow F_{tr} = (\mu_0 mg \cos \alpha)$$

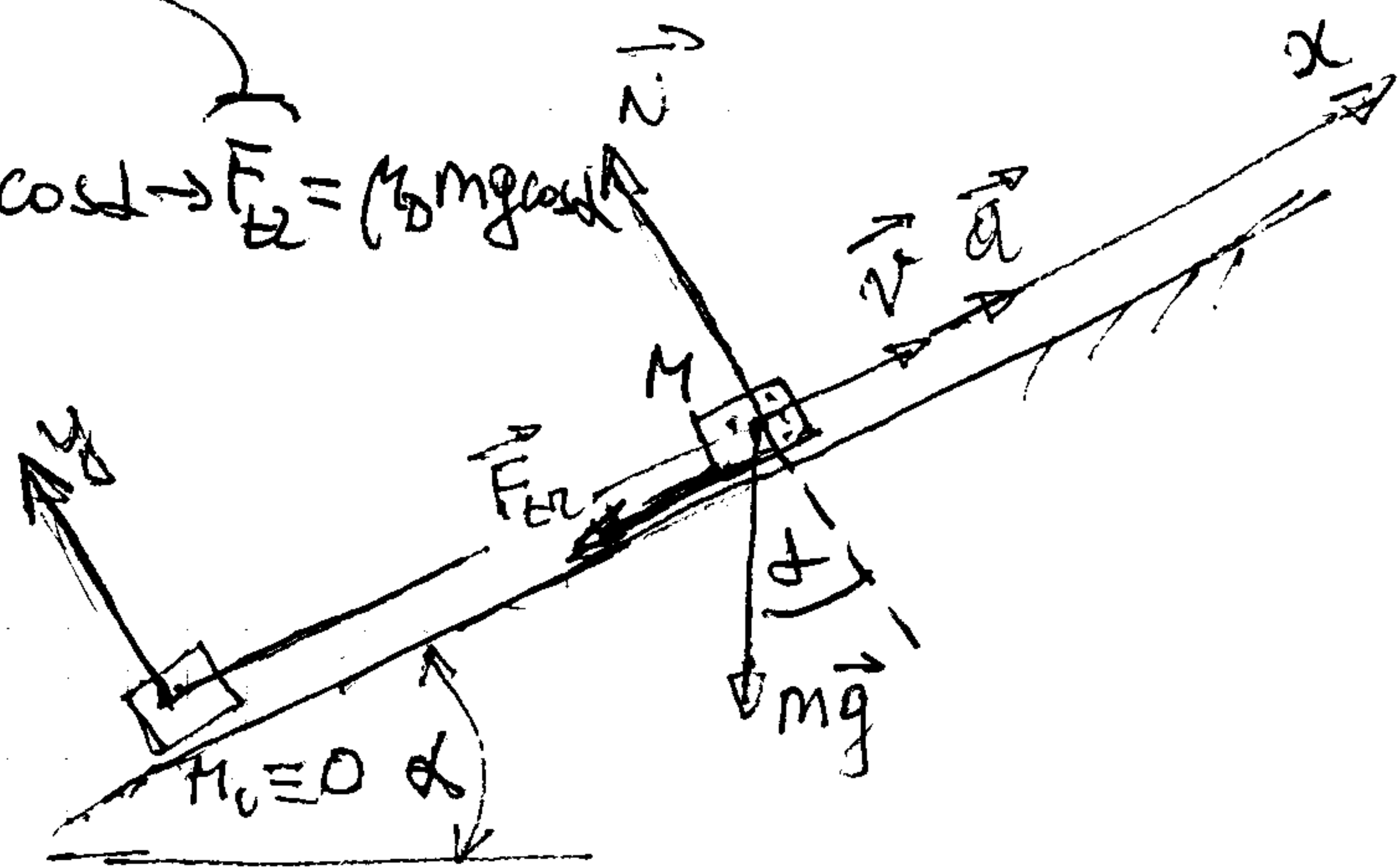
$$\Rightarrow a = -g(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow v = v_0 - g t (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)$$

$$x = v_0 t - g \frac{t^2}{2} (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)$$

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = v_0 / g(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)$$

$$L = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)}$$





4.5.2 PravoLINIJSKO KRETANJE pod dejstvom sile koja zavisi od vremena

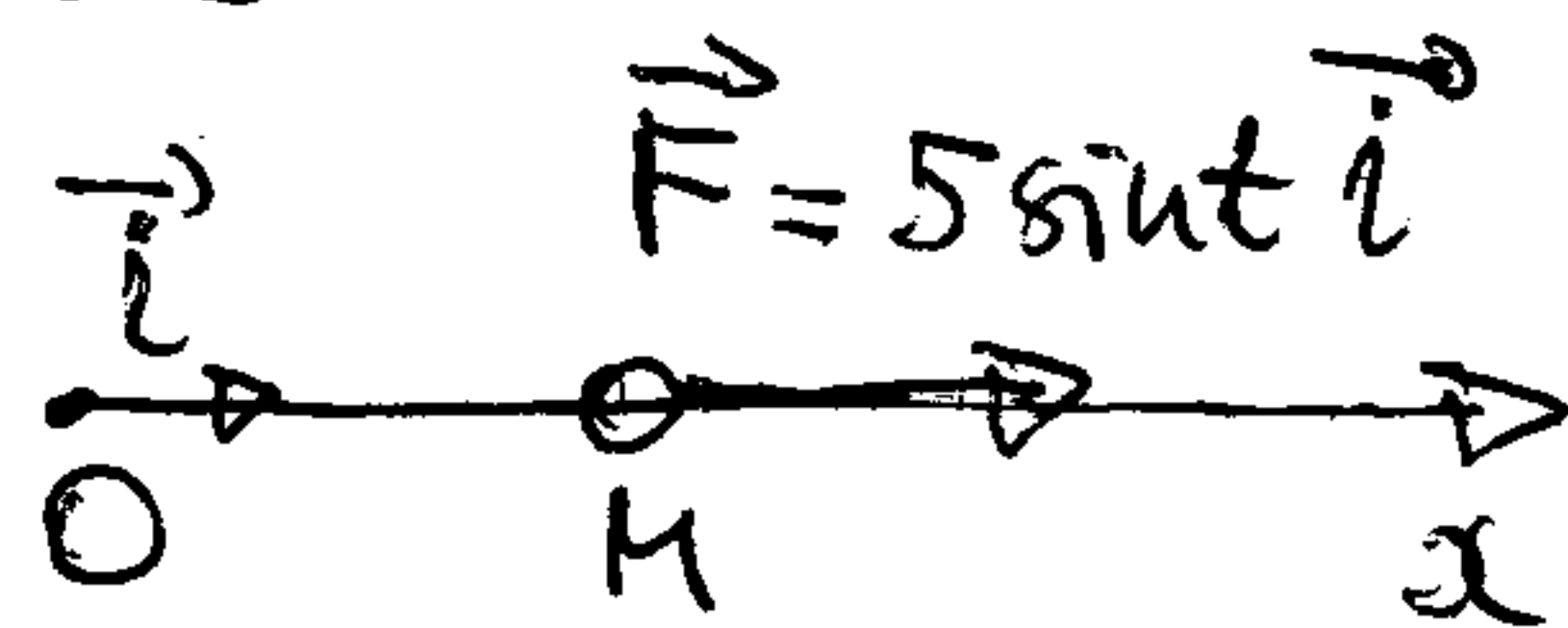
$$m \ddot{x} = F_x(t) \Rightarrow \ddot{x} = a(t) = \frac{F_x(t)}{m}$$

Zakon promjene brzine i konačna jednačina kretanja u ovom slučaju su (v. § 1.6.1, obrasci (30) i (31)):

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t) dt \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t) dt \end{aligned} \right\} (12)$$

Primer 7. Tačka M, mase  $m = 1 \text{ kg}$ , kreće se duž  $x$ -ose pod dejstvom sile  $F_x = 5 \sin t \text{ [N]}$ . Za početne uslove:  $x(0) = 0, v(0) = 0$ , odrediti: a) konačnu jednačinu kretanja tačke; b) ubrzanje, brzinu i položaj tačke u trenutku  $t_1 = 2\pi \text{ s}$ .

a)  $m \ddot{x} = F_x, m = 1, F_x = 5 \sin t$   
 $\Rightarrow a(t) = 5 \sin t$



$$(12) \Rightarrow v(t) = v_0 + 5 \int_0^t \sin t dt = -5 \cos t \Big|_0^t = 5 - 5 \cos t$$

$$v(t) = 5(1 - \cos t)$$

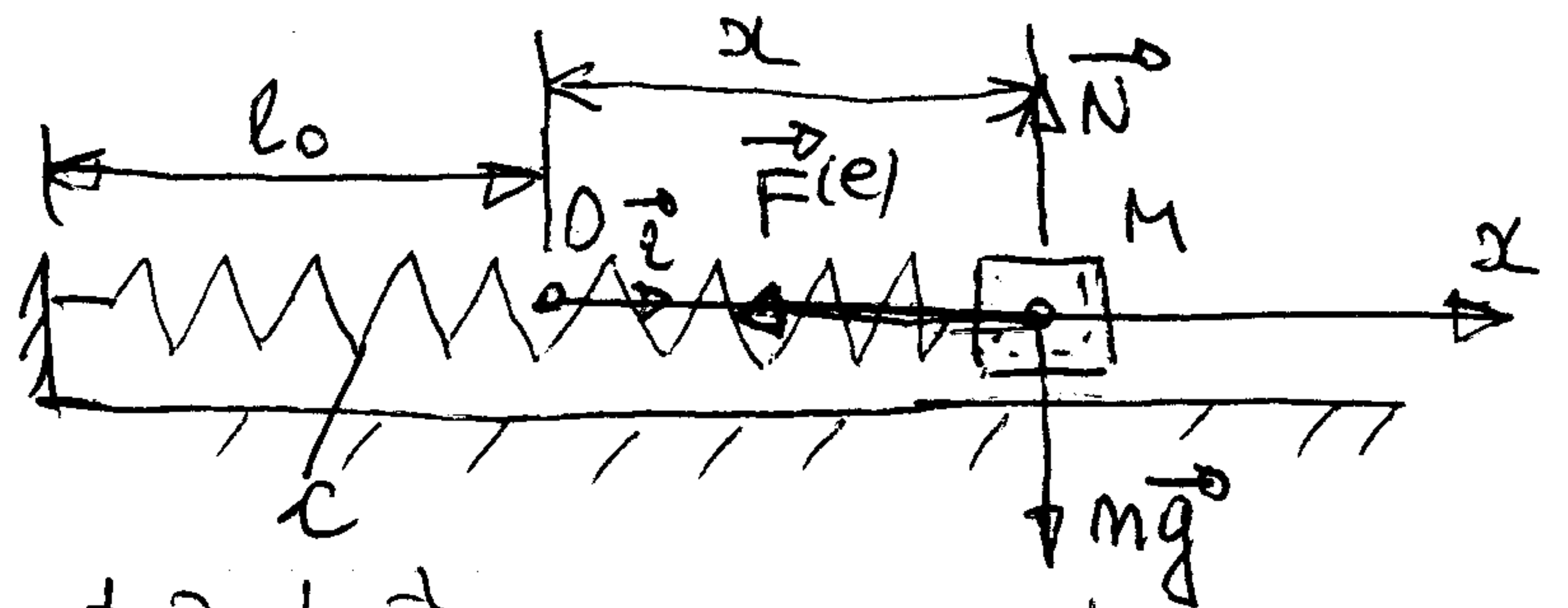
$$x(t) = x_0 + 5 \int_0^t (1 - \cos t) dt = (5t - 5 \sin t) \Big|_0^t = 5(t - \sin t)$$

$$\boxed{x(t) = 5(t - \sin t)}$$

b)  $\ddot{x}(t_1) = a(t_1) = 0; v(t_1) = 0; x(t_1) = 10\pi \text{ m} \approx 31,4 \text{ m}$

### 4.5.3 Harmonijske oscilacije (Primer pravolinijskog kretanja pod dejstvom sile koja je funkcija položaja)

Posmatrajmo tačku  $M$ , mase  $m$ , koja može da se kreće pravolinijski po glatkoj horizontalnoj ravni koja je vezana za slobodni kraj opruge



za slobodni kraj opruge brtosti  $c$ . U položaju ravnoteže tačke opruge je nedeformisana i njena dužina je  $l_0$  i u taj položaj postavimo početak  $O$   $x$ -ose. Na tačku djeluju: elastična sila opruge  $\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$ , sila težine  $m\vec{g}$  i reakcija glatke podloge  $\vec{N}$ .

Kada vektoru diferencijalnu jednačinu kretanja posmatrane tačke

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(e)} + m\vec{g} + \vec{N}$$

projiciramo na  $x$ -osu, dobijamo

$$m\ddot{x} = -cx,$$

odnosno

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (13)$$

Dobijena jednačina je linearna, homogena diferencijalna jednačina drugog reda i njeno opšte rješenje se može napisati u obliku

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (14)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  integracione konstante. Koristeći početnih uslova:  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = v_0$ , odredjujete konstante  $C_1$  i  $C_2$ :

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = v_0 / \omega \quad (15)$$

Kada (15) uvrstimo u (14) dobijamo konačnu jednačinu kretanja tačke

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (16)$$

Ako umjesto  $C_1$  i  $C_2$  uvedemo druge konstante  $A$  i  $\alpha$  sinjenu jednačinu

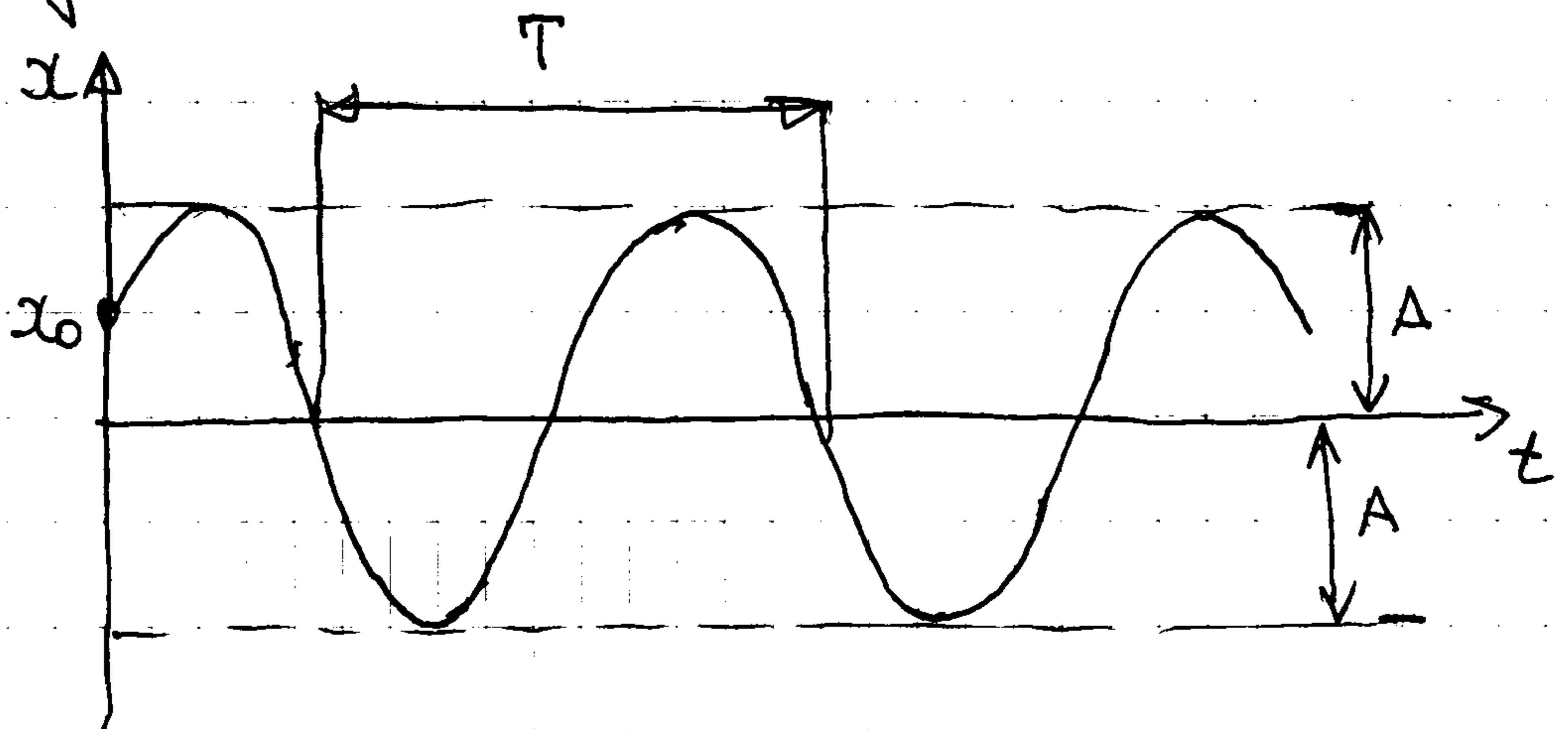
$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = A \cos \alpha,$$

jednačina (16) se može napisati u pogodnijem obliku

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0} \quad (17)$$



Prema tome, koordinata  $x$  koja određuje položaj tačke mijenja se po sinusnom zakonu i takvo kretanje zove se harmonijsko oscilovanje.



Kretanje je periodično ( $x(t+T) = x(t), \forall t$ ) sa periodom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}},$$

koji se zove period harmonijskih oscilacija. Broj perioda oscilovanja u jednoj sekundi  $f = \frac{1}{T}$  zove se učestanost (frekvencija) i u SI sistemu se mjeri hercima ( $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ ). Veličina  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$  zove se bržina frekvencija,  $(\omega t + \varphi)$  je faza oscilovanja, a  $\varphi$  početna faza. Najveće udaljenje tačke M od ravnotežnog položaja  $x=0$  (centra oscilovanja) zove se amplituda i ona je

$$A = |x_{\max}(t)| = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

## 4.6 Krivolinijsko kretanje tačke u ravni

Potrebni i dovoljni uslovi za ravansko kretanje materijalne tačke jesu da rezultujuća sila  $\vec{F}$  koja djeluje na tačku i početna brzina  $\vec{v}_0$ , ukoliko je različita od nule, leže u jednoj ravni.

Postavimo Dekartov koordinatni sistem  $Oxyz$  u ravni sile  $\vec{F}$  i početne brzine  $\vec{v}_0$ .

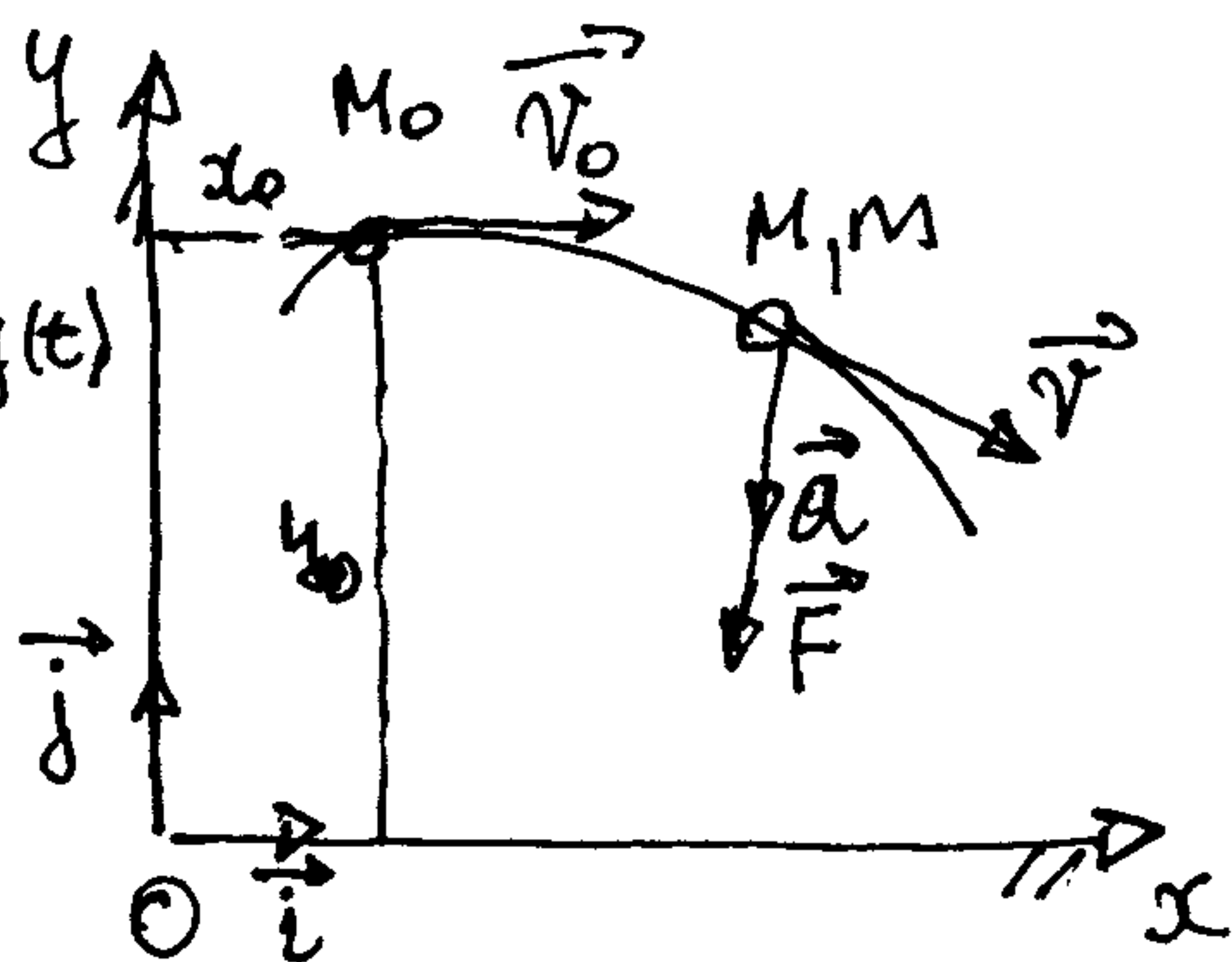
Konačne jednačine kretanja tačke  $x=x(t), y=y(t)$  određujemo integracijom diferencijalnih jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = F_x,$$

$$m\ddot{y} = F_y,$$

uz korišćenje početnih uslova

$$t_0 = 0: x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \dot{x}(t_0) = v_{0x} = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = v_{0y} = \dot{y}_0.$$



Primer. Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru, u homogenom polju sile teže.

To je kretanje koje nastaje kada se materijalna tačka mase  $m$ , izbaci iz neke tačke u blizini Zemljine površine početnom brzinom  $\vec{v}_0$  koja zaklapa ugao  $\alpha$  prema horizontu (elevacioni ugao).

Koordinatni sistem  $Oxyz$  postavimo u vertikalnoj ravni tako da  $xy$  je početak u početnom položaju tačke  $M_0$ ,  $x$ -osa horizontalna, a  $y$ -osa usmerena vertikalno na više.

Na tačku djeluje samo sila teže  $\vec{G} = -mg\vec{j}$  pa su diferencijalne jednačine kretanja

$$m\ddot{x} = 0,$$

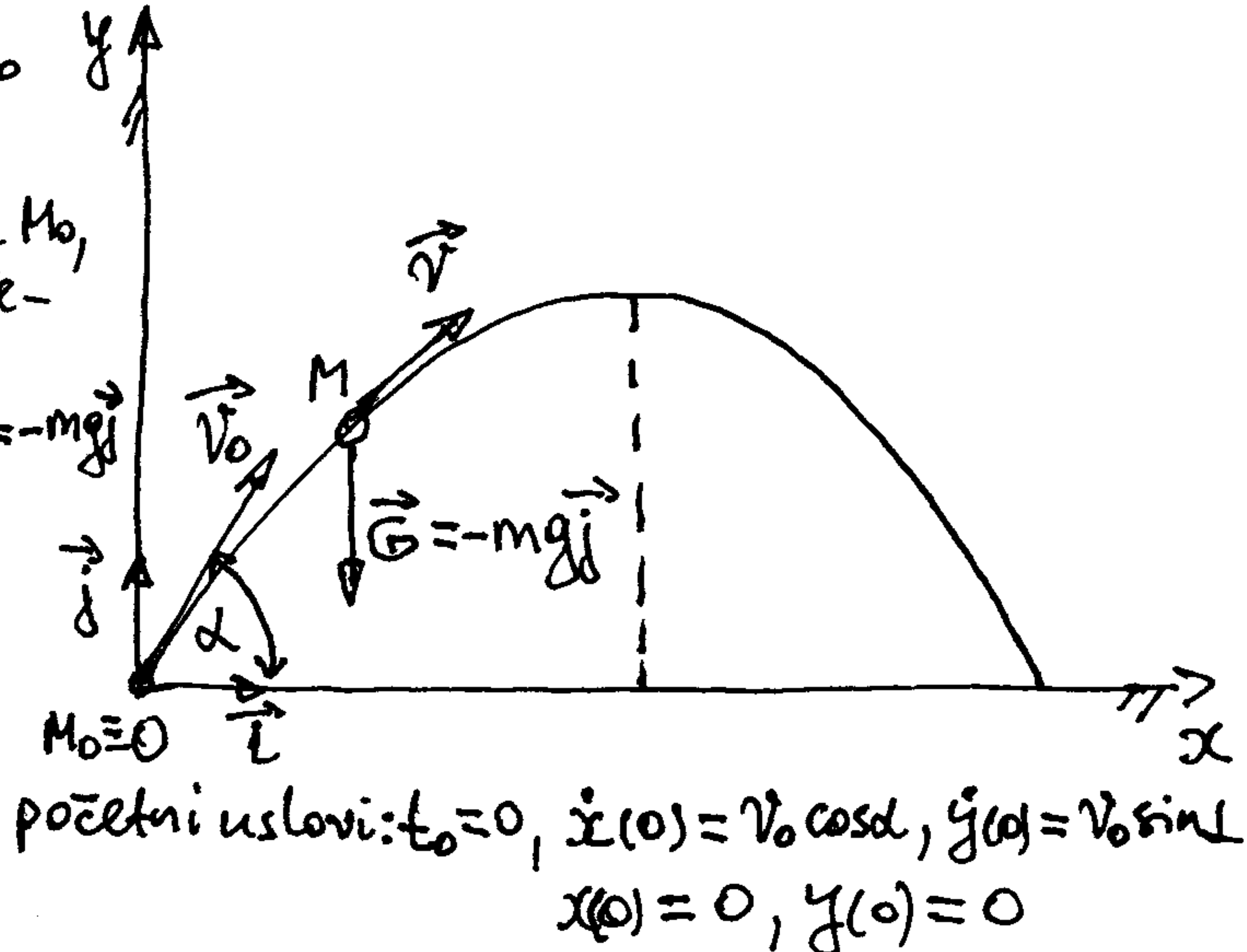
$$m\ddot{y} = -mg,$$

odnosno

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \rightarrow \dot{x} = C_1$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g \rightarrow \dot{y} = \int -g dt = -gt + C_2$$

Na osnovu početnog uslova za brzinu određujemo integracione konstante  $C_1$  i  $C_2$ :  $C_1 = v_0 \cos \alpha$ ,  $C_2 = v_0 \sin \alpha$  pa je zakon promjene brzine





$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt,$$

Integriranjem ovih jednačina dobijamo

$$x = \int v_0 \cos \alpha dt = v_0 t \cos \alpha + C_3$$

$$y = \int (v_0 \sin \alpha - gt) dt = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2} + C_4$$

Početni uslov za položaj daje  $C_3 = C_4 = 0$ , i konačne jednačine kretanja tačke su:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} (*)$$

Na osnovu jednačina (\*) možemo, korišćenjem metoda kinematike, odrediti sve karakteristične datog kretanja tačke.

Eliminacijom vremena  $t$  iz jednačina (\*) nalatimo jednačinu trajektorije

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Trajektorija je parabola čija je osa paralelna  $y$ -osi.

Kao što je već napomenuto, kada je poznata putanja tačke pogodno je koristiti Ojlerove jednačine (8).

### Primer. Matematičko klatno

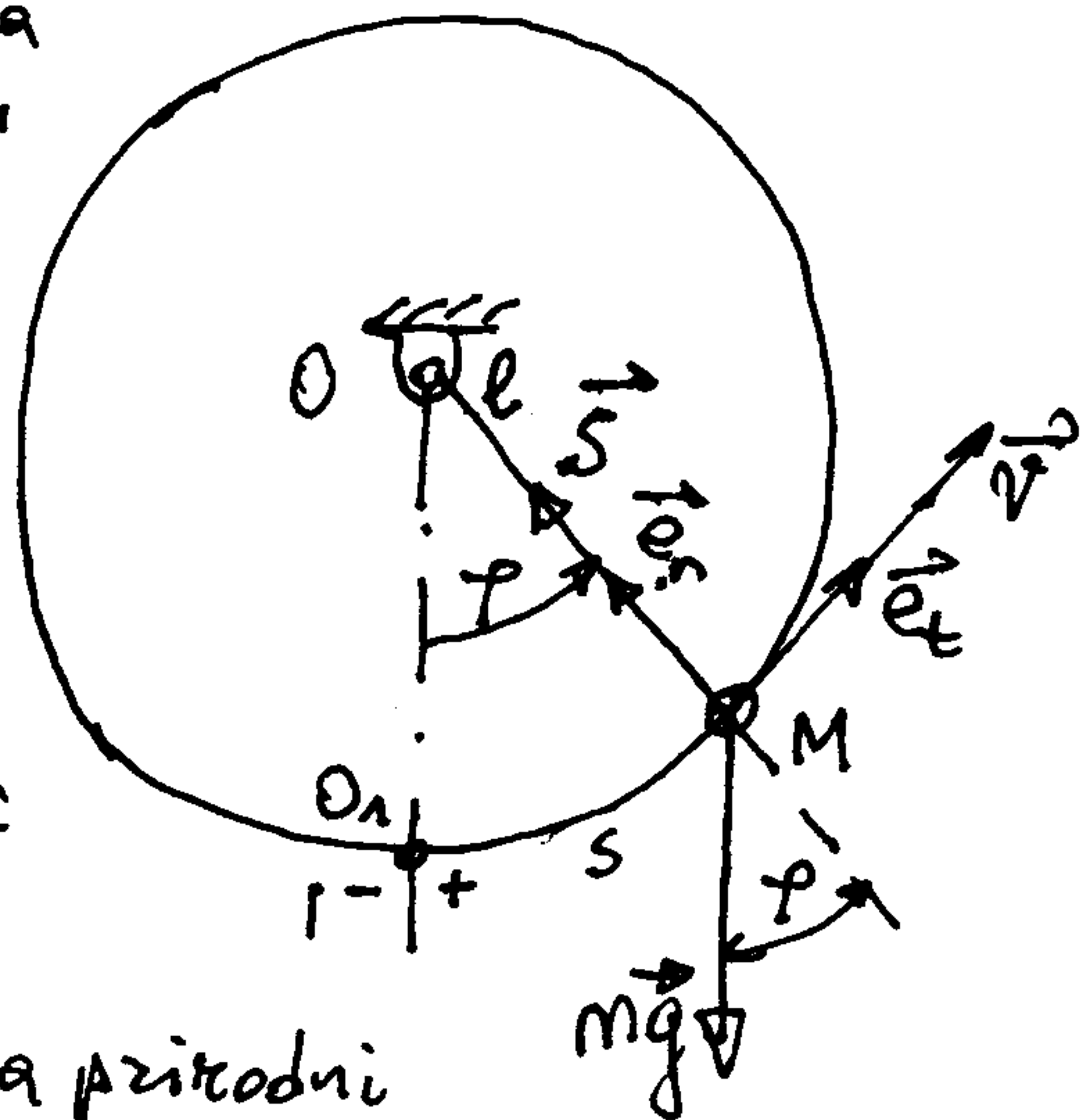
Pod matematičkim klatnom podrazumijevamo materijalnu tačku koja se kreće po kružnici, u vertikalnoj ravni, pod dejstvom sile teže. Veza koja obezbeđuje ovakvo kretanje može biti ostvarena na razne načine, recimo pomoću krakog krutog štapa  $OM$ , dužine  $l$ , koji se može slobodno okretati oko nepokretne horizontalne ose  $O$ , pa je tačka prinudena da se kreće po kružnici poluprečnika  $l$  sa centrom u tački  $O$ .

Položaj tačke  $M$  se može odrediti lučnom koordinatom  $s$ , odnosno uglom  $\varphi$  koji štاپ zadržava sa vertikalnim pravcem ( $s = l\varphi$ ).

Na tački  $M$  osim sile teže  $m\vec{g}$  djeluje i reakcija veze - sila u štapi  $\vec{R} = \vec{S} = S\vec{e}_r$  pa je osnovna jednačina dinamike u vektorskom obliku:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S},$$

a diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na prirodni koordinatni sistem glase:



$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi$$

$$m \frac{v^2}{l} = -mg \cos \varphi + S$$

Posto je  $v = l \dot{\varphi}$  i  $\dot{v} = l \ddot{\varphi}$  pa gornje jednačine postaju

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi &= 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \\ S &= ml \dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi \end{aligned} \right\} (**)$$

Jednačina  $(**)_1$  je diferencijalna jednačina kretanja matematičkog klatna – njenom integracijom za zadate početne uslove ( $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 = v_0/l$ ) određuje se tačna jednačina kretanja  $\varphi = \varphi(t)$ , a zatim se na osnovu jednačine  $(**)_2$  određuje reakcija veze – sila u stopu  $S$ . Nažalost da se rješenje jednačine  $(**)_1$  ne može izraziti preko elementarnih funkcija, pa se najčešće ona rješava numerički.

U specijalnom slučaju kada klatno izvoditava kretanja pri kojima je  $|\varphi(t)| \ll 1$ , može se sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti staviti da je  $\sin \varphi \approx \varphi$  pa dobijemo jednostavniju (linearnu) diferencijalnu jednačinu

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

koja je istog oblika kao i diferencijalna jednačina (13). Ona opisuje male oscilacije matematičkog klatna oko donjeg vertikalnog položaja, koje su određene harmonijskim zakonom oblika

$$\varphi = A \sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{\varphi_0^2 + (\dot{\varphi}_0/\omega)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{\dot{\varphi}_0 \omega}{\varphi_0}$$

ičiji je period oscilovanja

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{l/g}.$$



#### 4.7 D'alambertov princip

Kao što smo ranije konstatovali, osnovna jednačina dinamike ne-slobodne tačke je oblika

$$m\vec{a} = \vec{F}_a + \vec{R}, \quad (18)$$

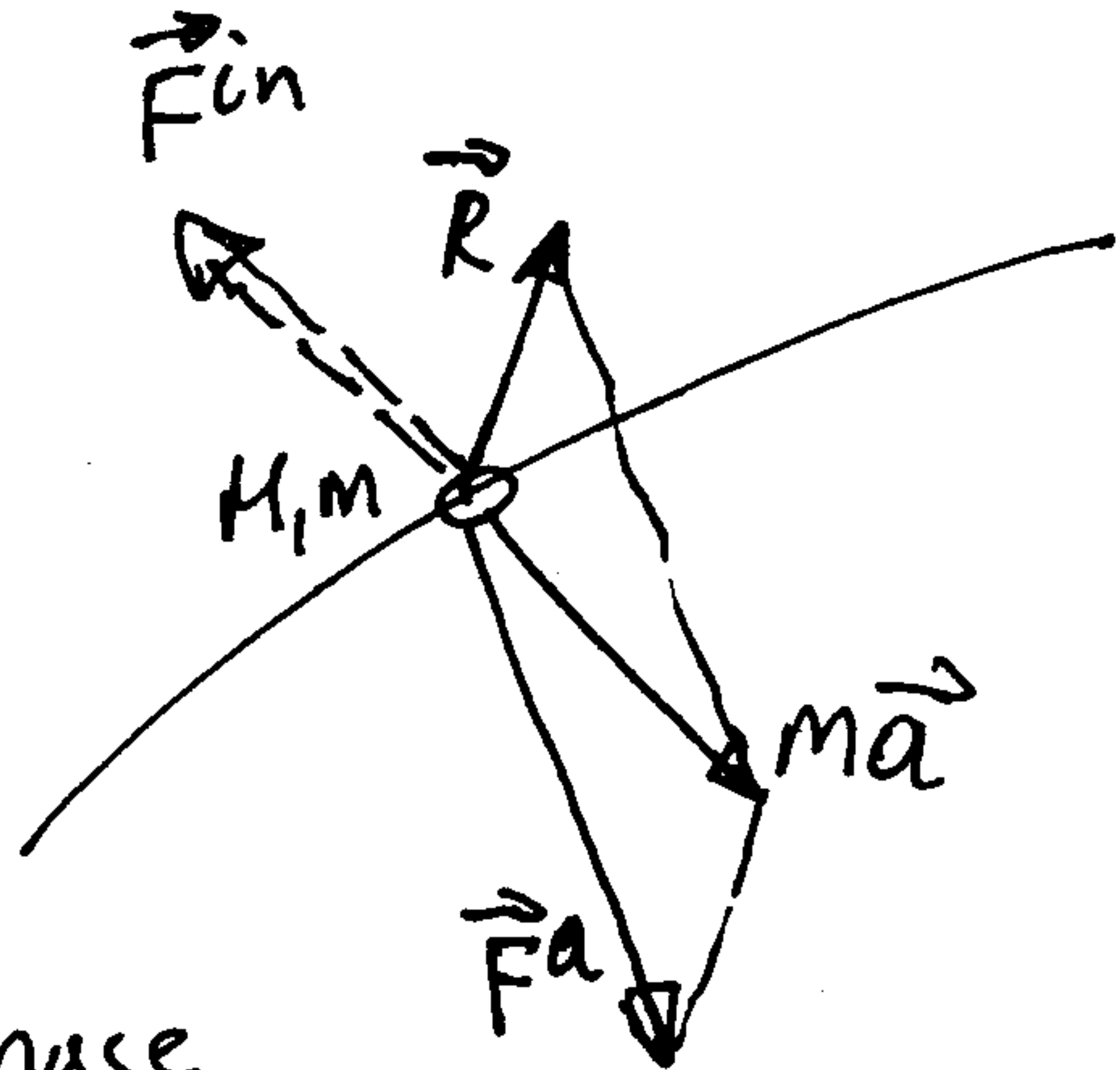
gdje je  $\vec{F}_a$  rezultanta aktivnih sila, a  $\vec{R}$  rezultanta sila reakcije veza.

Uvedimo, s formalne tačke gledišta, inercijalnu silu

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$$

Ona je po intenzitetu jednaka proizvodu mase tačke i njenog ubrzanja, ali je suprotnog smjera od smjera ubrzanja. Koriscenjem ovog pojma jednačina (18) se zapisuje u obliku

$$\vec{F}_a + \vec{R} + \vec{F}_{in} = 0 \quad (19)$$

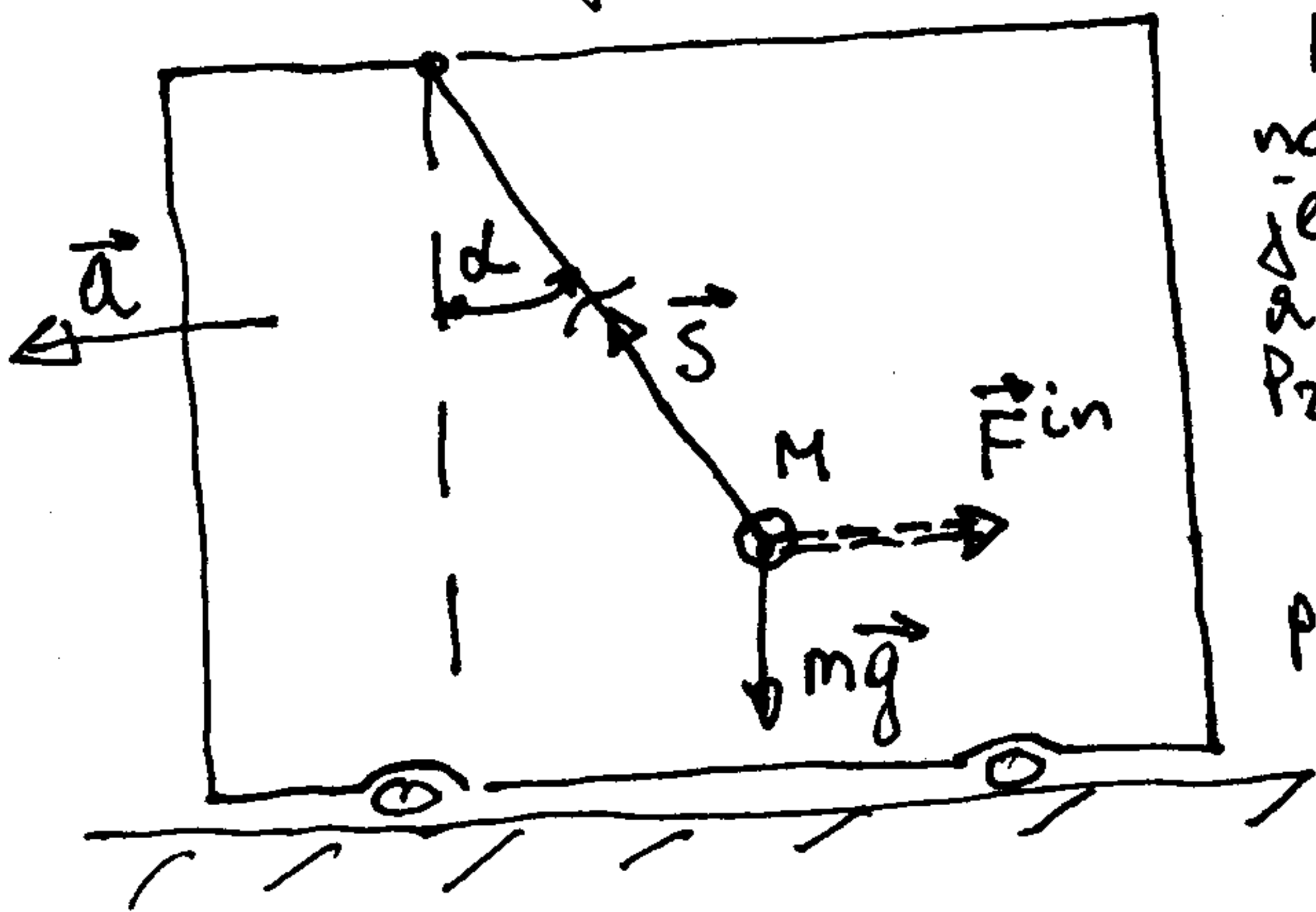


Jednačina (19) izražava D'alambertov princip za tačku: Ako u svakom trenutku vremena aktivnim silama i reakcijama veza koje djeluju na materijalnu tačku dodamo inercijalnu silu, onda će taj sistem sila biti u ravnoteži.

Naglasimo da na materijalnu tačku stvarno djeluju samo aktivne sile i reakcije veza, a inercijalna sila je uvedena uslovno (vještački) da bi bili u stanju da dinamičke jednačine postavimo formalno u formi statičkih jednačina.

Primjena ovog principa je pogodna pri rješavanju prvog zadatka dinamike.

Primjer 8. U toku ubrzavanja voza pri polasku iz stanice objesi se o konac teret, pri čemu se drugi kraj konca pričvrsti za tavanicu nekog vagona. Tom prilikom konac, kada se ubrzanje ustali, sklene od vertikalnog pravca za ugao  $\alpha = 5^\circ$ . Odrediti ubrzanje voza.

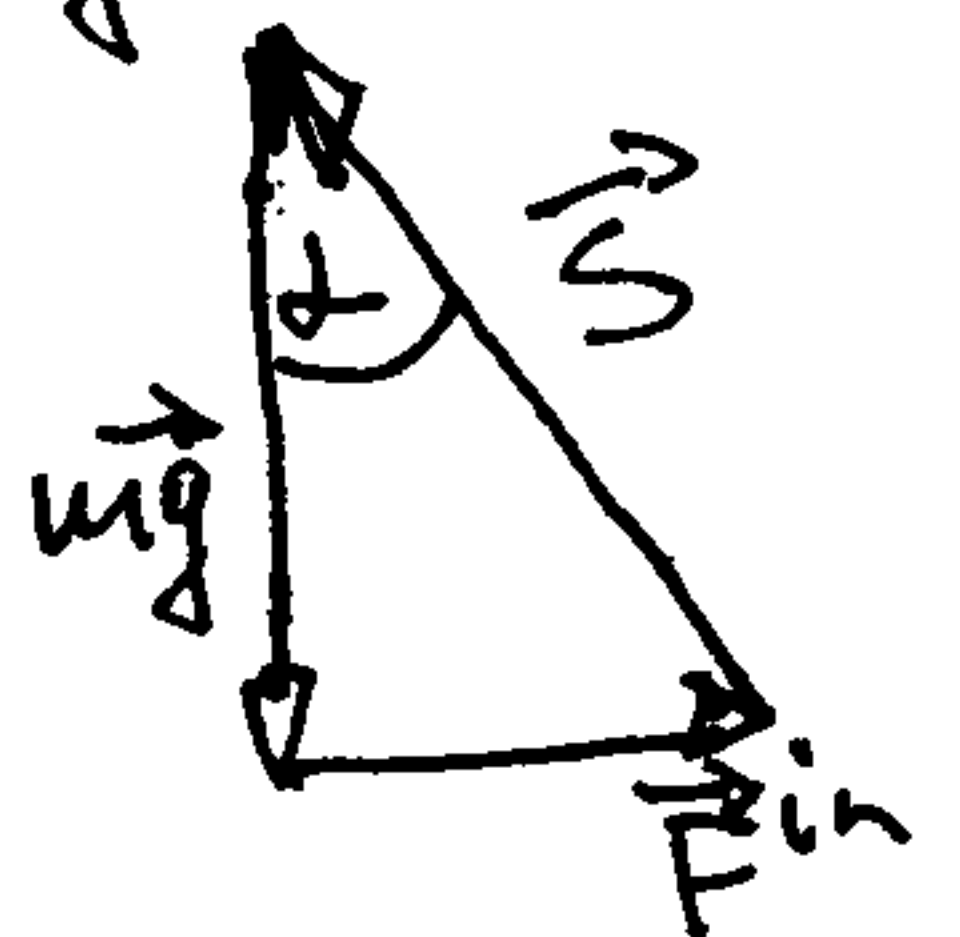


Na teret djeluje sila teže  $m\vec{g}$  i sila u koncu (reakcija veze)  $\vec{S}$ . Dvije sile su pridružen - jedna sila inercije čiji je intenzitet  $F_{in} = m\vec{a}$  a smjer suprotan od smjera ubrzanja voza  $\vec{a}$ . Prema D'alambertovom principu je

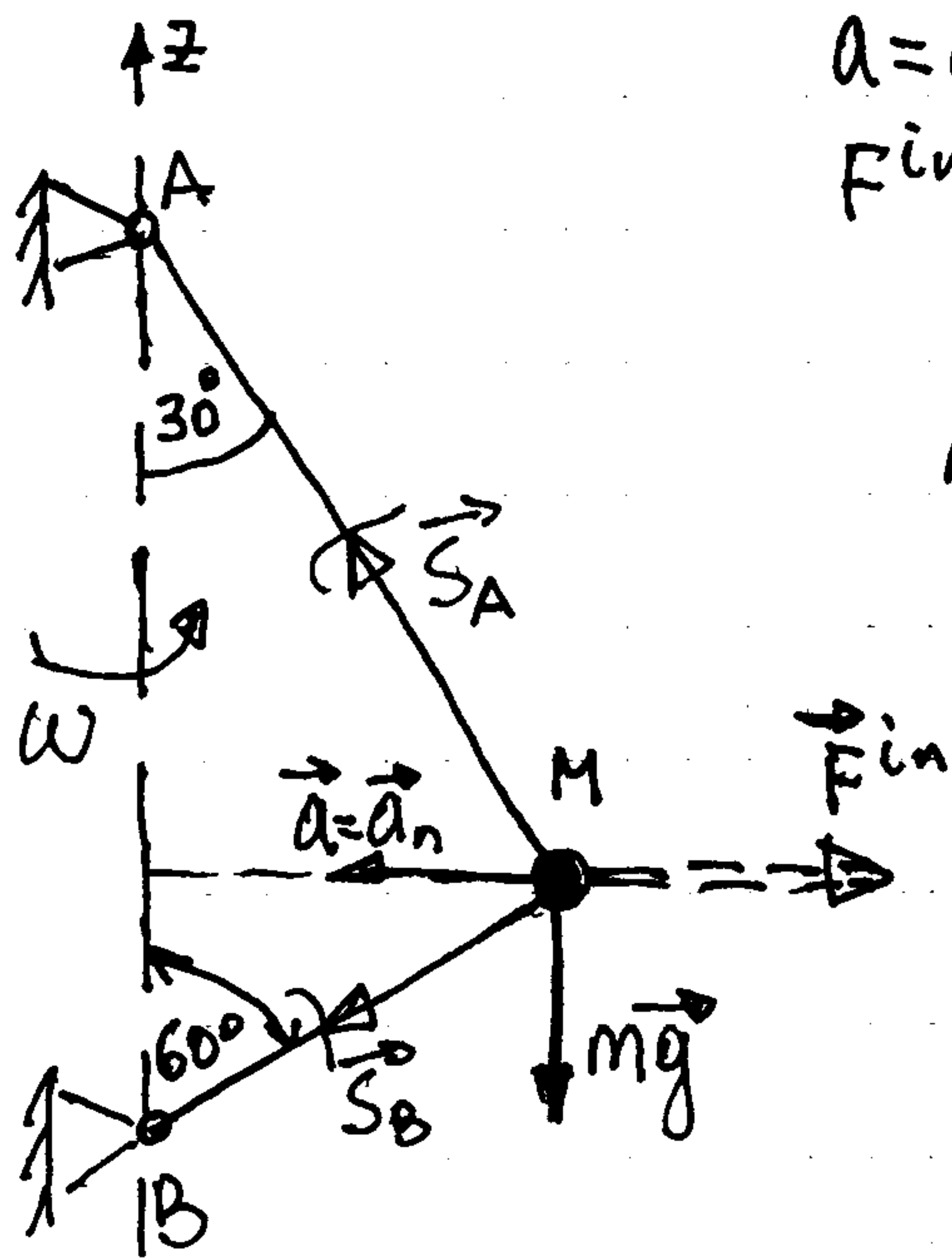
$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{F}_{in} = 0,$$

$$\text{pa je } \frac{F_{in}}{mg} = \tan \alpha, \text{ tj. } \frac{ma}{mg} = \tan \alpha$$

$$\Rightarrow a = g \tan \alpha = 0,86 \text{ m/s}^2$$



Primer 9. Kuglica mase  $m = 2 \text{ kg}$  vezana je za lake brute štapove. Sistem se obzice oko vertikalne  $z$ -ose konstantnom ugaonom brzinom  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ . Odredi sile u štapovima ako je  $\overline{AM} = 1,5 \text{ m}$ .



$$a = a_n = \overline{AM} \sin 30^\circ \omega^2 = 6,75 \text{ m/s}^2$$

$$F^{in} = ma = 13,5 \text{ N}$$

$$\vec{mg} + \vec{S}_A + \vec{S}_B + \vec{F}^{in} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} y: -S_A \cos 60^\circ - S_B \cos 30^\circ + F^{in} &= 0 \\ z: -mg + S_A \sin 60^\circ - S_B \sin 30^\circ &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

$$(*)_2 \Rightarrow S_B = \sqrt{3} S_A - 2mg \text{ u } (*)_1 \Rightarrow$$

$$S_A = \frac{1}{2} F^{in} + \frac{\sqrt{3}}{2} mg, \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\boxed{S_A = 23,74 \text{ N}}$$

$$\boxed{S_B = 1,88 \text{ N}}$$



#### 4.8. Rad sile i snaga

Rad sile je skalarna veličina koja predstavlja mjeru dejstva sile na materijalnu tačku pri njenom pomjeranju.

a) Rad konstantne sile na pravolinijskom pomjeranju

Rad konstantne sile  $\vec{F}$  na pravolinijskom pomjeranju njene napadne tačke  $\overline{M_1 M_2} = \vec{U}$  definisan je skalarnim proizvodom vektora sile i vektora pomjeranja napadne tačke, tj.

$$A_{(M_1, M_2)} = \vec{F} \cdot \overline{M_1 M_2}, \quad (20)$$

ili

$$A_{(M_1, M_2)} = F U \cos \alpha = F_n U,$$

gdje je  $F_n$  projekcija sile na pravac pomjeranja ( $F_n = F \cos \alpha$ );  $U = \overline{M_1 M_2}$ .

Specijalni slučajevi:

1) Ako je  $\alpha = 0$  ( $\vec{F} \uparrow \vec{U}$ ), onda je  $A_{(M_1, M_2)} = F U$ ;

2) Ako je  $\alpha = 90^\circ$  ( $\vec{F} \perp \vec{U}$ ), onda je  $A_{(M_1, M_2)} = 0$ ;

3) Ako je  $\alpha = 180^\circ$  ( $\vec{F} \downarrow \vec{U}$ ), onda je  $A_{(M_1, M_2)} = -F U$ .

Prema tome, rad sile može biti: pozitivan (sila ubrzava kretanje), negativan (sila usporava kretanje), jednak nuli (sila upravna na pomjeranje — ne utiče na promjenu intenziteta brzine).

Jedinica mjere za rad sile je Džul,  $1 J = 1 Nm$  — to je rad koji izvrši sila intenziteta jednog Njutra na pomjeranju od jednog metra u pravcu dejstva sile.

b) Rad promjenljive sile na krivolinijskom pomjeranju

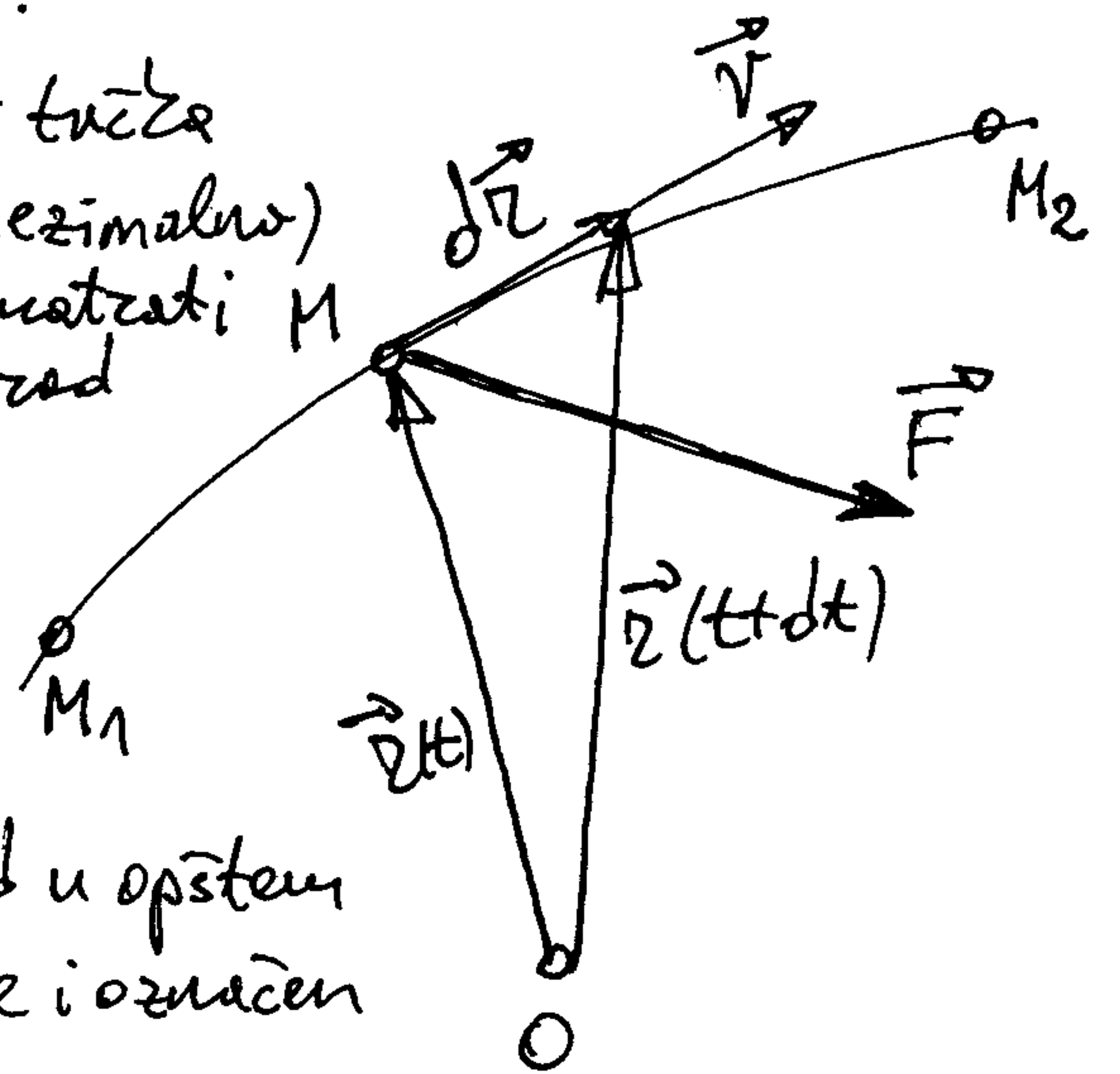
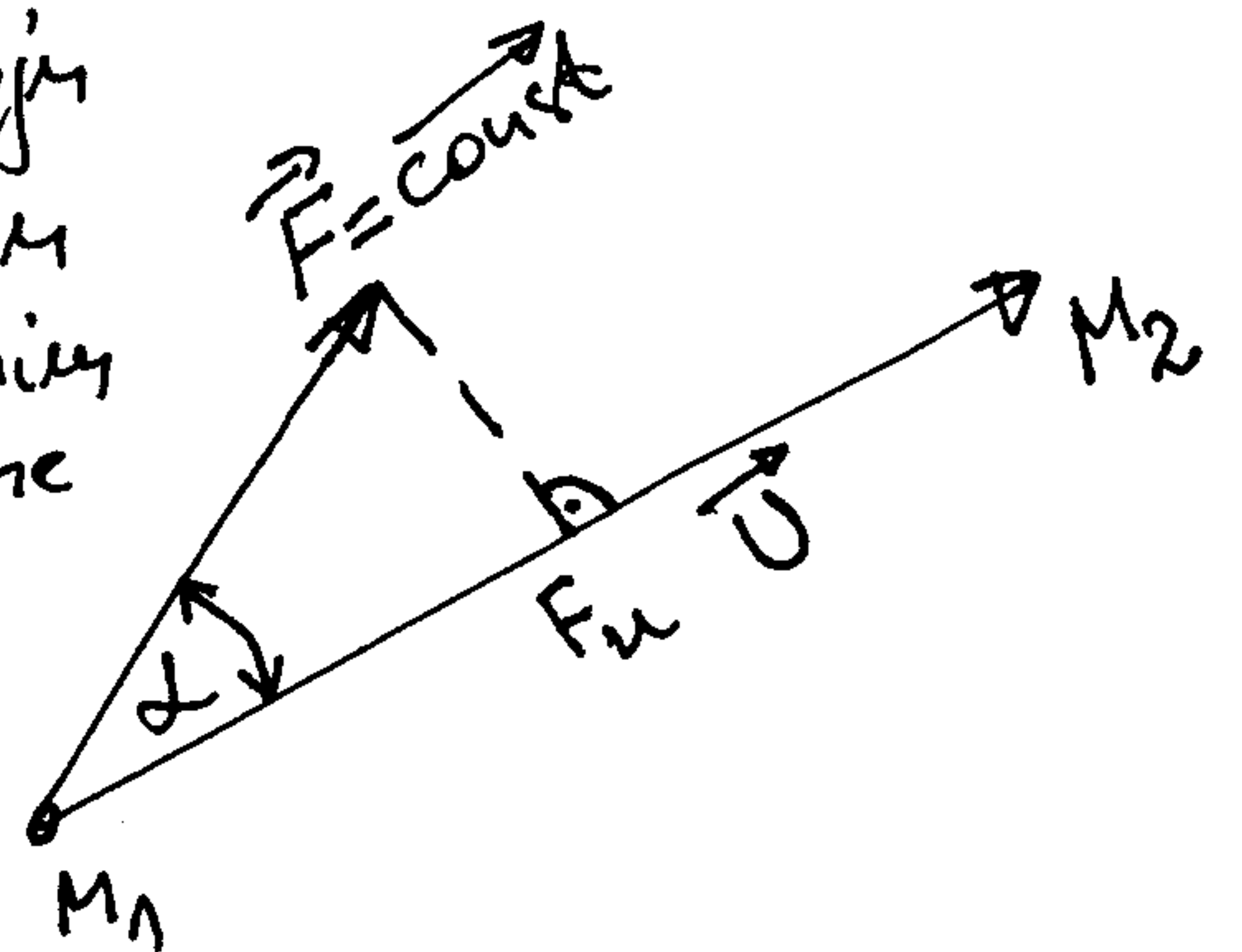
Posmatrajmo kretanje materijalne tačke  $M_1$  na koju djeluje promjenljiva sila  $\vec{F}$ , duž krivolinijske trajektorije koja je određena parametarskom jednačinom kretanja  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Za beskonačno mali interval vremena  $dt$  tačka izvrši beskonačno malo (elementarno, infinitezimalno) pomjeranje  $d\vec{r}$ . Na ovom pomjeranju može se smatrati  $M$  da je sila konstantna pa je, u skladu sa (20), rad sile na elementarnom pomjeranju

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (21)$$

i on se zove elementarni rad.

Važno je napomenuti da elementarni rad u opštem slučaju nije diferencijal neke funkcije (zato je označen sa  $\delta A$ , a ne  $dA$ ).



Ako se tačka  $M$  pomjeri iz položaja  $M_1$  u neki drugi položaj  $M_2$ , tada sila  $\vec{F}$  vrši konačan rad na tom pomjeranju koji je određen izrazom:

$$A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \hat{A} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (22)$$

Ovaj izraz u matematičkom smislu predstavlja krivolinijski integral. Prema tome, rad sile na bilo kom pomjeranju jednak je integralu elementarnog rada, računatome duž krive koja opisuje napadnu tačku sile.

Iz (22) i osobine skalarnog proizvoda slijedi da je rad rezultante  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$  jednak zbiru radova komponentata:

$$A_{(M_1, M_2)}(\vec{F}) = \sum A_{(M_1, M_2)}(\vec{F}_i)$$

Pošto je  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ , to je vektor elementarnog pomjeranja kolinearan sa vektorom brzine tačke:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

pa ga na jednostavan način možemo izraziti u različitim koordinatnim sistemima, što nam omogućava da elementarni rad (21), odnosno rad na konačnom pomjeranju (22), izrazimo u tim koordinatnim sistemima.

- Dekartov koordinatni sistem:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}; \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

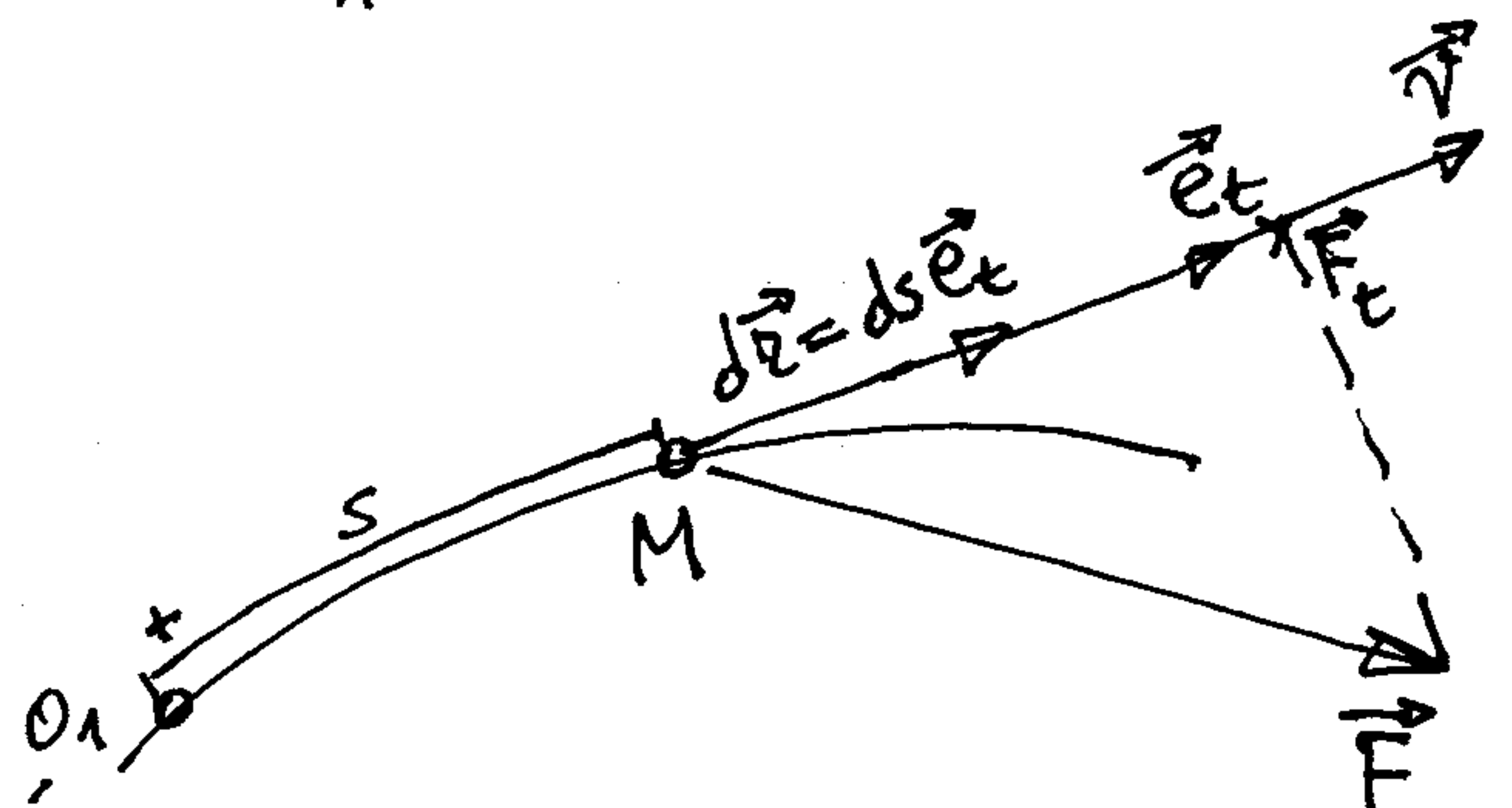
$$\hat{A} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (23)$$

- Prirodni koordinatni sistem

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t, \quad d\vec{r} = \vec{v} dt = ds\vec{e}_t$$

$$\hat{A} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{e}_t ds = F_t ds$$

$$A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} F_t ds \quad (24)$$



Rad neke sile se može unaprijed izračunati, ne poznavajući zakon kretanja tačke, samo kad je sila konstantna ili kad je funkcija položaja.

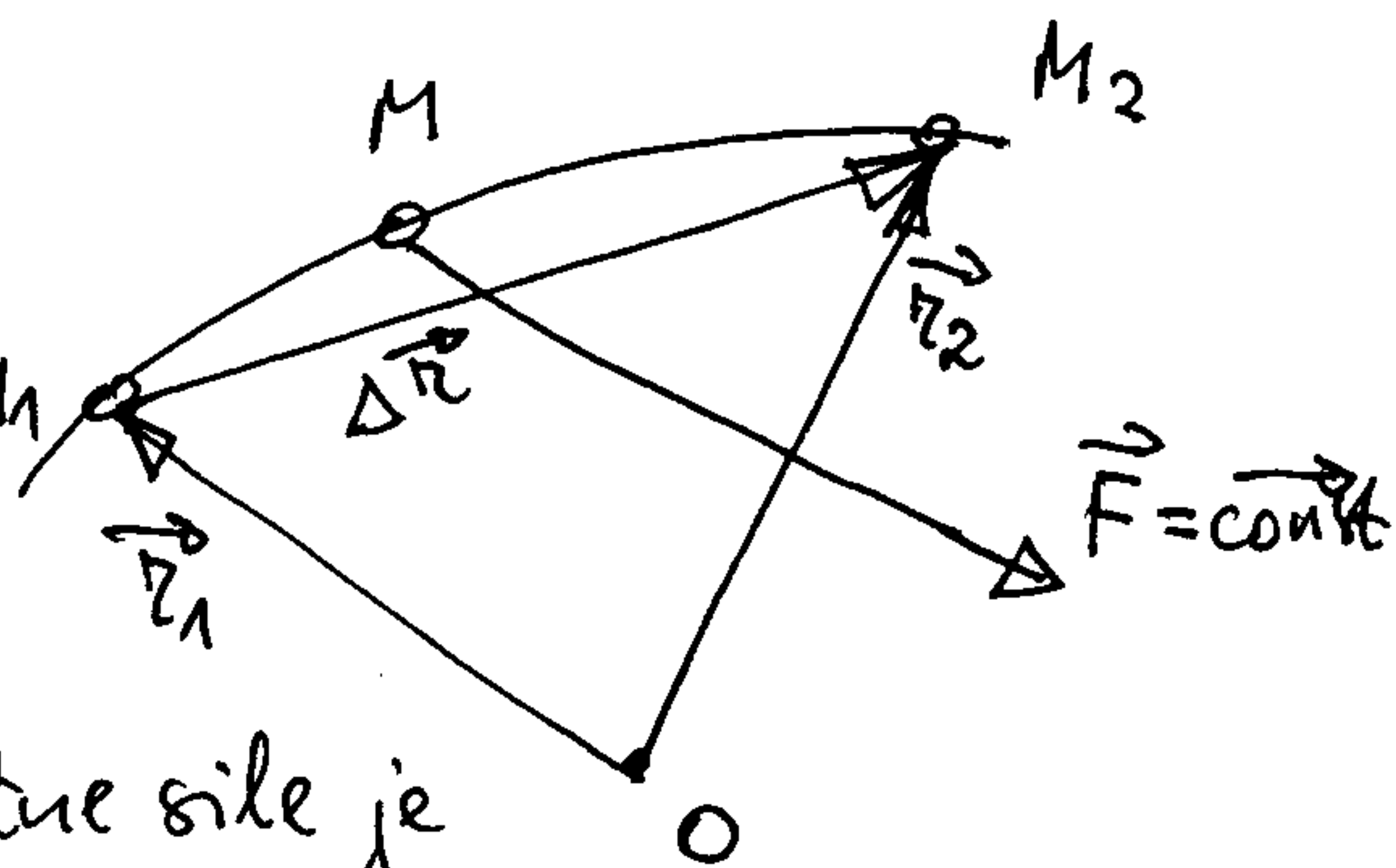


Ako je sila konstantna, onda je na osnovu (22)

$$A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{M_1}^{M_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r} \Big|_{M_1}^{M_2}$$

$$= \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{M_1 M_2},$$

što se svodi na (20). Znači, rad konstantne sile je jednak skalarnom proizvodu vektora sile i vektora pomjeranja napadne tačke sile.



Primer. Rad sile teže.

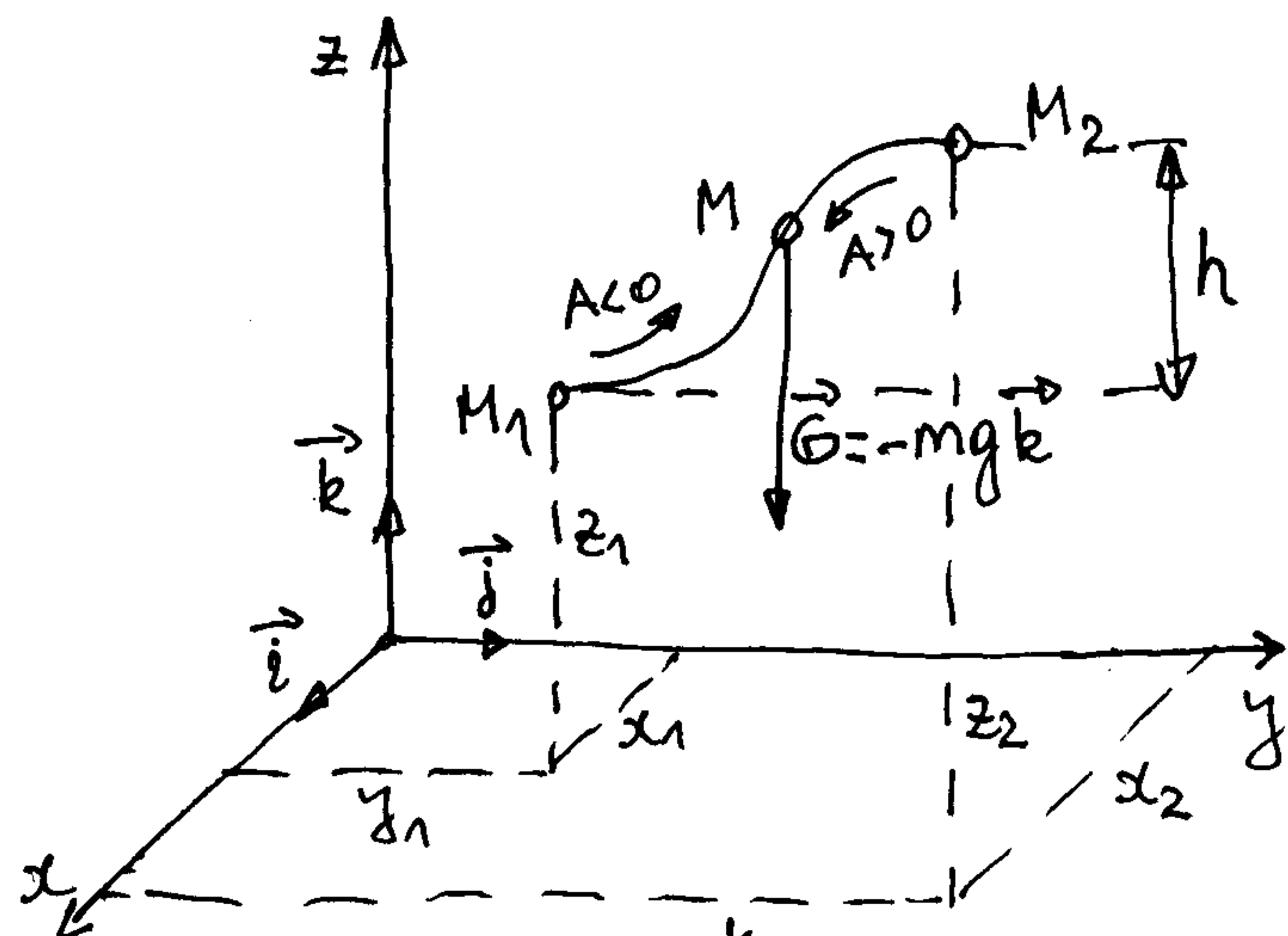
$$\vec{G} = -mg\vec{k} = \text{const}$$

$$\vec{M_1 M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$A_{(M_1, M_2)} = \vec{G} \cdot \vec{M_1 M_2} = -mg(z_2 - z_1)$$

$$A_{(M_1, M_2)} = \pm mgh, \quad h - \text{visinska razlika}$$

između početnog i krajnjeg položaja; "+" ako je početni položaj iznad krajnjeg (tačka se kreće na dole) i "-" ako je početni položaj ispod krajnjeg (tačka se kreće na gore).



Primer. Rad elastične sile

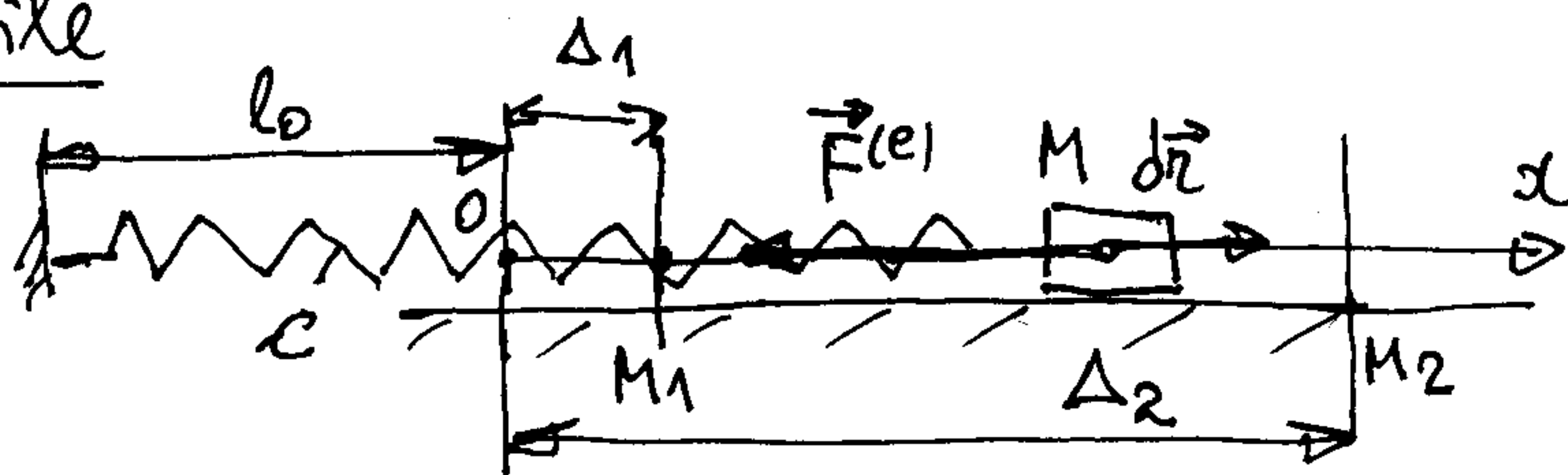
$$\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i}$$

$$\hat{d}A = \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r} = -cx dx$$

$$A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \hat{d}A = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} -cx dx = -\frac{1}{2} cx^2 \Big|_{\Delta_1}^{\Delta_2}$$

$$A_{(M_1, M_2)} = \frac{1}{2} c (\Delta_1^2 - \Delta_2^2)$$



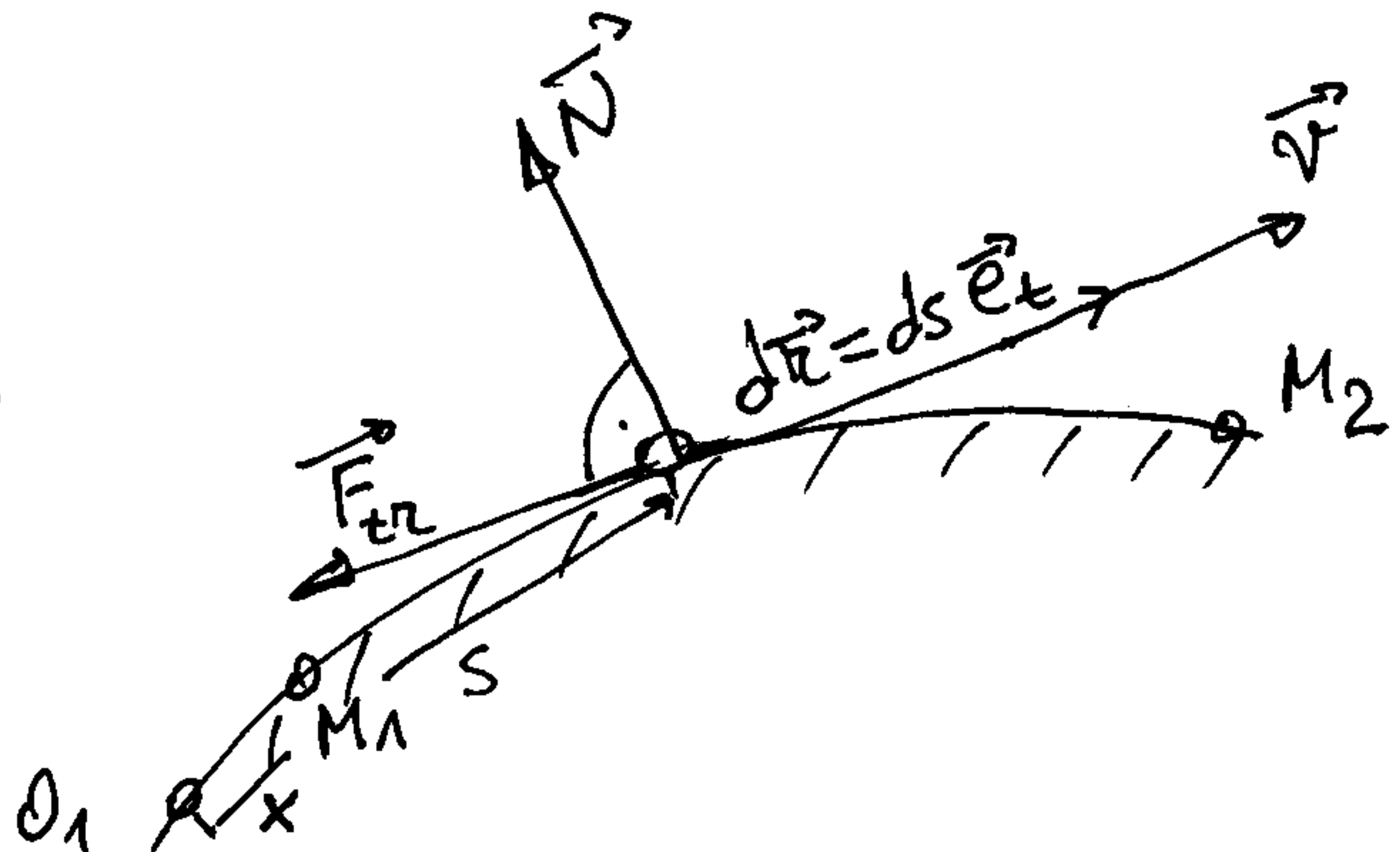
Primer. Rad sile trenja

$$dA = -F_{tz} ds_{M_2}$$

$$A_{(M_1, M_2)} = - \int_{M_1} F_{tz} ds, \quad F_{tz} = \mu_0 N$$

$\mu_0$  je  $F_{tz} = \text{const}$ , onda je

$A_{(M_1, M_2)} = -F_{tz} (s_2 - s_1)$ ,  $s_2 - s_1 = \overline{M_1 M_2}$  — dužina luka krive po kojoj se pomjera tačka. Primijetimo da je rad sile trenja <sup>klizanje</sup> uvijek negativan (ova sila uzrokuje brtvanje). Takođe, primijetimo da je rad normalne komponente reakcije veze  $\vec{N}$  jednak nuli:  $dA(\vec{N}) = \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$  jer je  $\vec{N} \perp d\vec{r}$ .



Snaga. Snaga je veličina koja karakteriše brzinu vršenja rada.

Neka sila  $\vec{F}$  izvrši rad  $A$  za vrijeme  $t_1$ . Tada je srednja snaga te sile definirana izrazom:

$$P_{sr} = \frac{A}{t_1}$$

Posto se elementarni rad  $dA \stackrel{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{}$  izvrši za elementarni interval vremena  $dt$ , to je trenutna snaga sile  $\vec{F}$  određena izrazom:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (25)$$

tj. ona je jednaka skalarnom proizvodu vektora sile koja djeluje na materijalnu tačku i vektora brzine te tačke.

Snaga ima dimenziju rada u jedinici vremena, a jedinica mjere je Wat,  $1W = 1J/s$  — snaga koja odgovara radu od jednog džula koji se izvrši u jednoj sekundi.

Rad koji izvrši mašina često se izražava kao proizvod njene srednje snage i vremena rada mašine. Na taj način se došlo do jedinice za rad koja se veoma često upotrebljava u tehnici, a to je kilovat-čas:  $1kWh = 3,6 \cdot 10^6 J$ .

U prirodnom koordinatnom sistemu izraz (25) postaje

$$P = F_t v_t \quad (26)$$

tj. snaga je jednaka proizvodu tangencijalne komponente sile i brzine kretanja.



#### 4.9 Zakon o promjeni kinetičke energije

Kinetička energija materijalne tačke, mase  $m$ , koja se kreće brzinom  $\vec{v}$  je skalarna veličina definisana izrazom

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad (27)$$

tj. predstavlja polovinu proizvoda mase i kvadrata brzine tačke.

Ali osnovnu jedinicu dinamike tačke

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

pomnožimo skalarno sa vektorom elementarnog pomjeranja  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , znajući da je  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ , dobijemo

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Pošto je  $m\vec{v} \cdot d\vec{v} = m \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d(\frac{1}{2} m v^2) = dE_k$  i  $\hat{A} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , to se gornja jednačina može zapisati u obliku

$$dE_k = \hat{A} \quad (28)$$

koji predstavlja diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije materijalne tačke: Elementarni priruštaj (diferencijal) kinetičke energije materijalne tačke jednak je elementarnom radu sile koja djeluje na tačku.

Dijeljenjem lijeve i desne strane u (28) sa  $dt$  dobijamo alternativni oblik

$$\frac{dE_k}{dt} = P, \quad (29)$$

koji glasi: Izvod kinetičke energije po vremenu jednak je snazi sile pod čijim se dejstvom tačka kreće.

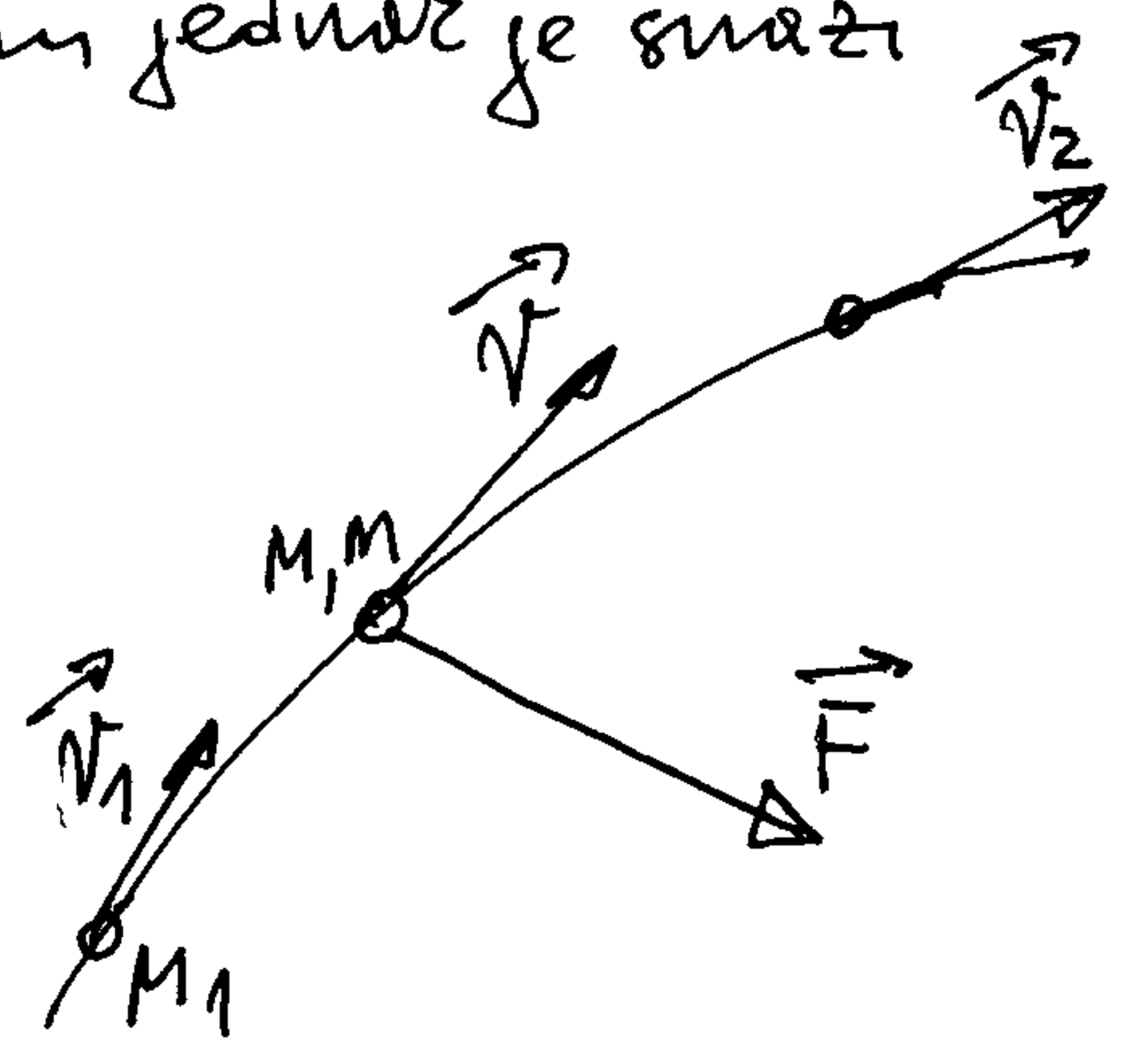
Konkretni (integralni) oblik ovog zakona se dobija integracijom izraza (28) duž trajektorije od početnog položaja  $M_1$  do krajnjeg položaja  $M_2$ :

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{(M_1, M_2)} \quad (30)$$

odnosno

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = A_{(M_1, M_2)}, \quad A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (30')$$

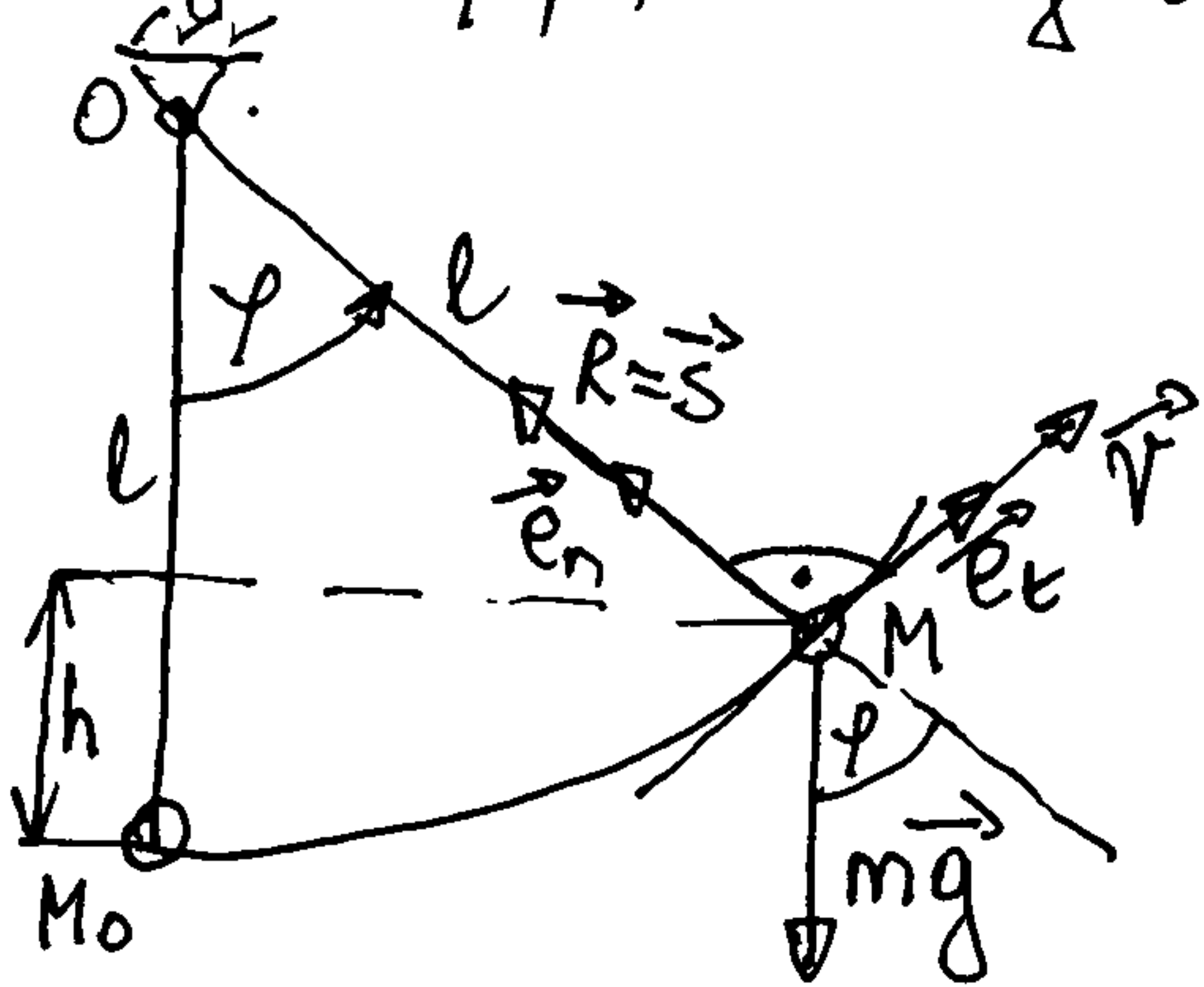
Prema tome, priruštaj kinetičke energije materijalne tačke na kona-



čnom pomjeranju jednak je radu sile, koja djeluje na tačku, na tom pomjeranju.

U ovim formulacijama podrazumijeva se da se u slučaju dejstva više sila, bilo da su u pitanju aktivne sile ili reakcije veza, računaju za i snaga svih sila koje djeluju na tačku. Ako je veza u obliku nepokretne glatke površi ili linije, reakcija veze je usmjerena po normalni na putanju tačke pa je njen rad jednak nuli.

Primjer 10. U najnižem položaju matematičkog klatna, mase  $m$  i dužine  $l$ , saopšti se početna brzina  $v_0$ . a) Odrediti brzinu tačke u položaju određenim uglom  $\varphi$ ; b) Kolika je sila reakcije veze u tom položaju?



$$a) \quad E_k - E_{k0} = A_{(M_0, M)}(m\vec{g}) + A_{(M_0, M)}(\vec{S})$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$A_{(M_0, M)}(m\vec{g}) = -mgh, \quad h = l - l \cos \varphi$$

$$A_{(M_0, M)}(\vec{S}) = 0 \quad \text{jer je } \vec{S} \perp \vec{e}_t$$

$$\Rightarrow \underline{v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos \varphi)} \quad (*)$$

$$b) \quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S}$$

$$\vec{e}_n: \quad m a_n = -mg \cos \varphi + S, \quad a_n = \frac{v^2}{R_k}, \quad R_k = l$$

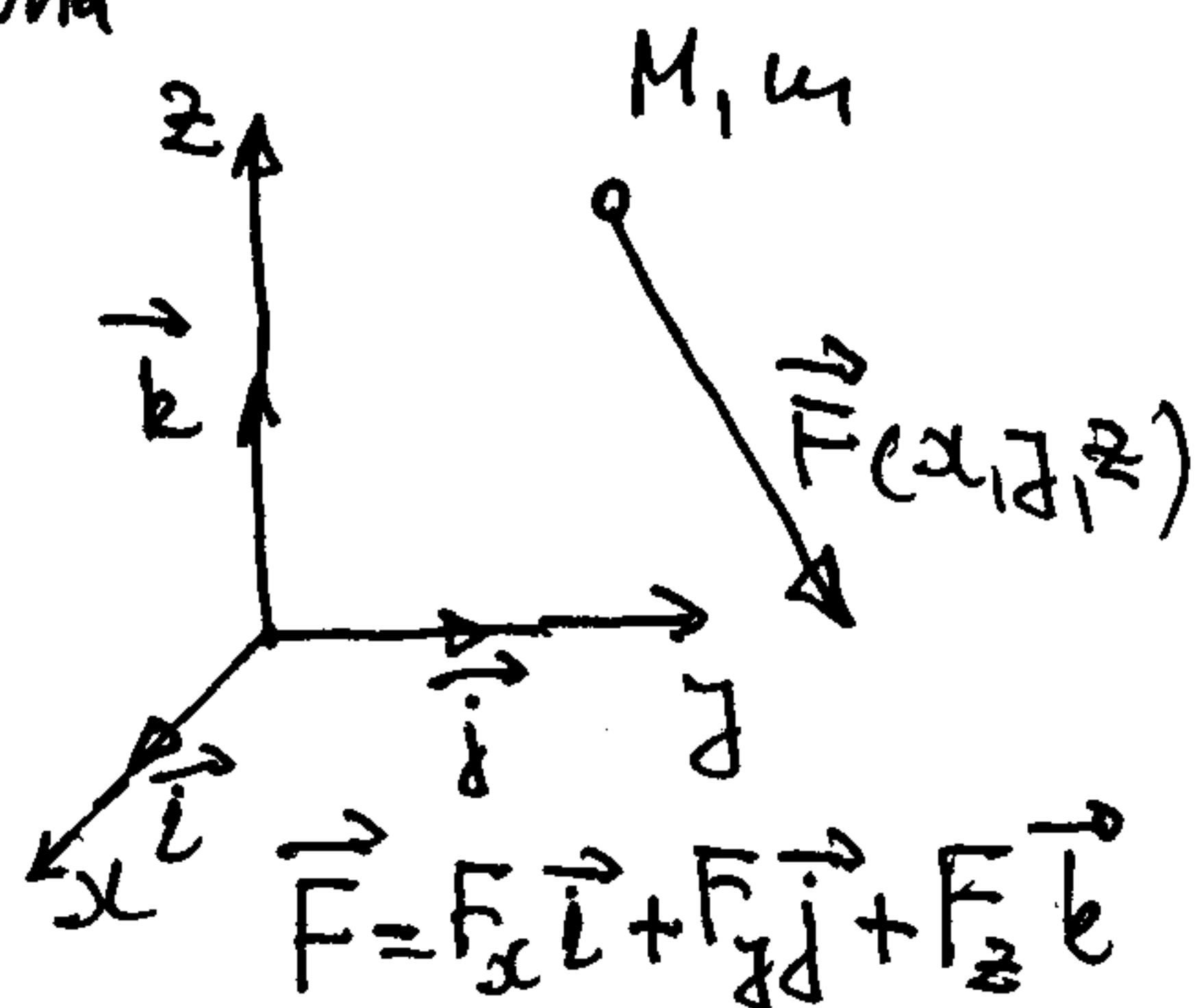
$$\Rightarrow \underline{S = \frac{m v^2}{l} + mg \cos \varphi} \stackrel{(*)}{=} \underline{\frac{m v_0^2}{l} - 2mg + 3mg \cos \varphi}$$



#### 4.10 Konzervativne sile. Zakon o održanju mehaničke energije

Sila koja zavisi od položaja  $\vec{F}(x, y, z)$  je konzervativna ako se njene projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema mogu izraziti kao negativni parcijalni izvodi jedne skalarne funkcije  $E_p(x, y, z)$  po odgovarajućim koordinatama:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$



Funkcija  $E_p$  se zove potencijalna energija.

Elementarni rad konzervativne sile je

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz\right) = -dE_p,$$

tj. jednak je negativnom diferencijalnoj potencijalne energije.

Rad konzervativne sile  $\vec{F}$  na konačnom pomjeranju od položaja  $M_1$  do položaja  $M_2$  bude

$$A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{M_1}^{M_2} dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

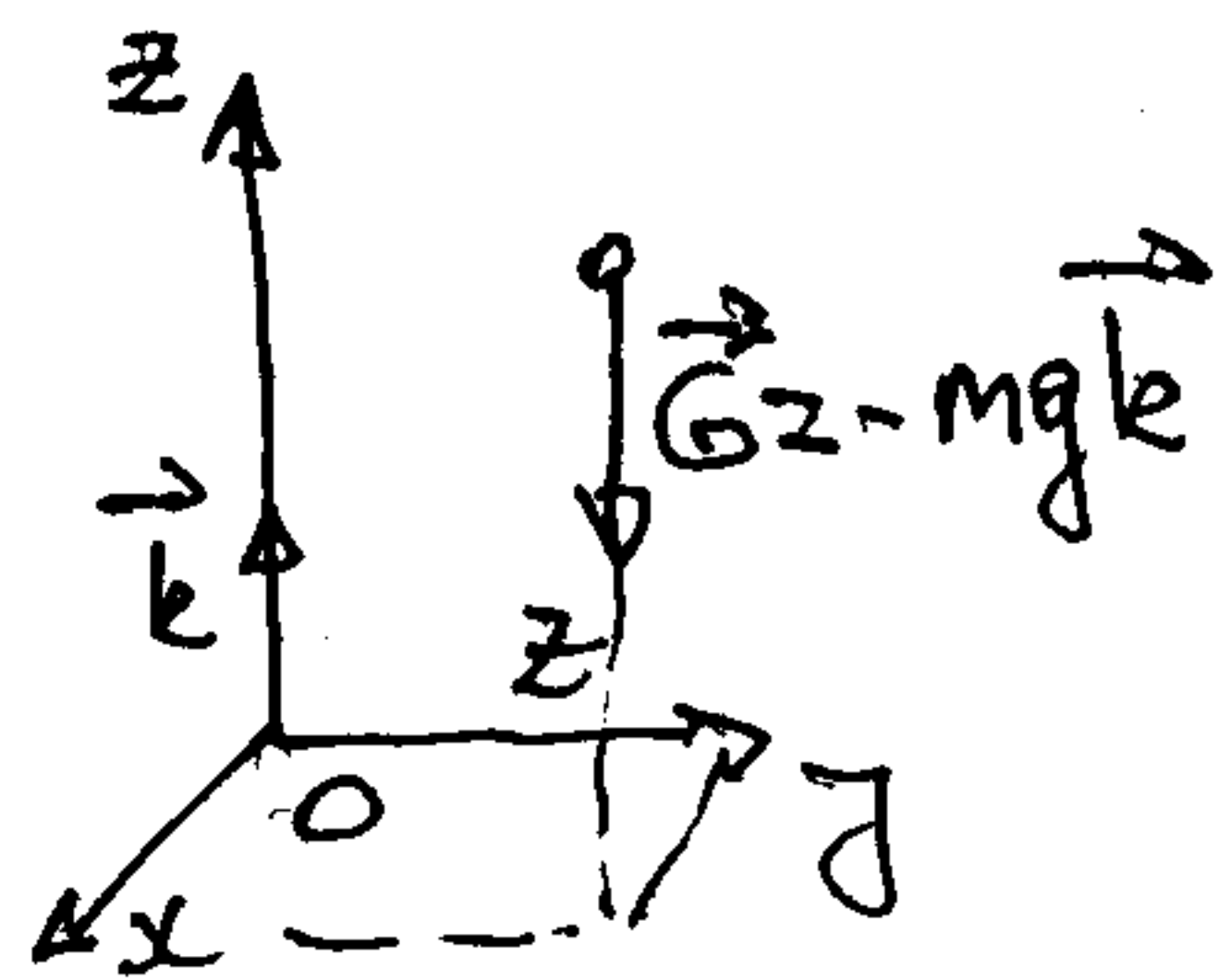
i, prema tome, jednak je razlici vrijednosti potencijalne energije u početnom i krajnjem položaju. Odatle slijedi da rad konzervativne sile ne zavisi od oblika putanje po kojoj se tačka kreće, već samo od početnog i krajnjeg položaja.

U konzervativne sile spadaju:

- sila zemljine težine  $\vec{G} = -mg\vec{k}$

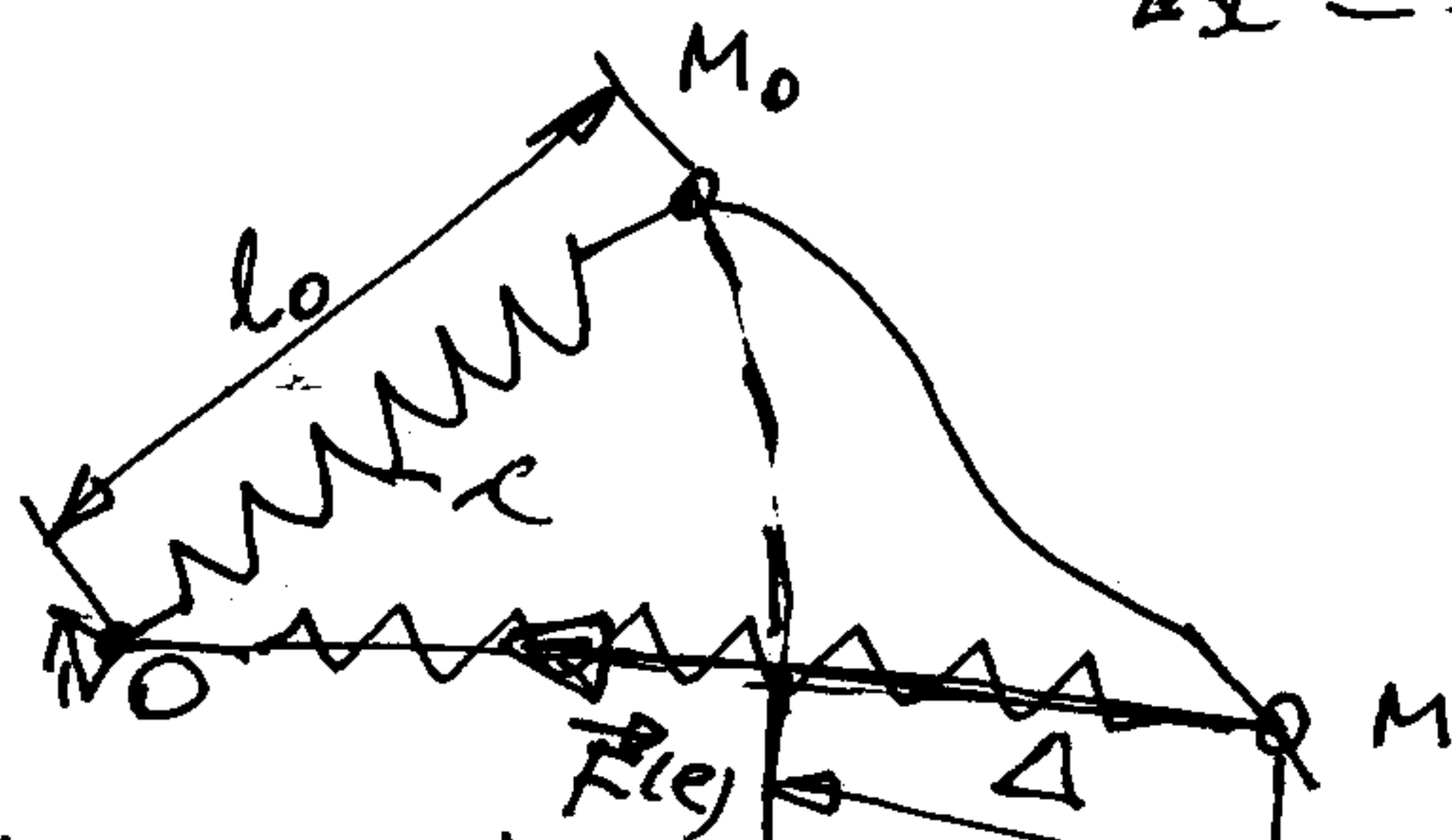
Njena potencijalna energija je  $E_p = mgz$

- elastična sila  $\vec{F}(e)$



$$E_p = \frac{1}{2} c \Delta^2$$

$\Delta = \overline{OM} - l_0$ ,  $l_0$  - dužina nedeformisane opruge.



Pretpostavimo da su sile koje djeluju na materijalnu tačku a koje vrše rad konzervativne. Tada jednačina (28) postaje  $dE_k = -dE_p$ , odnosno  $d(E_k + E_p) = 0$ , odatle slijedi

$$E_k + E_p = \text{const} \quad (31)$$

Velicina  $E = E_k + E_p$  zove se ukupna mehanička energija tačke, a (31) izražava zakon o održanju mehaničke energije: Ako su sve sile koje djeluju na materijalnu tačku a koje vrše rad, konzervativne, onda ukupna mehanička energija ostaje konstantna tokom kretanja.

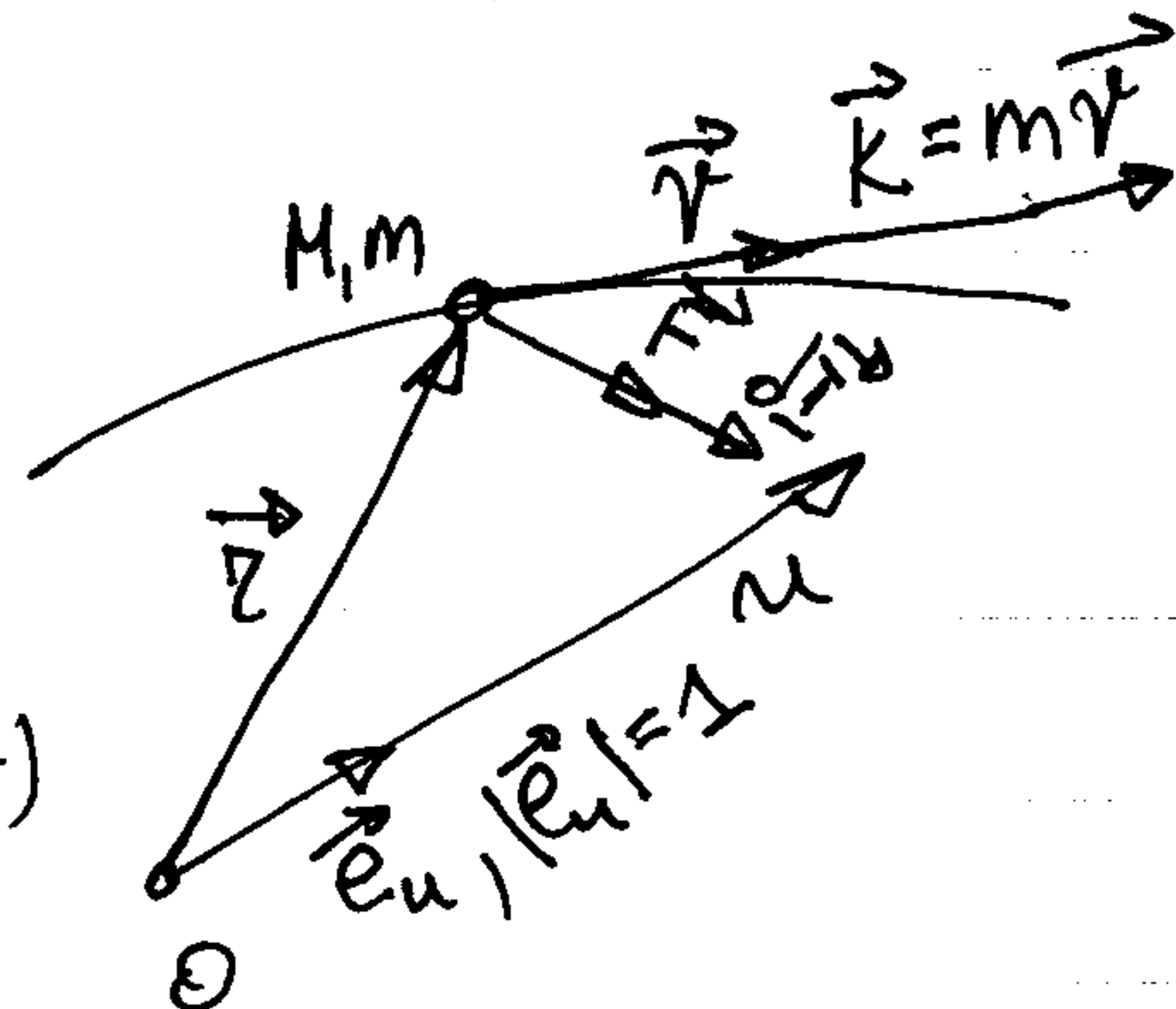
#### 4.11 Zakon o promjeni količine kretanja

Količina kretanja  $\vec{K}$  materijalne tačke  $M$ , mase  $m$ , je vektorska veličina određena proizvodom mase tačke i njene brzine

$$\vec{K} = m \vec{v} \quad (32)$$

Ako je  $\vec{F}$  rezultantna sila (aktivnih i reakcija veza) koje djeluju na tačku  $M$ , onda se osnovna jednačina dinamike  $m\vec{a} = \vec{F}$ , pod pretpostavkom o nepromjenjivosti mase ( $m = \text{const}$ ) može napisati u obliku

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \quad (33)$$



jer je  $d\vec{K}/dt = d(m\vec{v})/dt = m\vec{a}$ .

Relacija (33) izražava diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja: Izvod po vremenu količine kretanja materijalne tačke jednak je sili koja djeluje na tačku.

Projicirajući jednačinu (33) na neku nepokretnu os, recimo  $n$ , dobijamo

$$\frac{dK_n}{dt} = F_n \quad (34)$$

gdje su  $K_n$  i  $F_n$  projekcije količine kretanja i sile na  $n$ -osu ( $K_n = \vec{K} \cdot \vec{e}_n$ ,  $F_n = \vec{F} \cdot \vec{e}_n$ ).

Relacija (34) predstavlja diferencijalni oblik zakona o promjeni projekcije količine kretanja na nepokretnu os.

Definišimo elementarni impuls sile  $\vec{F}$ , kao:

$$d\vec{I} = \vec{F} dt \quad (35)$$

To je veličina koja karakteriše dejstvo sile na materijalnu tačku tokom beskonačno malog vremenskog intervala  $dt$ . Sada se relacija (33) može zapisati u obliku

$$d\vec{K} = d\vec{I}, \quad (36)$$

koji predstavlja drugi diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja: Diferencijal (elementarni priraštaj) količine kretanja materijalne tačke jednak je elementarnom impulsu sile koja djeluje na nju.

Ako posmatramo kretanje tačke  $M$  pod dejstvom sile  $\vec{F}$  na konačnom vremenskom intervalu  $[t_1, t_2]$ , tada je impuls sile  $\vec{F}$  za taj vremenski interval određen sa

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (37)$$



Iz relacije (37) sledi:

1) Impuls rezultante sile ( $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ ) jednak je geometrijskoj zbiru impulsa komponenta, tj.

$$\vec{I} = \sum \vec{I}_i, \quad \vec{I}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt.$$

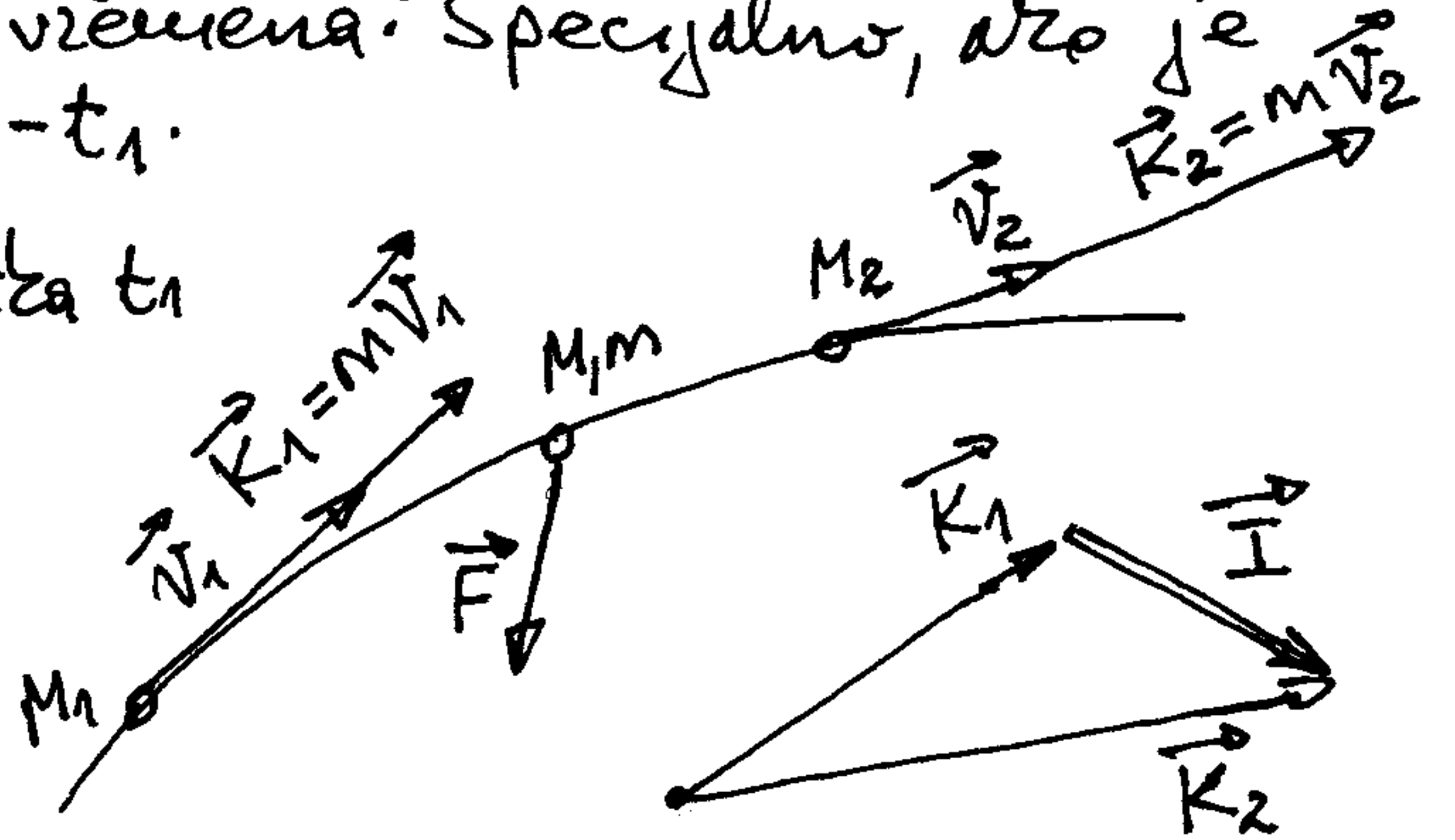
2) Da bise izračunao određeni integral kojim je definisan impuls potrebno je znati silu kao funkciju vremena. Specijalno, ako je  $\vec{F} = \text{const}$ , bide  $\vec{I} = \vec{F} \Delta t$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Integrirajući jednačinu (36) od trenutka  $t_1$  do trenutka  $t_2$ , dobijamo

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt,$$

odnosno

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I} \quad (38)$$



To je zakon o promjeni količine kretanja u integralnom (konačnom) obliku: Promjena količine kretanja tačke tokom konačnog vremenskog intervala jednaka je impulsu sile za taj isti vremenski interval.

Projicirajući jednačinu (38) na nepokretnu osu  $u$  dobijamo

$$K_{2u} - K_{1u} = I_u, \quad I_u = \int_{t_1}^{t_2} F_u dt, \quad (39)$$

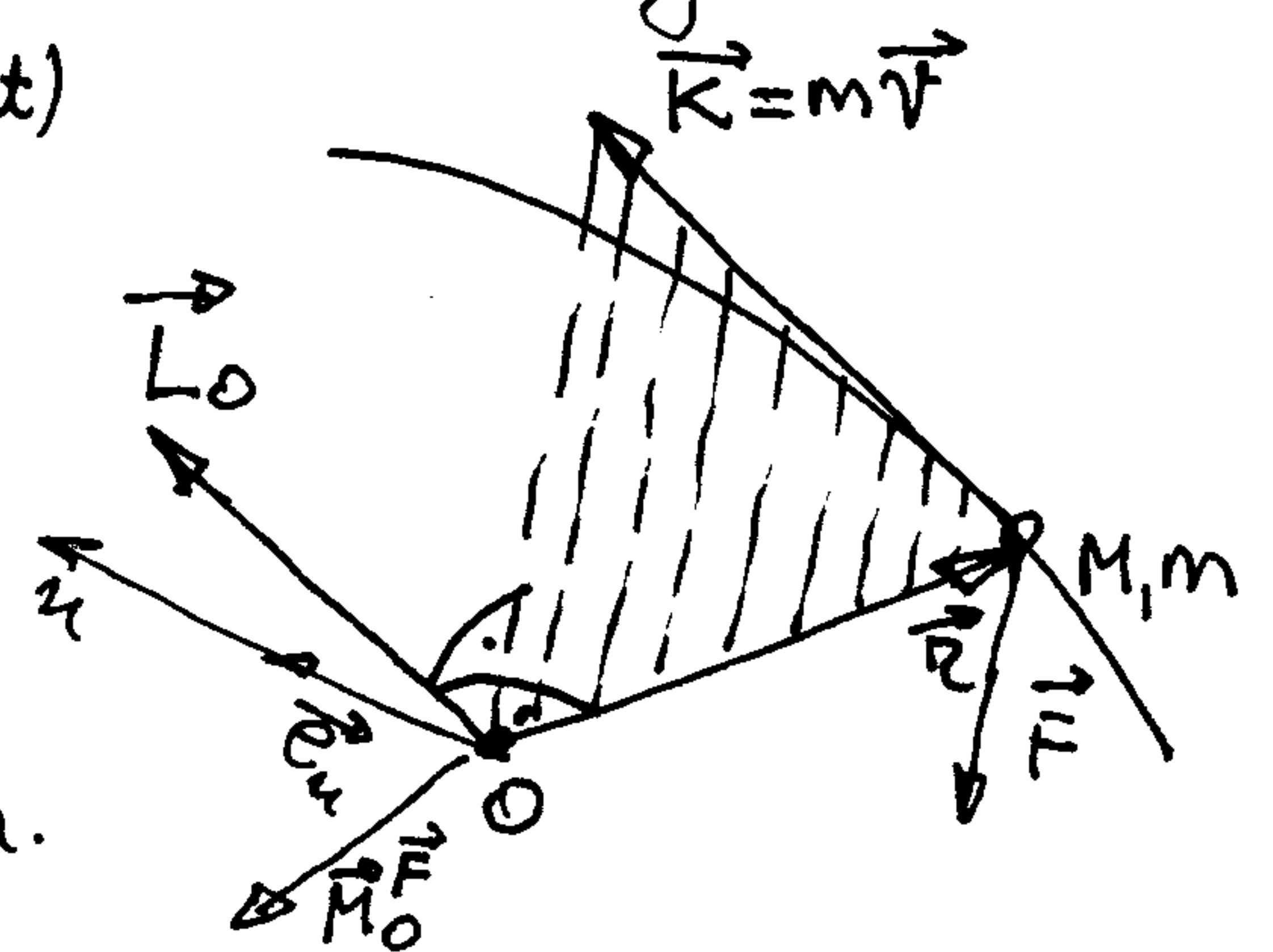
što predstavlja integralni oblik zakona o promjeni projekcije količine kretanja.

#### 4.12 Zakon o promjeni momenta količine kretanja

Moment količine kretanja (kinetički moment) materijalne tačke  $M$  za tačku  $O$  određuje se na isti način kao i moment sile, tj. definisan je izrazom:

$$\vec{L}_O = \vec{M}_O \vec{K} = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (40)$$

To je vektor upravan na ravan vektora  $\vec{r}$  i  $\vec{K}$  i u smjeru datog vektorskog proizvoda.



Ođredimo izvod momenta količine kretanja po vremenu:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\vec{a},$$

jer je vektorski proizvod  $\vec{v} \times m\vec{v}$  jednak nuli zbog kolinearnosti vektora  $\vec{v}$  i  $m\vec{v}$ . S druge strane, na osnovu osnovne jednačine dinamike  $m\vec{a} = \vec{F}$ , pa sledi

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \vec{F}, \quad \vec{M}_O \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (41)$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja: Izvod po vremenu momenta količine kretanja materijalne tačke za tačku  $O$  jednak je momentu sile za istu tačku.

Projicirajući jednačinu (41) na nepokretnu osu  $u$ , dobijamo

$$\frac{dL_u}{dt} = M_u \vec{F}, \quad (42)$$

gdje je  $L_u = M_u \vec{K} = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_u$  - moment količine kretanja za osu  $u$ , a  $M_u \vec{F}$  - moment sile  $\vec{F}$  za osu  $u$  ( $M_u \vec{F} = \vec{M}_O \vec{F} \cdot \vec{e}_u$ )

Jednačina (42) izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja za nepokretnu osu: Izvod po vremenu momenta količine kretanja materijalne tačke za neku nepokretnu osu jednak je momentu sile koja djeluje na tačku za istu osu.