

4. Dinamika materijalne tačke

Dinamika je dio mehanike koji proučava kretanja materijalnih tijela pod dejstvom sila.

Materijalnom tijelu se pridružuje pojam mase, kao mjere inercije tijela - svojstva materijalnog tijela da se protivi promjeni stanja svog kretanja. Masa je pozitivna skalarna veličina; njena jedinica mjere je kilogram (kg), i to je osnovna jedinica u međunarodnom sistemu (SI) jedinica.

Sila je veličina koja predstavlja količinsku mjeru uzajamnog dejstva materijalnih tijela. Ona je, kao što je poznato iz statike, vektorska veličina koja je određena svojim intenzitetom, pravcem i smjerom.

Materijalna tačka je najjednostavniji model u dinamici. To je materijalno tijelo čije se dimenzije pri proučavanju kretanja mogu zanemariti. Drugim riječima, to je geometrijska tačka koja posjeduje konačnu masu. Ova idealizacija je opravdana kada su predena rastojanja, koja izuze tačke tijela, mnogo veća od dimenzija samog tijela. Takođe, translatorno kretanje tijela može se uvijek tretirati kao kretanje materijalne tačke čija je masa jednaka masi tijela.

4.1 Osnovni zakoni dinamike (Njutnovi zakoni)

Osnovni zakoni dinamike odnose se na model materijalne tačke. Oni imaju status aksioma, tj. usvajaju se bez doazivanja, a njihova ispravnost je potvrđena mnogovjekovnom praktičnom djelatnošću čovjeka. Formulirao ih je Isaac Njutn u svom čuvenom djelu "Matematički osnovi prirodne filozofije" izdatom 1687. godine.

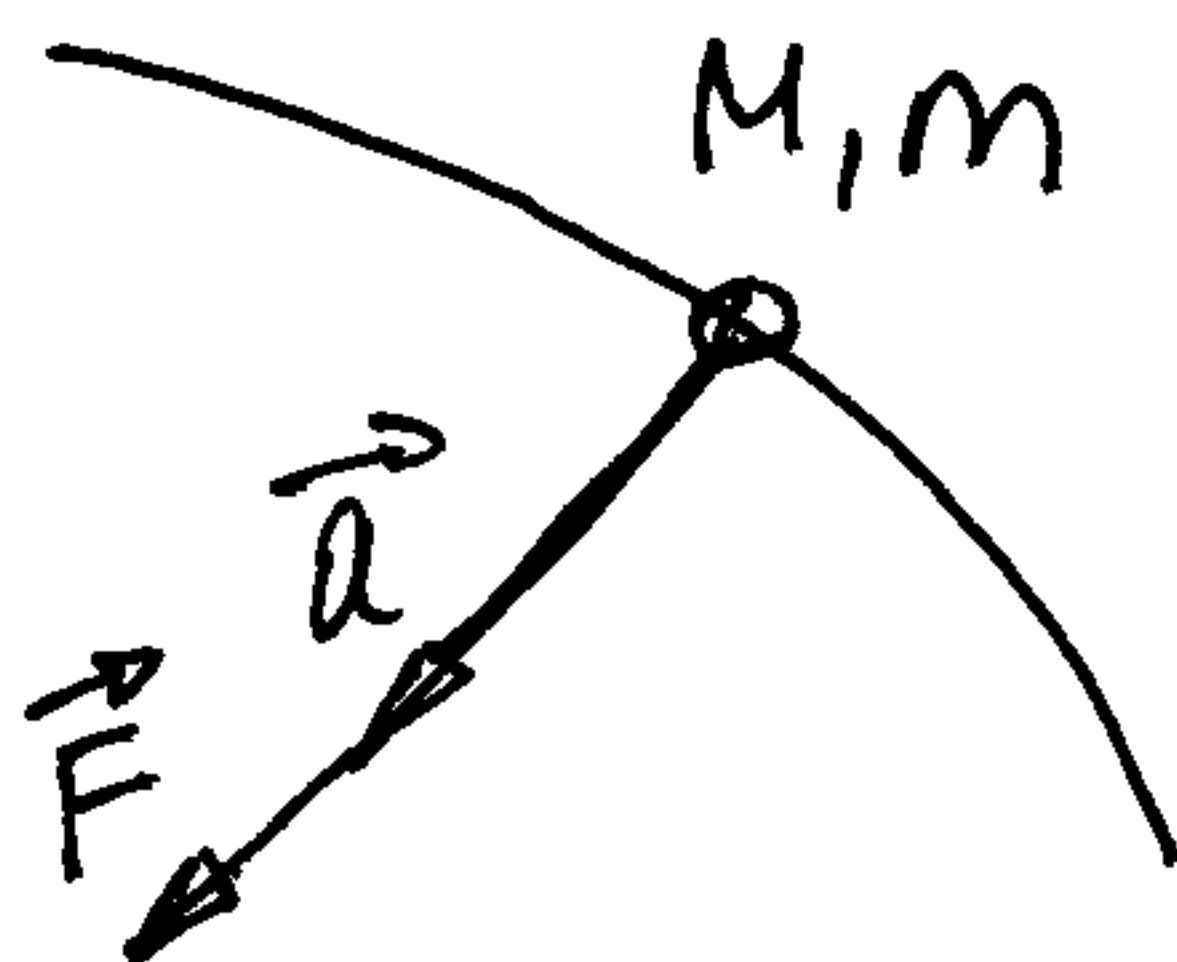
Prvi Njutnov zakon (zakon inercije). Materijalna tačka ostaje u stanju mirovanja ili jednoliktog pravolinijskog kretanja sve dok pod dejstvom sile ne bude primetena da to stanje promijeni.

Drugi Njutnov zakon (osnovni zakon dinamike). Proizvod mase i ubrzanja materijalne tačke, koje ona dobija kada na nju djeluje sila, jednak je po intenzitetu toj sili a pravac i smjer ubrzanja se poklapaju sa pravcem i smjerom sile.

Ako je m - masa tačke, \vec{a} - ubrzanje tačke i \vec{F} - sila koja djeluje na tačku, onda se ovaj zakon izražava vektorskom jednačinom:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

koja se često naziva osnovna jednačina dinamike materijalne tačke.



Ako na materijalnu tačku djeluje istovremeno više sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, njihovo se dejstvo može zamijeniti dejstvom jedne sile - rezultante tih sila. U ovom slučaju drugi Njutnov zakon ima oblik

$$m\vec{a} = \vec{F}_2 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

gdje je $\vec{F}_2 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ rezultanta svih sila koje djeluju na uočenu tačku.

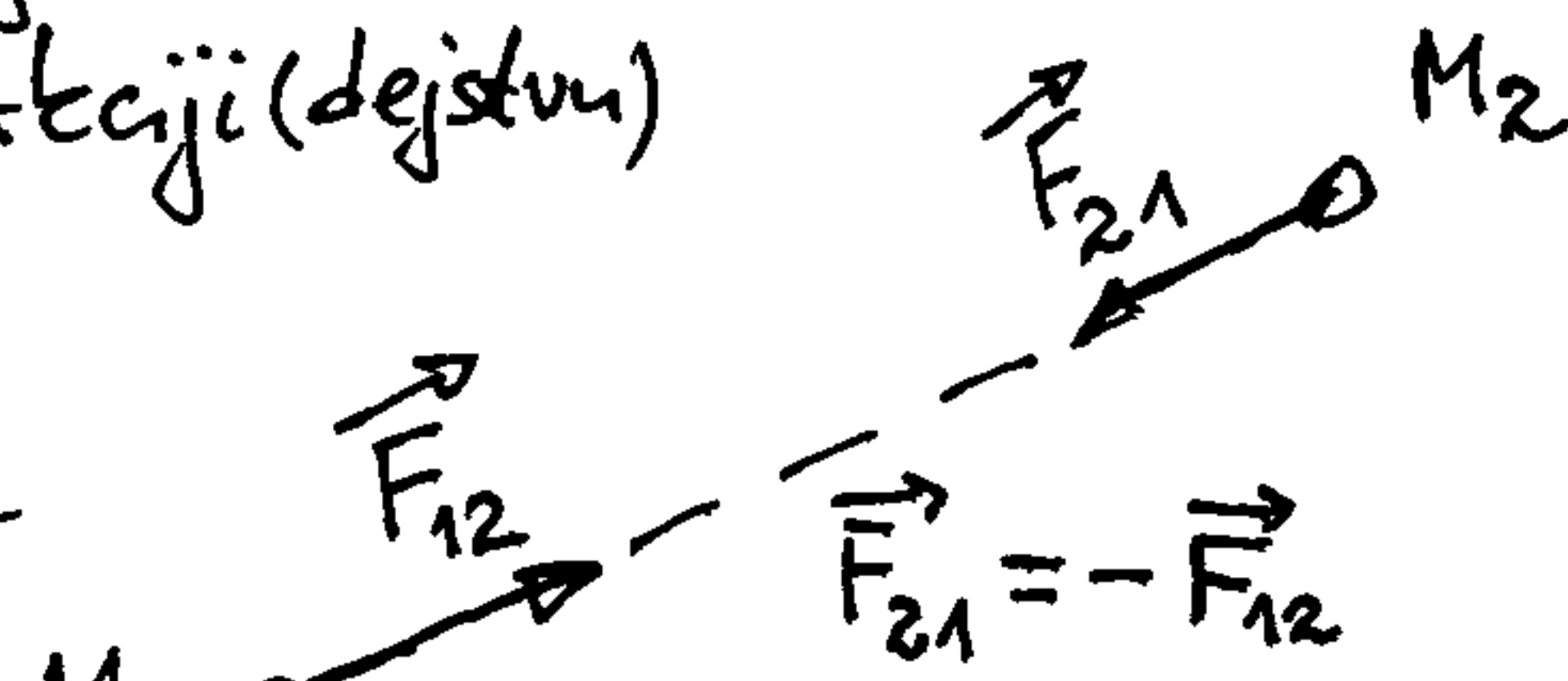
Prvi i drugi Njutnov zakon važe u inercijalnim koordinatnim sistemima. To su koordinatni sistemi koji su nepokretni u odnosu na apsolutni (nepokretni) prostor, čije je postojanje Njuti pretpostavio, ili koji se kreću translatorno, pravolinijski i jednoliko. Strogo govoreći, takvi sistemi referencije ne postoje, ali se za većinu tehničkih zadataka, sa praktično zadovoljavajućom tačnošću, može smatrati da je koordinatni sistem vezan za površinu Zemlje inercijalni.

Jedinica za silu u SI sistemu je izvedena na osnovu (1) i zove se Njuti (N): $1\text{ N} = 1\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. To je sila koja materijalnoj tački mase od 1 kg saopštava ubrzanje od 1 m/s^2 .

Treći Njutnov zakon (zakon akcije i reakcije). Dvije materijalne tačke djeluju jedna na drugu silama jednakih intenziteta, suprotno usmjerenim duž prave koja spaja te tačke.

Kraće, često se ovaj zakon izražuje riječima: Akciji (dejstvu) uvijek je jednaka reakcija (protivdejstvo).

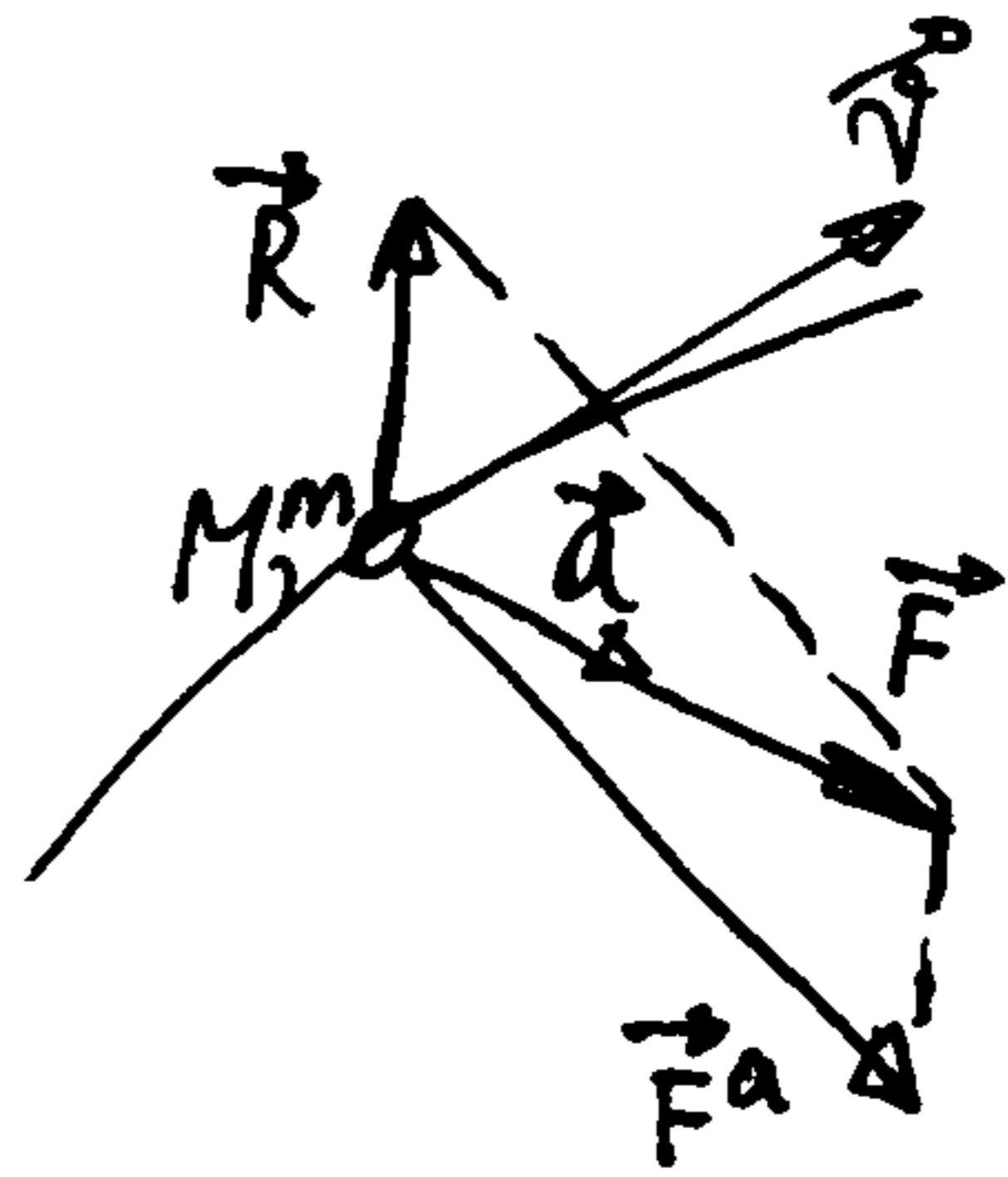
Ovaj zakon ukazuje na izvor sile, tj. pokazuje da je za postojanje sile potrebno najmanje dva materijalna tijela od kojih je jedno izvor sile. Dejstvo sile se može ostvariti direktno - neposrednim kontaktom dva tijela ili indirektno - posredstvom fizičkog polja (npr, dejstvo gravitacionog polja Zemlje na tijelo u njenoj blizini).



Napomena o neslobodnom kretanju tačke. Važno je istaći da je drugi Njutnov zakon formulisan za slobodnu materijalnu tačku - tačku koja može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru. U slučaju vezanog (neslobodnog) kretanja primjenjuje se aksiom oslobađanja od veza: Neslobodnu materijalnu tačku možemo posmatrati kao da je slobodna ako veze (tijela koja ograničavaju njeno kretanje) uklonimo i njihovo dejstvo na datu tačku zamijenimo silama reakcije veza. U skladu sa ovim, osnovna jednačina dinamike neslobodne tačke je oblika

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{F}^a + \vec{R}, \quad (2)$$

gdje je \vec{F}^a rezultanta aktivnih sila (sila koje djeluje na materijalnu tačku bez obzira da li veze postoje ili ne), a \vec{R} rezultanta sila reakcije veza.



4.2 Nekoliko zakona sile

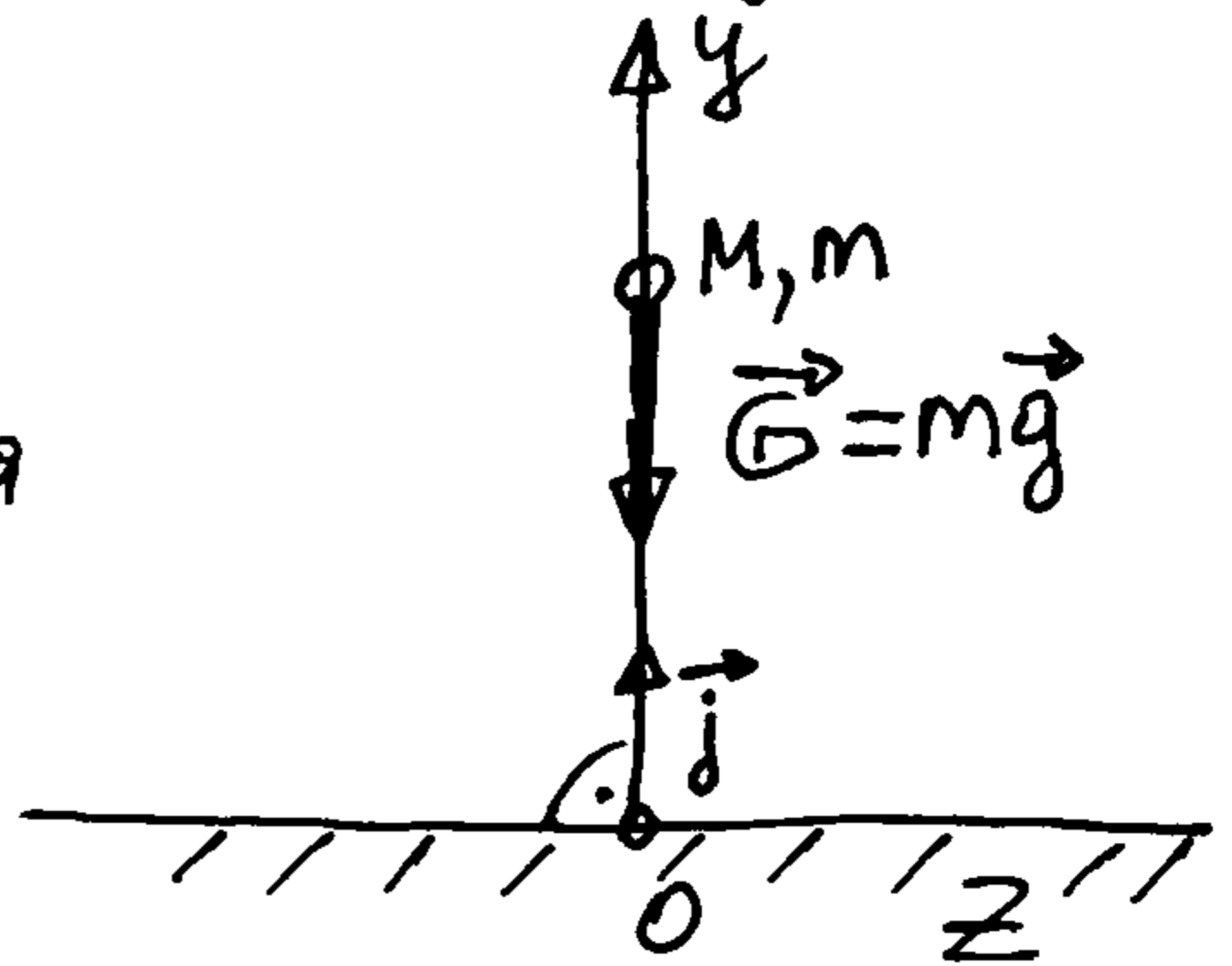
U opštem slučaju sila koja djeluje na materijalnu tačku može zavisiti od vremena t , položaja tačke \vec{r} i njene brzine \vec{v} :

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}). \quad (3)$$

Zakoni konkretnih sila (analitičke zavisnosti oblika (3)) se po pravilu utvrđuju eksperimentalno i dalje navodimo neke od njih.

a) Sila zemljine težine \vec{G} .

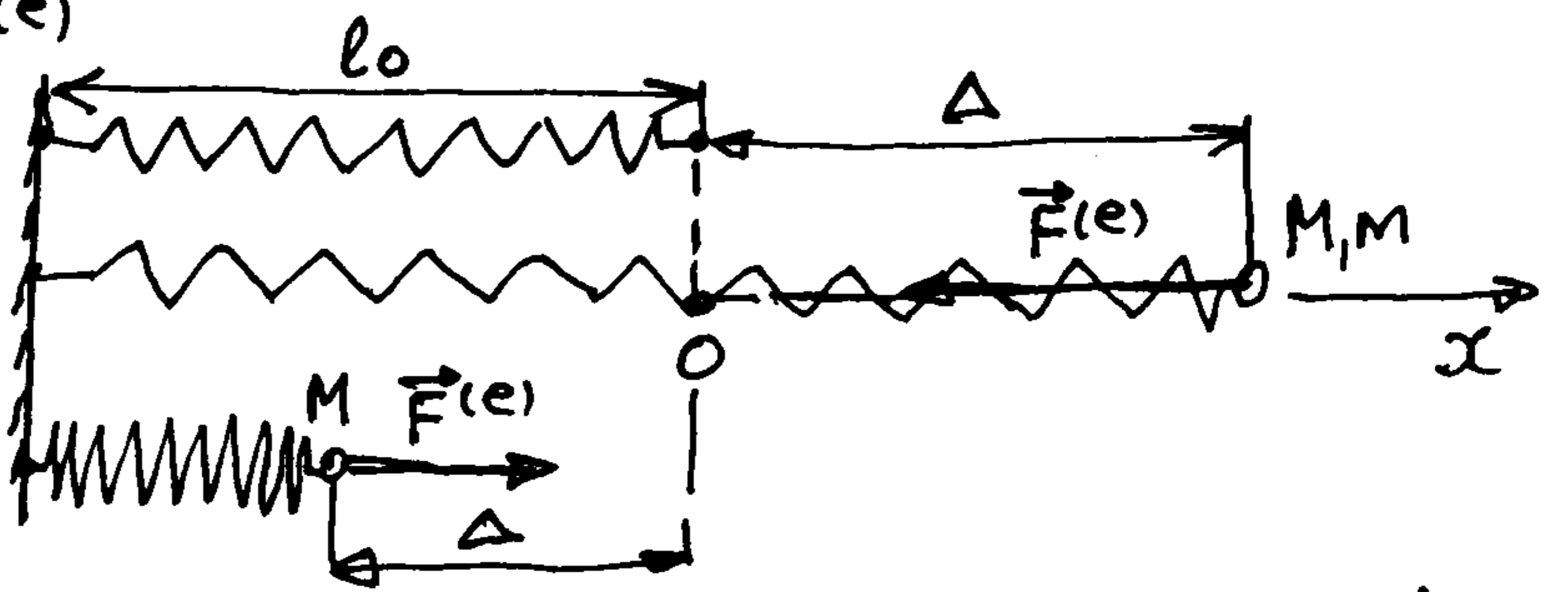
Ako se tijelo (materijalna tačka) mase m nalazi u blizini površine Zemlje (rastojanje tačke od Zemlje malo u odnosu na njen poluprečnik), onda se može smatrati da je sila kojom Zemlja privlači tijelo (sila težine) konstantna. Ona je određena težinom tijela $G = mg$, gdje je g ubrzanje slobodnog pada (ubrzanje sile težine), pravcem vertikalne i smjerom ka Zemlji. Ubrzanje g zavisi od geografske širine mjesta, a za naša područja je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Ako vertikalnu os y orijentisemo kao na slici, onda je sila težine



$$\vec{G} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$$

b) Elastična sila opruge $\vec{F}^{(e)}$

l_0 - dužina nedeformisane opruge. Intenzitet sile kojom opruga djeluje na materijalnu tačku M srazmjeran je (u domenu važenja Hukovog zakona) izduženju (skraćivanju) opruge Δ , a konstanta proporcionalnosti je krutost opruge $c: F^{(e)} = c\Delta$. Sila $F^{(e)}$ je usmjerena po osi opruge ka položaju koji odgovara kraju nedeformisane opruge. Ako x -osu postavimo kao na slici, elastičnu silu opruge možemo zapisati u vektorskom obliku:

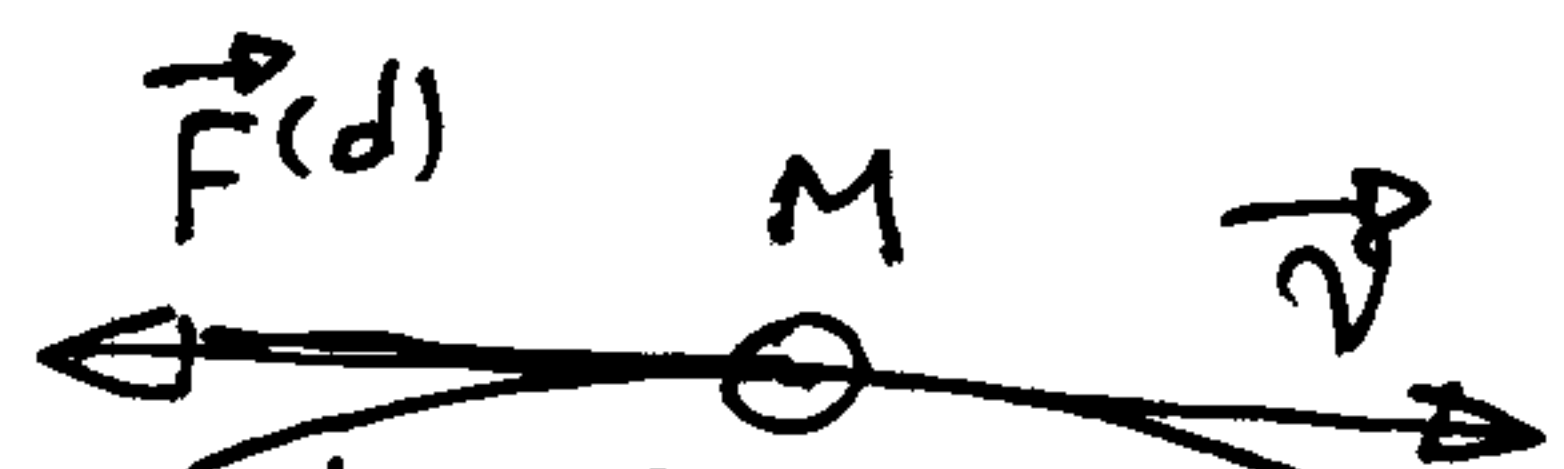


$$\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$$

i kao što vidimo ona zavisi od položaja tačke.

c) Sile fluidnog otpora

Kada se tijelo kreće kroz fluid (vazduh, voda, ...) trpi određeni otpor koji suštinski zavisi od brzine. Sila otpora $\vec{F}^{(d)}$ ima pravac brzine, a smjer suprotan od smjera kretanja. Opšti oblik zavisnosti sile otpora od brzine je



$$\vec{F}^{(d)} = -F^{(d)}(v) \frac{\vec{v}}{v}$$

Pri čemu se razlikuju dva tipična slučaja:

– viskozni otpor (javlja se pri manjim brzinama): $F^{(d)} = \gamma v$, tj. $\vec{F}^{(d)} = -\gamma \vec{v}$,

– turbulentni otpor (javlja se pri većim brzinama): $F^{(d)} = \gamma v^2$

Koeficijenti γ i γ zavise od oblika tijela i fizičkih osobina otporne sredine.

d) Sila suvog (Kulonovog) trenja

Kulonovo ili suvo trenje se javlja na mjestima dodira dva tijela. Zbog hrapavosti tijela osim sile uzajamnog pritiska koja ima pravac normale na površine tijela u tački dodira, javlja se i sila trenja koja leži u tangenčnoj ravni.

Ekperimenti potvrđuju da će tijelo koje se nalazi na hrapavoj horizontalnoj podlozi i izloženo je dejstvu ^{aktivne} horizontalne sile \vec{F} ostati u stanju mirovanja sve dok aktivna sila ne dostigne određenu granicu vrijednosti.

Ovu silu uzavotešuje sila trenja koja je usmjerena u suprotnom smjeru od smjera u kome aktivna sila leži da pomjeri tijelo. Dakle, u stanju mirovanja intenzitet sile trenja se kreće između nule i granicne vrijednosti:

$$0 \leq F_{tr} \leq F_{gr}$$

Intenzitet granicne sile trenja klizanja jednak je proizvodu statičkog koeficijenta trenja μ_s i sile uzajamnog pritiska (normalne reakcije) N :

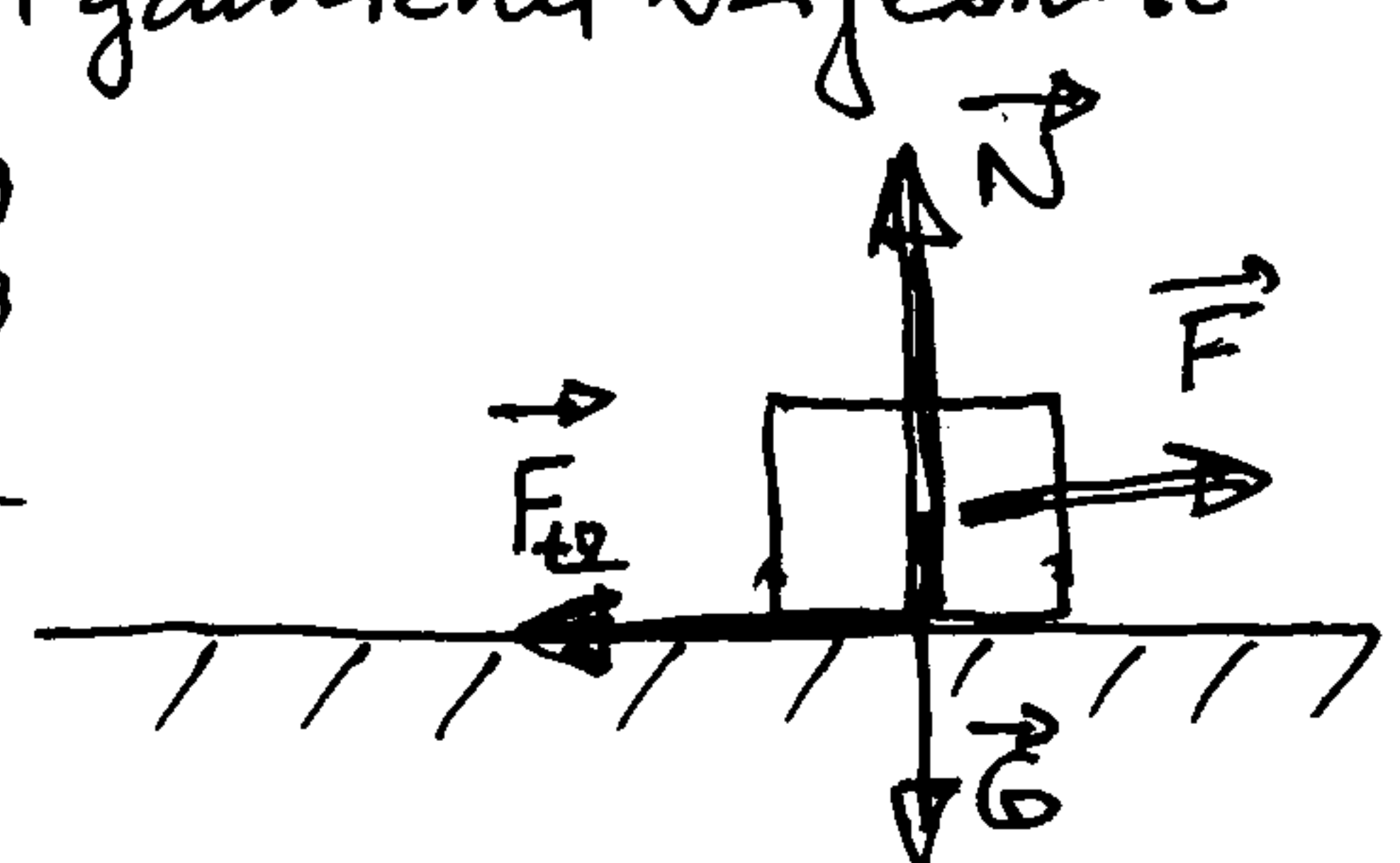
$$F_{gr} = \mu_s N$$

Koeficijent μ_s se određuje eksperimentalno. Ako se tijelo kreće, a intenzitet sile trenja je određen relacijom

$$F_{tr} = \mu_0 N,$$

(a smjer joj je suprotan smjeru brzine)

gdje je μ_0 dinamički koeficijent trenja. Dinamički koeficijent trenja je nešto manji od statičkog, ali se često, zbog jednostavnosti proračuna, uzima da je $\mu_0 = \mu_s$.



4.3 Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke

Neka se tačka M , mase m , kreće u inercijalnom (nepobremnom) sistemu referencije pod dejstvom rezultujuće sile $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$. Imajući u vidu relaciju (3), kao i definicije brzine i ubrzanja tačke, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ i $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, drugi Njutnov zakon (1) dobija oblik

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}), \quad (4)$$

koji se naziva diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke u vektorskom obliku. Ona je diferencijalna jednačina drugog reda u kojoj je nezavisno promenljiva vrijeme t , a zavisno promenljiva vektor položaja tačke \vec{r} .

Projiciranjem vektorske jednačine (4) na ose odabranog koordinatnog sistema dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja tačke u skalarnom (koordinatnom) obliku.

a) Diferencijalne jednačine u Dekartovim koordinatama.

Projicirajući jednačinu (4) na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$, dobijemo tri skalarne jednačine

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (5)$$

gdje su $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$ i $a_z = \ddot{z}$ projekcije ubrzanja, a F_x , F_y i F_z projekcije sile na ose ovog koordinatnog sistema.

Jednačine (5) nazivaju se diferencijalne jednačine kretanja tačke u Dekartovim koordinatama.

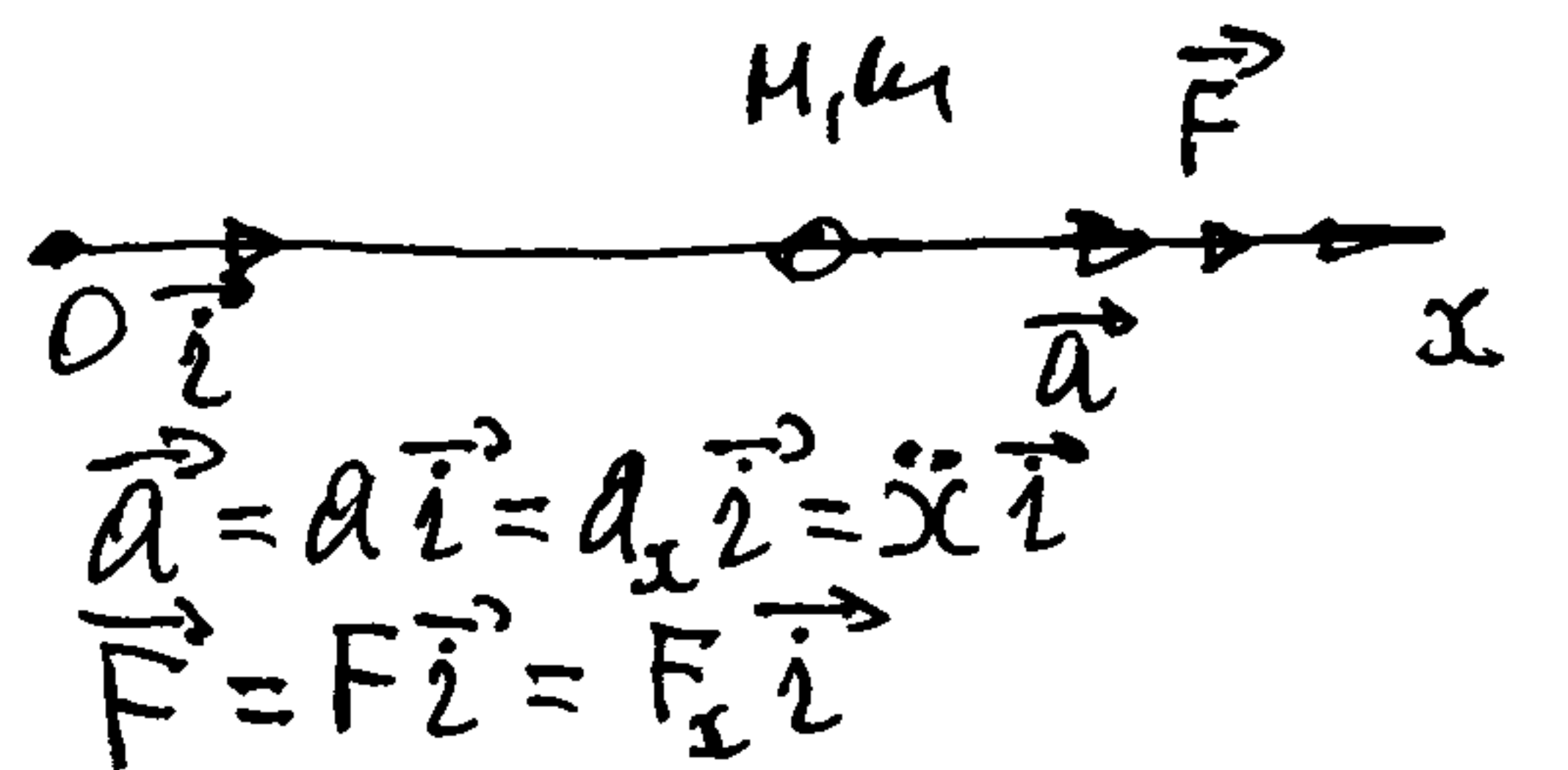
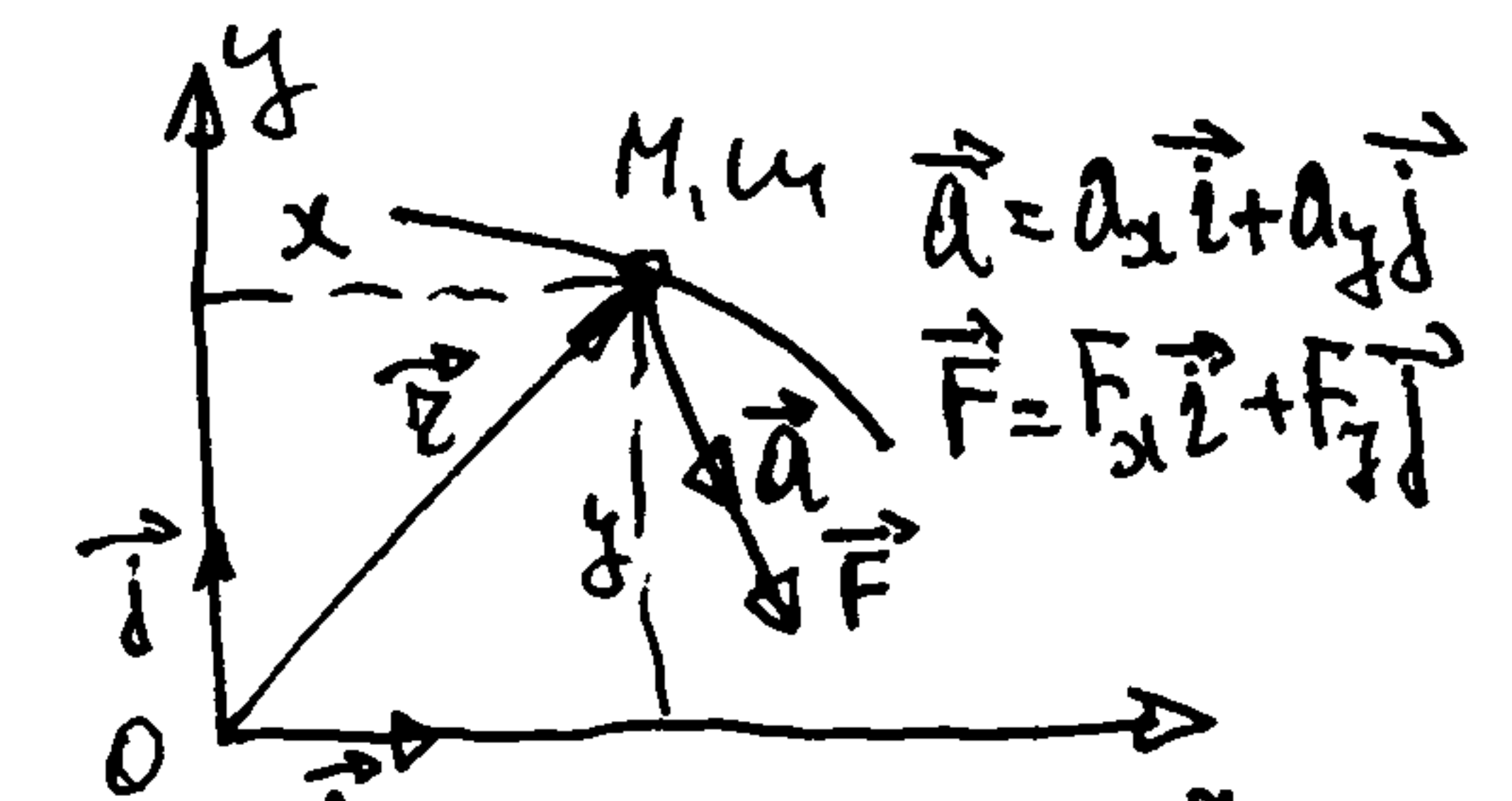
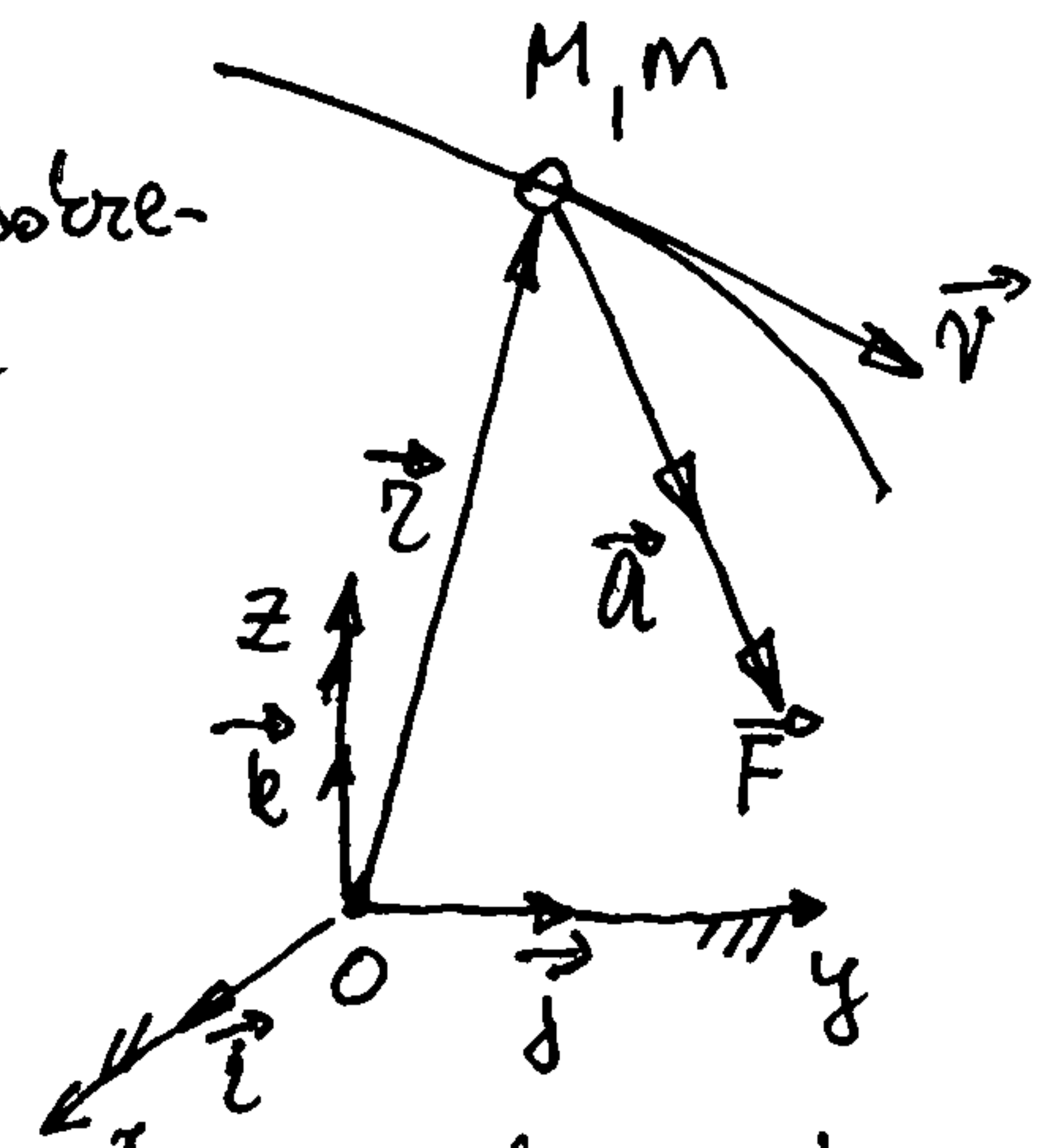
Ako se tačka kreće u ravni, recimo Oxy , sistem jednačina (5) se svodi na dvije

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y \quad (6)$$

U slučaju pravolinijskog kretanja tačke, recimo duž x -ose, imamo samo jednu skalarnu jednačinu

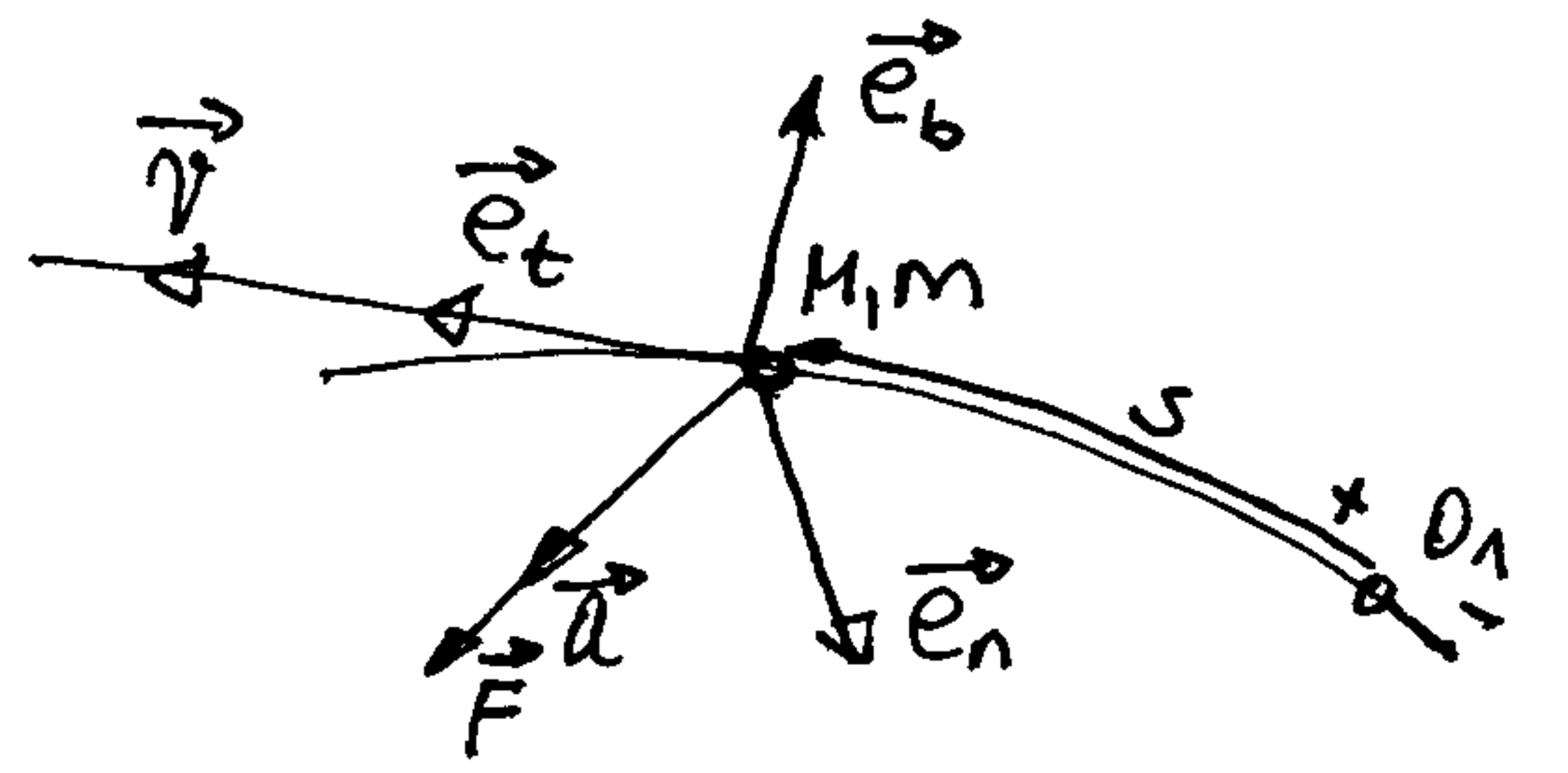
$$m\ddot{x} = F_x, \quad (7)$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu pravolinijskog kretanja.



6) Diferencijalne jednačine u prirodnom koordinatnom sistemu (Djlerove jednačine)

U prirodnom koordinatnom sistemu, koji čine tangenta na putanju tačke, glavna normala i binormala, određene jediničnim vektorima \vec{e}_t , \vec{e}_n i \vec{e}_b , respektivno, vektori brzine i ubrzanja tačke dati su sa:



$$\vec{v} = v \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t; \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \vec{a}_t = a_t \vec{e}_t = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t = \ddot{s} \vec{e}_t, \vec{a}_n = a_n \vec{e}_n = \frac{v^2}{R_k} \vec{e}_n,$$

gdje je R_k poluprečnik krivine trajektorije u tački M.

Projiciranjem lijeve i desne strane osnovne vektorske jednačine (4) na ose prirodnog koordinatnog sistema dobija se

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_t, \\ m \frac{v^2}{R_k} &= F_n, \\ 0 &= F_b, \end{aligned} \right\} (8)$$

gdje su F_t , F_n i F_b projekcije rezultante svih sila koje djeluju na tačku na ose prirodnog trijedra.

Jednačine (8) zovu se Djlerove (prirodne) diferencijalne jednačine kretanja tačke. Ove jednačine pogodno je koristiti u slučajevima kada je poznata putanja tačke.

4.4 Osnovni zadaci dinamike tačke

a) Prvi (direktni) zadatak: Ako je poznato kretanje tačke i njena masa treba odrediti silu koja izaziva to kretanje.

Primjer 1. Konačne jednačine kretanja tačke M, mase $m = 1 \text{ kg}$, u ravni Oxy su

$$x = \cos 2t \text{ [m]}, \quad y = \sin 2t \text{ [m]} \quad (*)$$

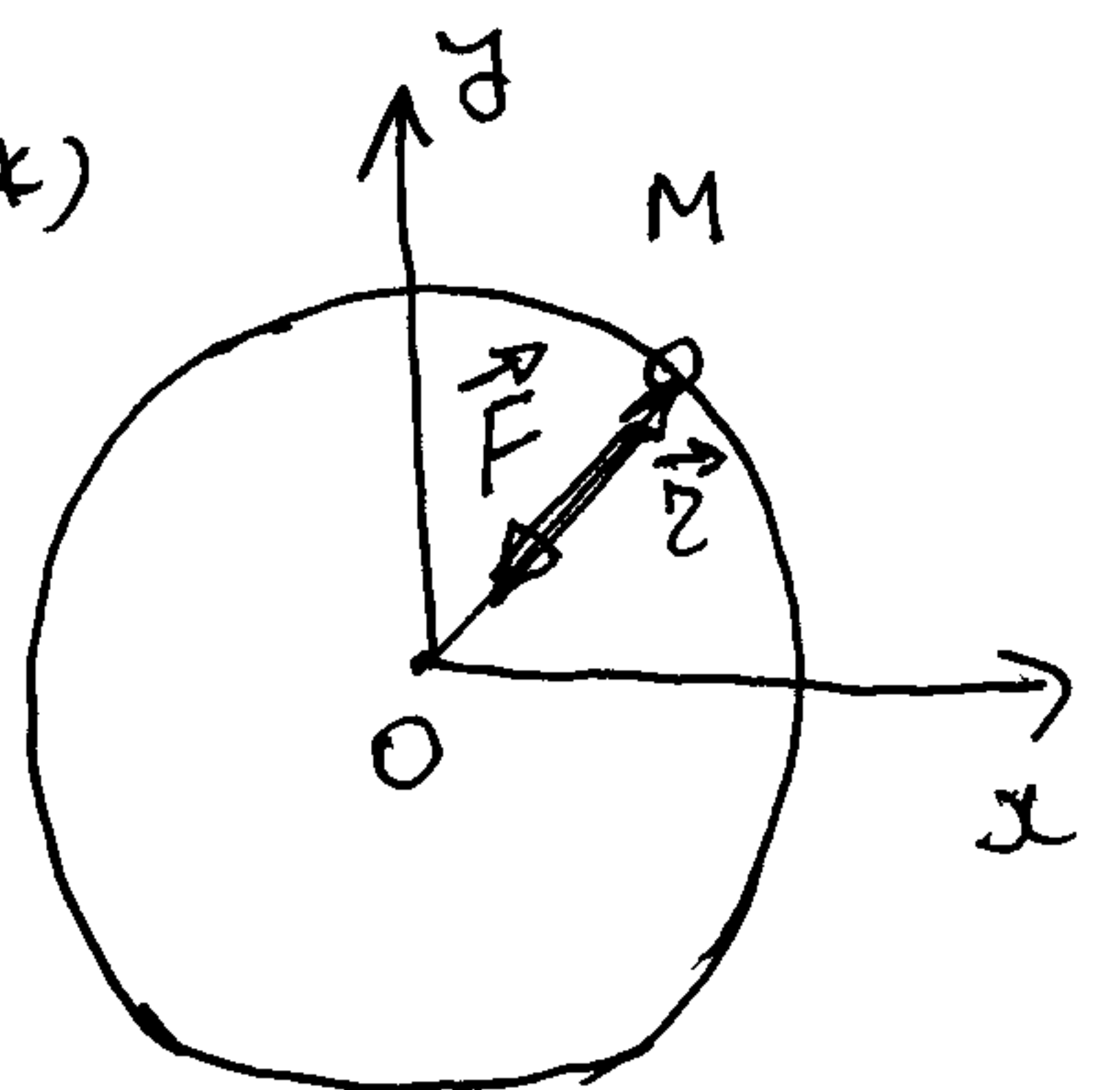
Odrediti silu \vec{F} koja djeluje na tačku.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} = -4 (\cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j})$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = \cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -4 \vec{r} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\vec{F} = m \vec{a} = -4 \vec{r} \text{ [N]}$$



Primer 2. Lift, čija je težina zajedno sa putnicima $G = 10\,000\text{ N}$ (10 kN), počinje da se podiže ubrzanjem $a = 2\text{ m/s}^2$. Odrediti silu zatezanja sajle, kojom je lift povezan sa električnim motorom.

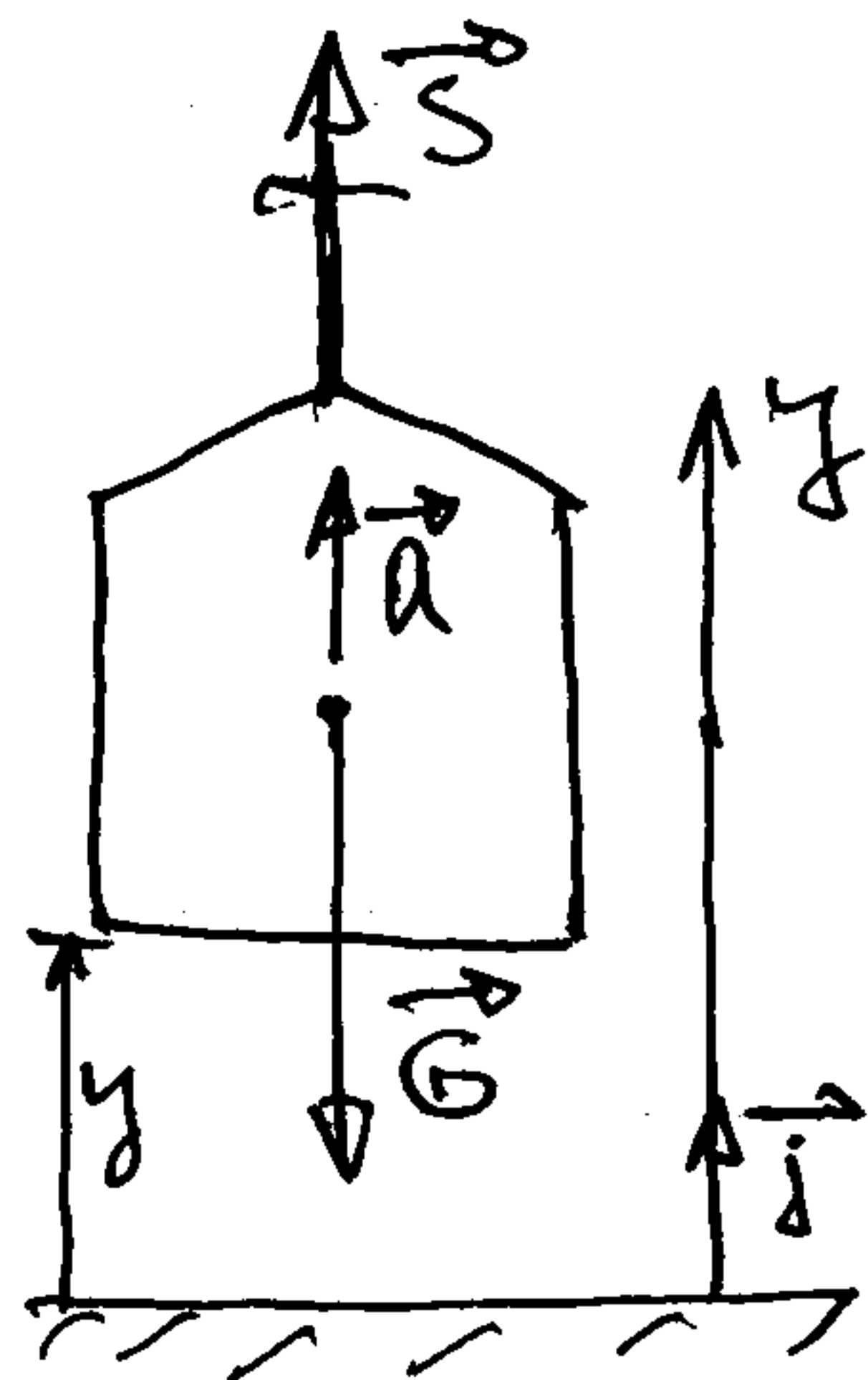
Lift posmatramo kao materijalnu tačku, mase $m = \frac{G}{g}$, koja se kreće pravolinijski duž vertikalne ose y . Na lift djeluje jedna aktivna sila, sila težine $\vec{G} = -G\vec{j}$, usmjeren na dole, a dejstvo sajle zamjenjivamo silom zatezanja sajle $\vec{S} = S\vec{j}$, koja ima karakter reakcije veze. Osnovna jednačina dinamike za ovaj slučaj kretanja glasi:

$$\frac{G}{g} \vec{a} = \vec{G} + \vec{S},$$

odnosno u skalarnom obliku

$$\frac{G}{g} a = -G + S,$$

odakle je $S = \frac{G}{g} a + G = \left(\frac{a}{g} + 1\right) G = \left(\frac{2}{9,81} + 1\right) \cdot 10\,000 = 12\,039\text{ N} \approx 12\text{ kN}$



kilonjutra

Primer 3. Poluprečnik krivine u tački A mosta iznosi $R_k = 100\text{ m}$. Automobil mase $m = 1000\text{ kg}$ kreće se po mostu konstantnom brzinom $v = 72\text{ km/h}$. Kolika je sila pritiska automobila na most u tački A.

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}, \quad \vec{N} \text{ - reakcija (sila kojom most djeluje na automobil)}$$

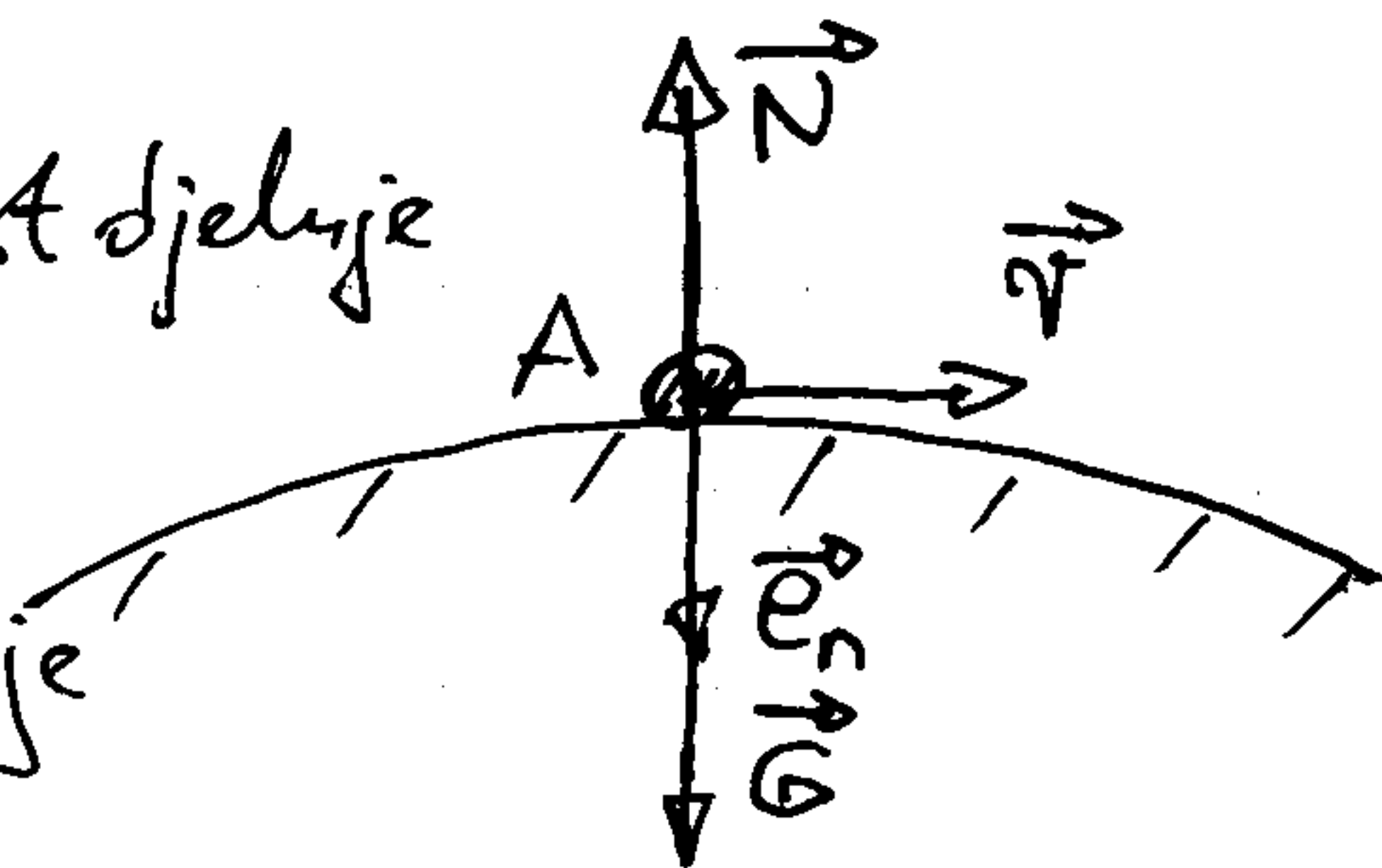
$$G = mg = 1000 \cdot 9,81 = 9810\text{ N}$$

Projekcija ove vektorske jednačine na normalu je

$$m a_n = G - N, \quad a_n = \frac{v^2}{R_k}$$

$$\Rightarrow N = m \left(g - \frac{v^2}{R_k} \right) = 1000 \left(9,81 - \frac{(72 \cdot \frac{1000}{3600})^2}{100} \right) = 5810\text{ N (Njutna)}$$

Pritisak na most \vec{P} po zakonu akcije i reakcije je $\vec{P} = -\vec{N}$, tj. po intenzitetu je jednak N ali je usmjeren vertikalno naniže.



b) Drugi (inverzni) zadatak: Ako je poznata masa tačke, njen početni položaj i početna brzina (tj. početni uslovi: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$) i sila koja djeluje na tačku, treba odrediti kretanje tačke $\vec{r}(t)$.

Ovaj zadatak se često naziva i osnovni zadatak dinamike, a u matematičkom smislu je složeniji od direktnog zadatka jer zahtijeva rješavanje (integraciju) diferencijalnih jednačina kretanja. Ovom zadatku će, u narednim razmatranjima, biti posvećena značajna pažnja.

4.5 Pravolinijsko kretanje tačke

Potrebni i dovoljni uslovi za pravolinijsko kretanje materijalne tačke jesu da rezultirajuća sila koja djeluje na tačku ima konstantan pravac, a početna brzina, ukoliko je različita od nule, ima pravac te sile.

Jednu osu, recimo x , postavimo tako da se poklapa sa pravom duž koje se vrši kretanje.

Diferencijalna jednačina kretanja je (7), tj.

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}) \quad (9')$$

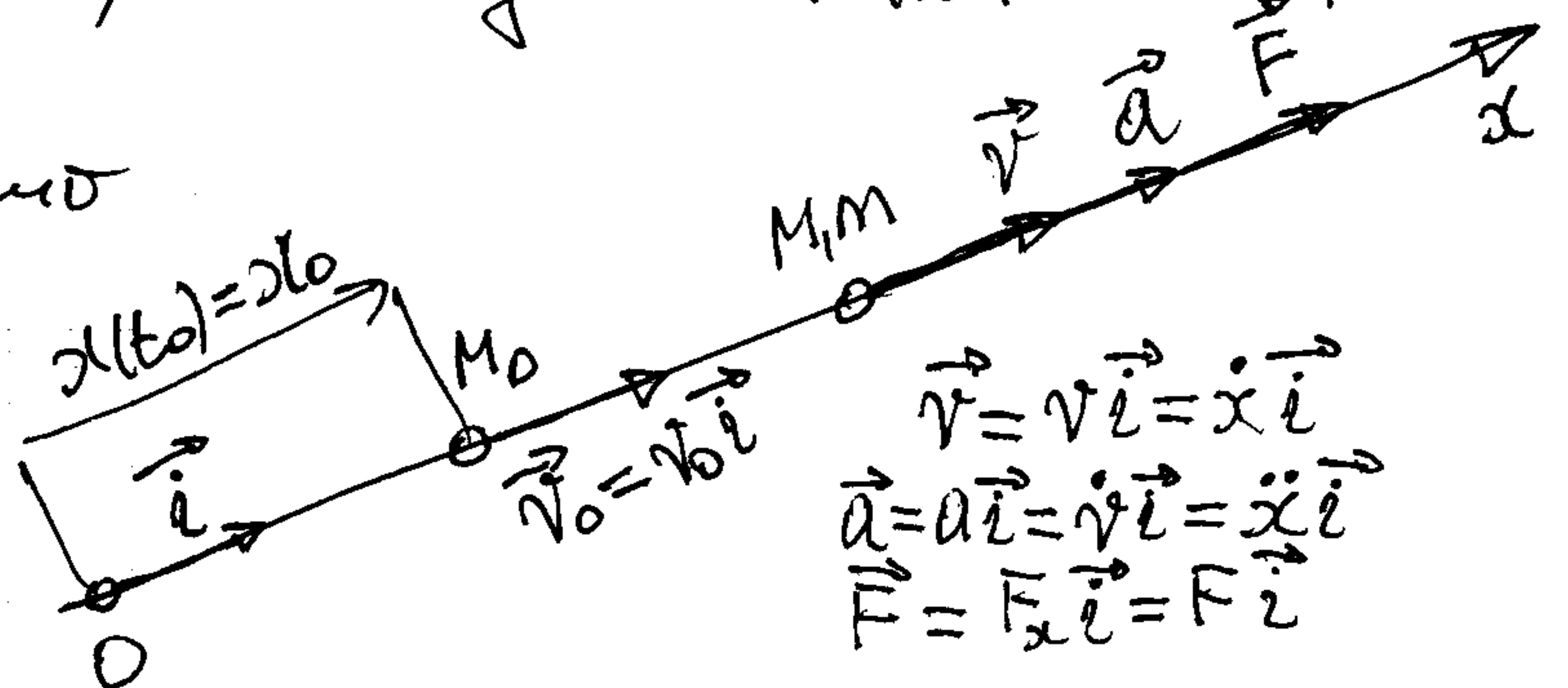
i predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda u kojoj je nezavisna promjenljiva vrijeme t a tražena funkcija x . Odrediti kretanje znači naći rješenje ove jednačine koje zadovoljava početne uslove:

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \quad (10)$$

4.5.1 Pravolinijsko kretanje pod dejstvom konstantne sile

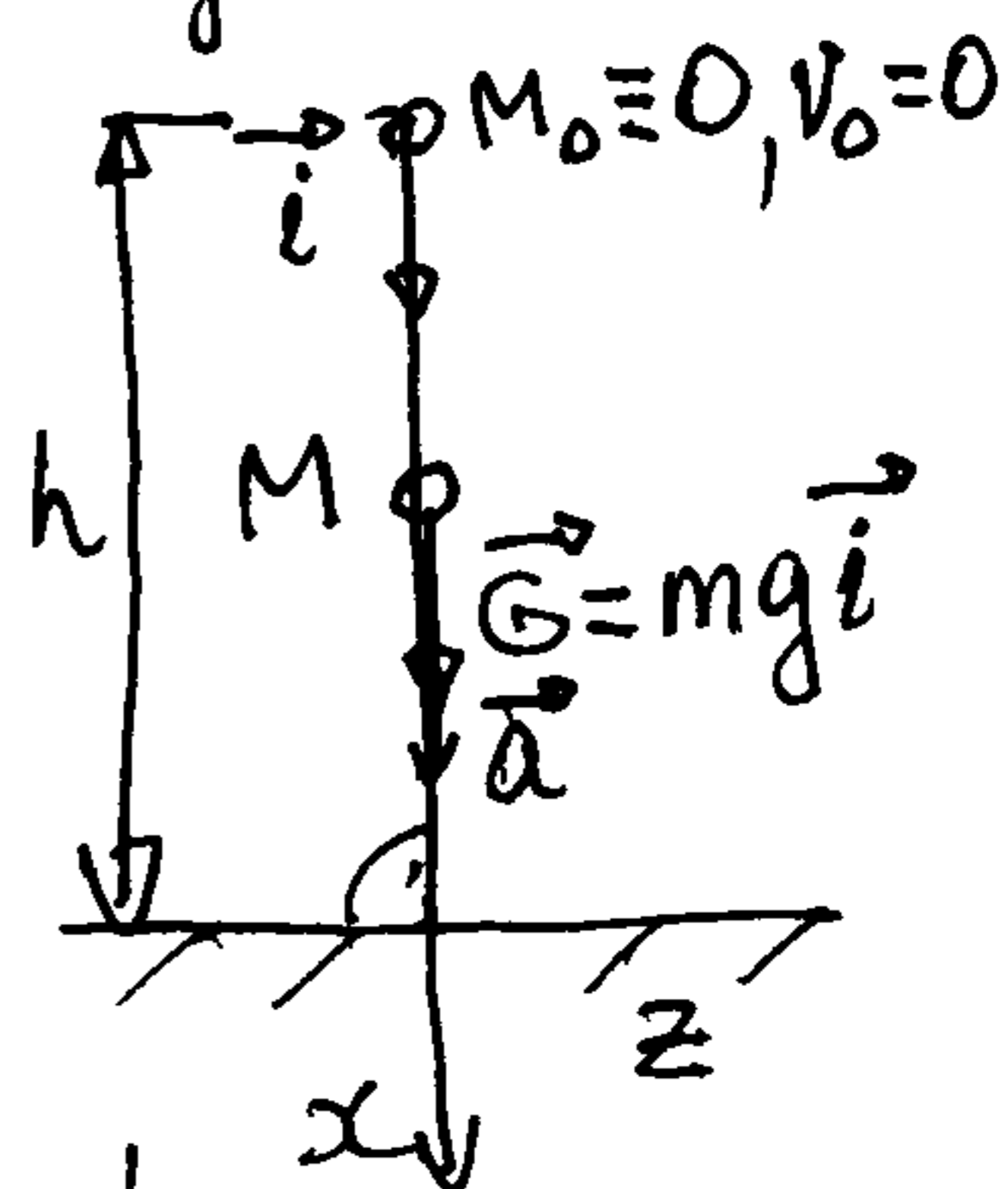
Ako je $F_x = \text{const}$, onda je, na osnovu (9'), $\ddot{x} = a = \text{const} = F_x/m$, pa imamo jednostavno promjenljivo pravolinijsko kretanje. Zakon promijene brzine i konačna jednačina kretanja u ovom slučaju su (v. § 1.6.1):

$$\left. \begin{aligned} v &= \dot{x} = v_0 + at, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2, \quad a = \frac{F_x}{m} \end{aligned} \right\} (11)$$



Primer 4. Slobodni pad u homogenom polju sile zemljine težine u bezvazdušnom prostoru.

Tačka M, mase m , puštena je da slobodno pada, bez početne brzine ($v_0=0$), sa visine h iznad zemljine površine. Otpor vazduha se zanemaruje. Vertikalnu os x postavimo kao na slici.



$$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow ma = mg \Rightarrow a = g = \text{const}$$

Početni uslovi: $x(0) = x_0 = 0, v(0) = v_0 = 0$

(1) $\Rightarrow v = gt$ - zakon promjene brzine pri slobodnom padu

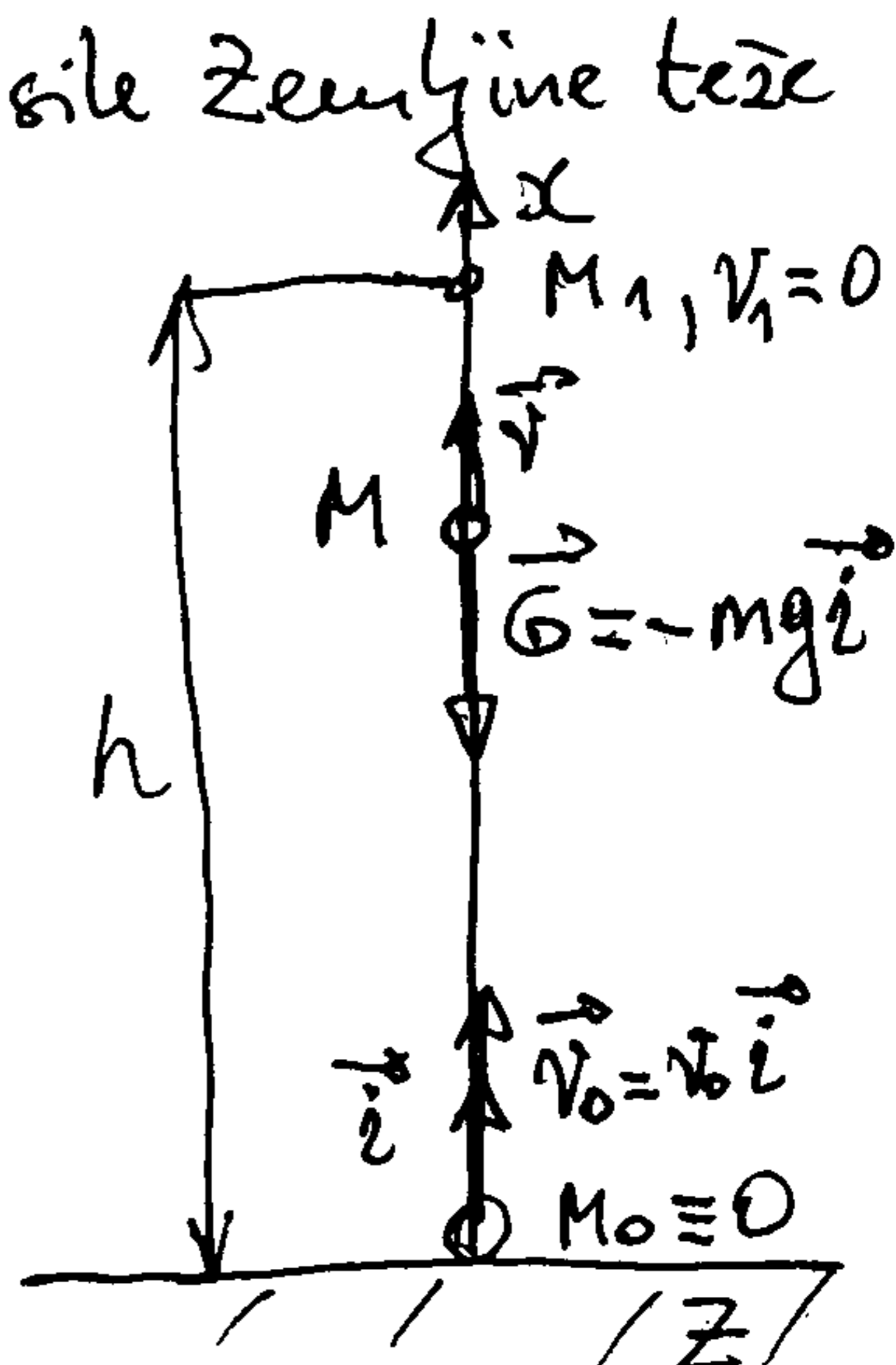
$$x = g \frac{t^2}{2} - \text{konstantna jednako ubrzanja (zakon slobodnog pada)}$$

$$x(t_1) = h \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \text{vrijeme padanja tačke}$$

$$v_1 = v(t_1) = \sqrt{2gh} - \text{brzina udara tačke o zemljinu površinu.}$$

Primer 5. Vertikalni hitac u homogenom polju sile zemljine težine u bezvazdušnom prostoru

Tačka M, mase m , izbačena je sa površine zemlje vertikalno navise početnom brzinom intenziteta v_0 . Vertikalnu os x postavimo kao na slici.



$$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow ma = -mg \Rightarrow a = -g = \text{const}$$

Početni uslovi: $x(0) = x_0 = 0, v(0) = v_0$

$$(11) \Rightarrow v = v_0 - gt$$

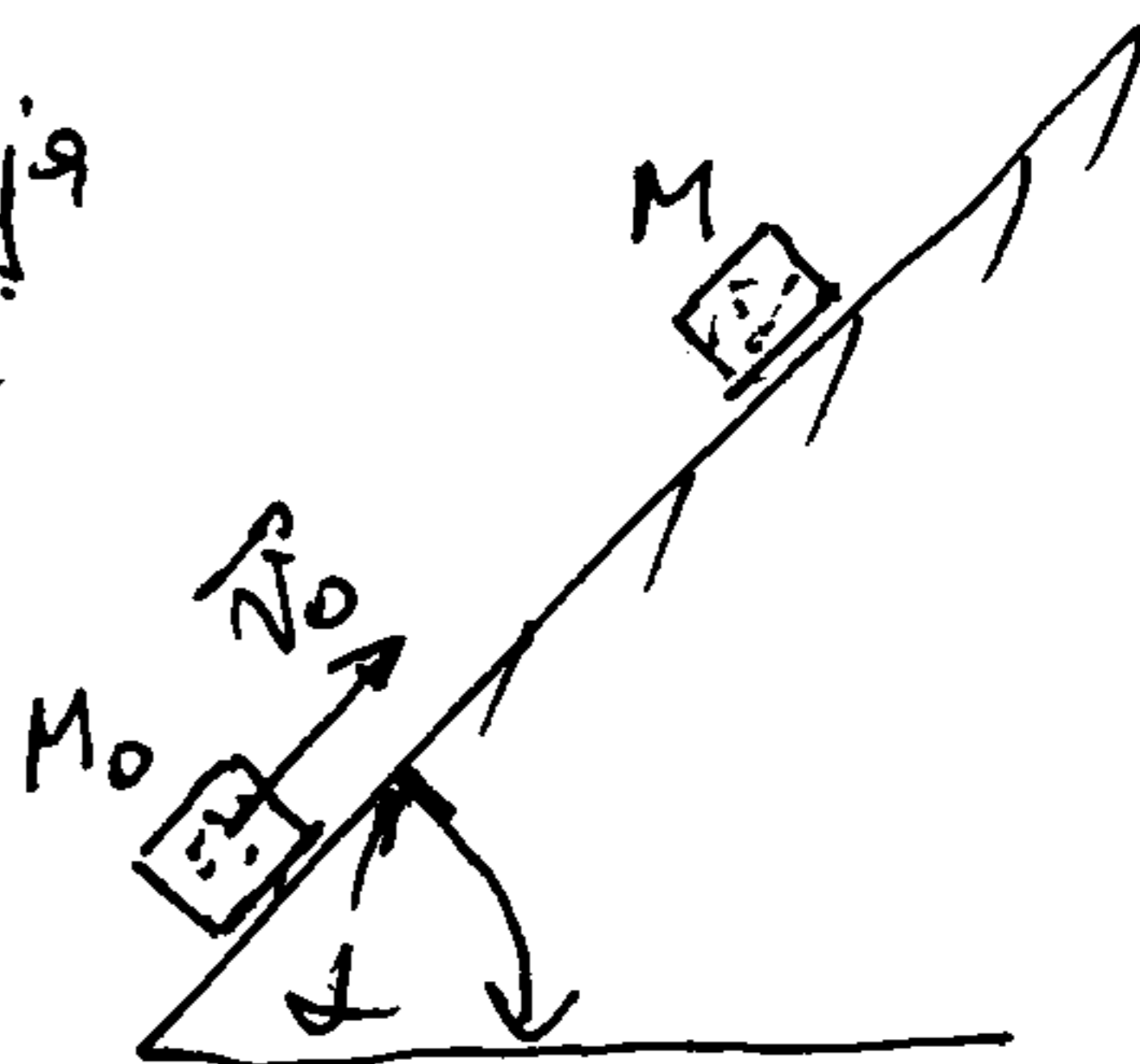
$$x = v_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

$$v_1 = v(t_1) = 0 \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} - \text{vrijeme penjanja}$$

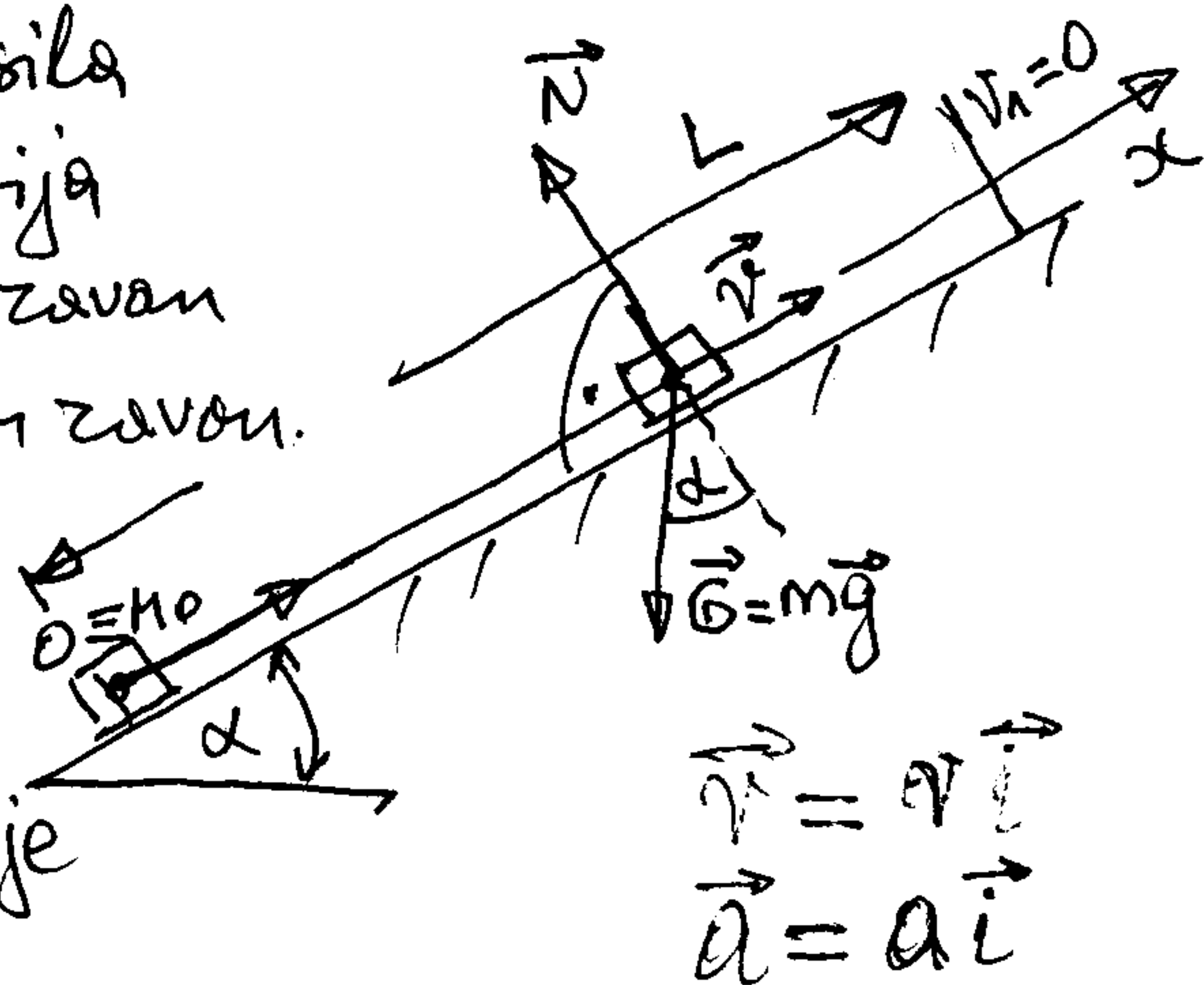
$$h = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} - \text{visina penjanja (najveća visina koju dostigne tačka)}$$

Primer 6. Tijelo M (materijalna tačka), mase m , kreće se po strmoj ravni koja je nagnuta pod uglom α prema horizontu. Početna brzina, intenziteta v_0 , usmjerena je uz strmu ravan.

Odrediti vrijeme koje protekne do zaustavljanja tijela i put pređen za to vrijeme, smatrajući da je: a) strma ravan glatka, b) strma ravan hrapava a) koeficijent dinamički trenja μ_0 .



a) Na tijelo M , u točku kretanja, djeluje sila težine $\vec{G} = m\vec{g}$ (aktivna sila) i reakcija $\vec{R} = \vec{N}$ koja je, s obzirom da je struna zavon glatka, u pravcu normale na strunu zavon.



Projekcija osnovne jednačine

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

na x -osu duž koje se vrši kretanje je

$$ma = -mg \sin \alpha,$$

odakle je $a = -g \sin \alpha = \text{const}$

Dakle, kretanje je jednostavno uniformno pravolinijsko sa početnim uslovima $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$ pa iz (11) slijedi

$$v = v_0 - gt \sin \alpha$$

$$x = v_0 t - g \frac{t^2}{2} \sin \alpha$$

U trenutku zaustavljanja t_1 je $v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = v_0 / g \sin \alpha,$

a preteniput za to vrijeme je $L = x(t_1) = v_0^2 / 2g \sin \alpha$

b) U slučaju hrapave strune zavon, kao komponenta reakcije veze (strune zavon) osim normalne komponente \vec{N} javlja se i sila trenja klizanja \vec{F}_{tr} čiji je intenzitet $F_{tr} = \mu_0 N$ a smjer suprotan smjeru brzine tačke.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{tr} + \vec{N}$$

$$x: ma = -mg \sin \alpha - F_{tr}$$

$$y: m \cdot 0 = -mg \cos \alpha + N \rightarrow N = mg \cos \alpha \rightarrow F_{tr} = (\mu_0 mg \cos \alpha)$$

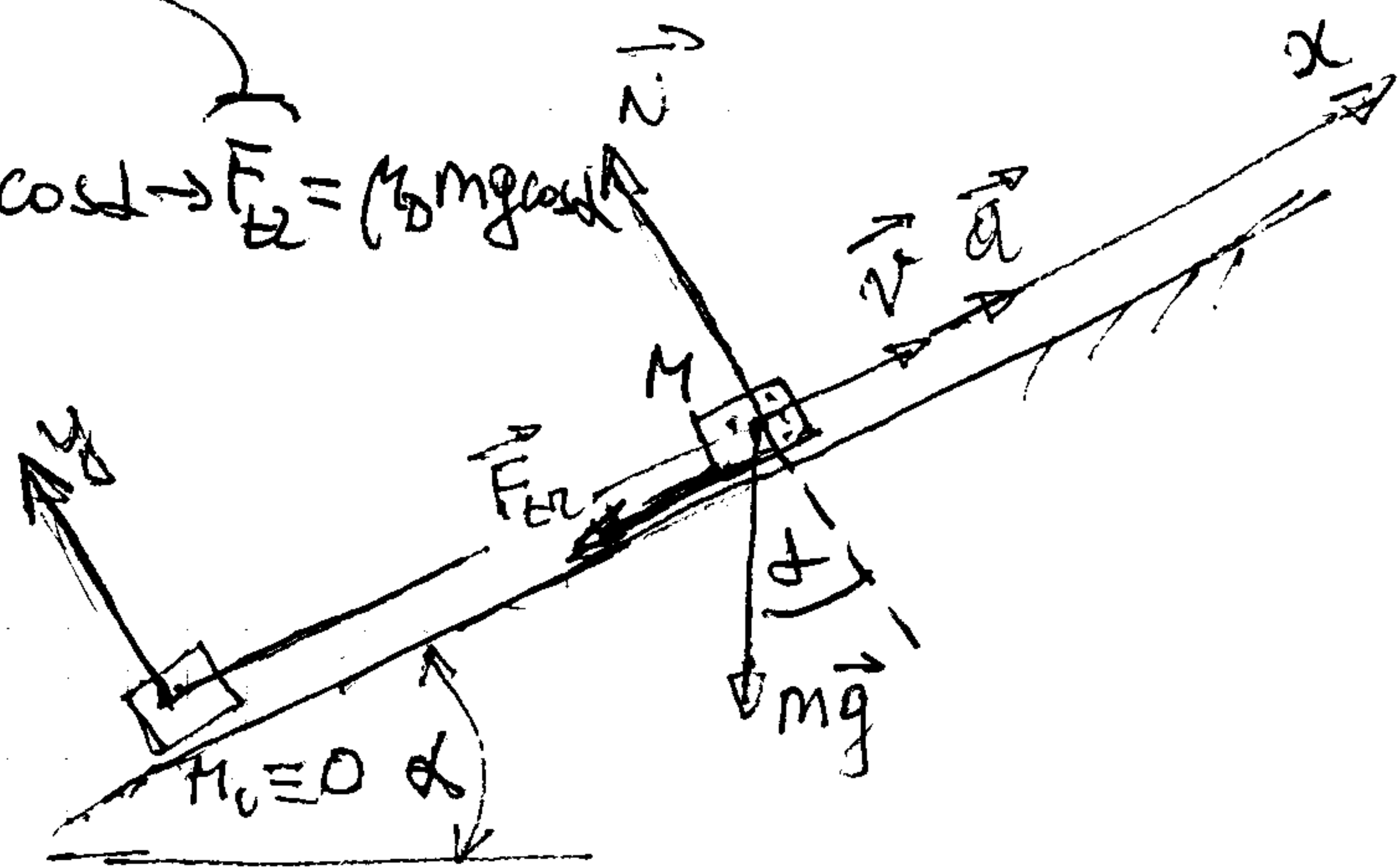
$$\Rightarrow a = -g(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow v = v_0 - gt(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)$$

$$x = v_0 t - g \frac{t^2}{2} (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)$$

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = v_0 / g(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)$$

$$L = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)}$$



4.5.2 PravoLINIJSKO kretanje pod dejstvom sile koja zavisi od vremena

$$m \ddot{x} = F_x(t) \Rightarrow \ddot{x} = a(t) = \frac{F_x(t)}{m}$$

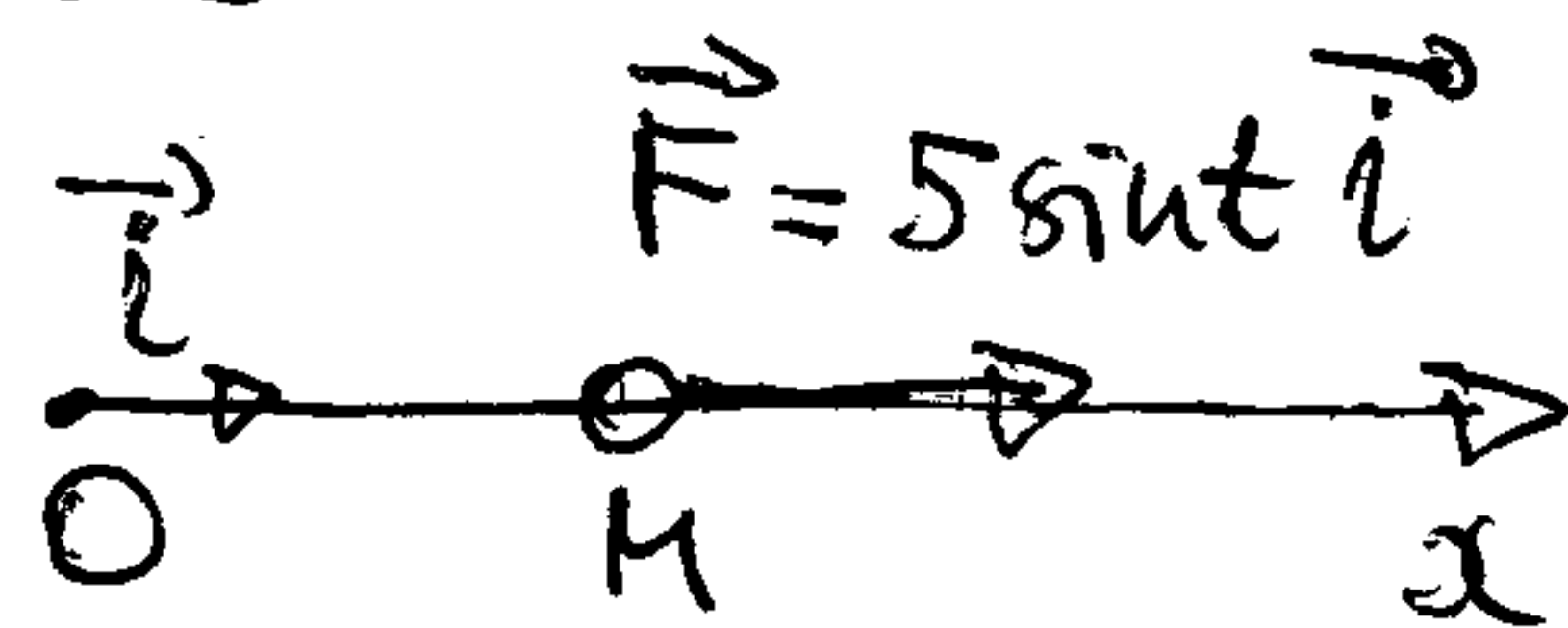
Zakon promjene brzine i konačna jednačina kretanja u ovom slučaju su (v. § 1.6.1, obrasci (30) i (31)):

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t) dt \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t) dt \end{aligned} \right\} (12)$$

Primer 7. Tačka M, mase $m = 1 \text{ kg}$, kreće se duž x -ose pod dejstvom sile $F_x = 5 \sin t \text{ [N]}$. Za početne uslove: $x(0) = 0, v(0) = 0$, odrediti: a) konačnu jednačinu kretanja tačke; b) ubrzanje, brzinu i položaj tačke u trenutku $t_1 = 2\pi \text{ s}$.

a) $m \ddot{x} = F_x, m = 1, F_x = 5 \sin t$

$\Rightarrow a(t) = 5 \sin t$



$$(12) \Rightarrow v(t) = v_0 + 5 \int_0^t \sin t dt = -5 \cos t \Big|_0^t = 5 - 5 \cos t$$

$$v(t) = 5(1 - \cos t)$$

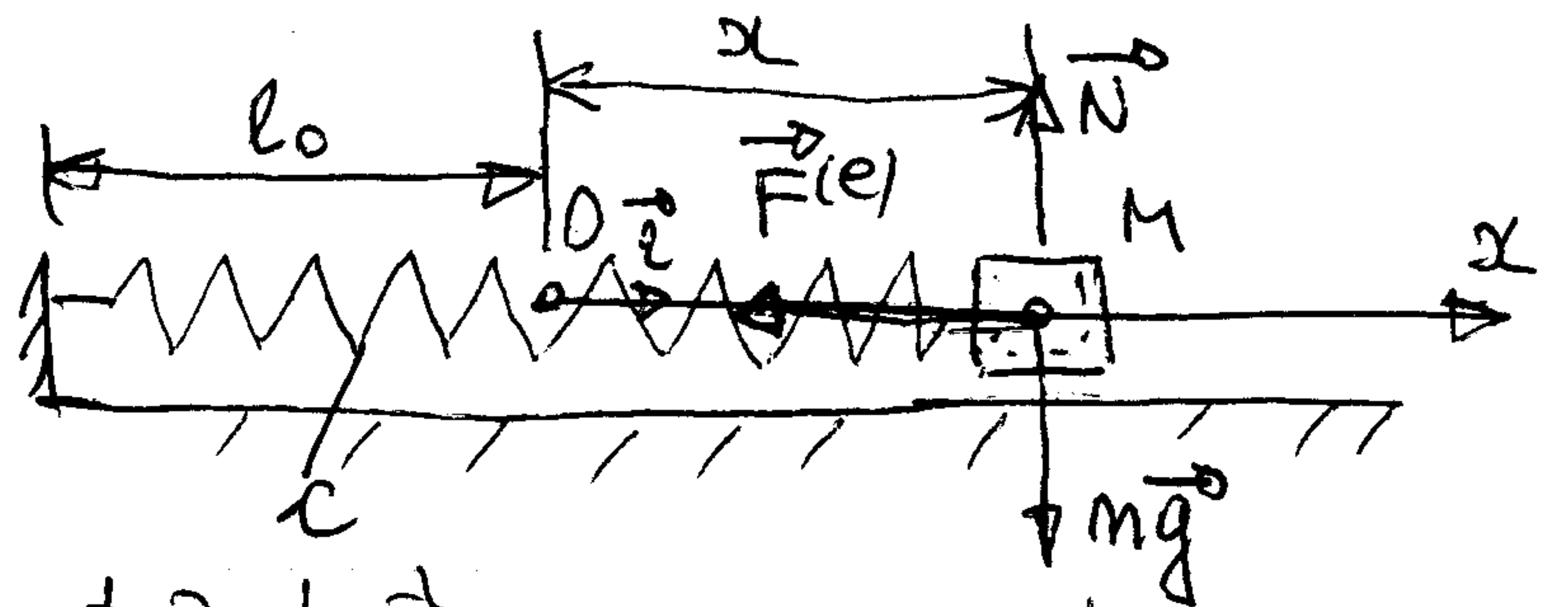
$$x(t) = x_0 + 5 \int_0^t (1 - \cos t) dt = (5t - 5 \sin t) \Big|_0^t = 5(t - \sin t)$$

$$\boxed{x(t) = 5(t - \sin t)}$$

b) $\ddot{x}(t_1) = a(t_1) = 0; v(t_1) = 0; x(t_1) = 10\pi \text{ m} \approx 31,4 \text{ m}$

4.5.3 Harmonijske oscilacije (Primer pravolinijskog kretanja pod dejstvom sile koja je funkcija položaja)

Posmatrajmo tačku M , mase m , koja može da se kreće pravolinijski po glatkoj horizontalnoj ravni koja je vezana za slobodni kraj opruge



za slobodni kraj opruge brtosti c . U položaju ravnoteže tačke opruge je nedeformisana i njena dužina je l_0 i u taj položaj postavimo početak O x -ose. Na tačku djeluju: elastična sila opruge $\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$, sila težine $m\vec{g}$ i reakcija glatke podloge \vec{N} .

Kada vektoru diferencijalnu jednačinu kretanja posmatrane tačke

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(e)} + m\vec{g} + \vec{N}$$

projiciramo na x -osu, dobijamo

$$m\ddot{x} = -cx,$$

odnosno

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (13)$$

Dobijena jednačina je linearna, homogena diferencijalna jednačina drugog reda i njeno opšte rješenje se može napisati u obliku

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (14)$$

gdje su C_1 i C_2 integracione konstante. Koristeći početnih uslova: $t_0 = 0$, $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$, odredjujete konstante C_1 i C_2 :

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = v_0 / \omega \quad (15)$$

Kada (15) uvrstimo u (14) dobijamo konačnu jednačinu kretanja tačke

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (16)$$

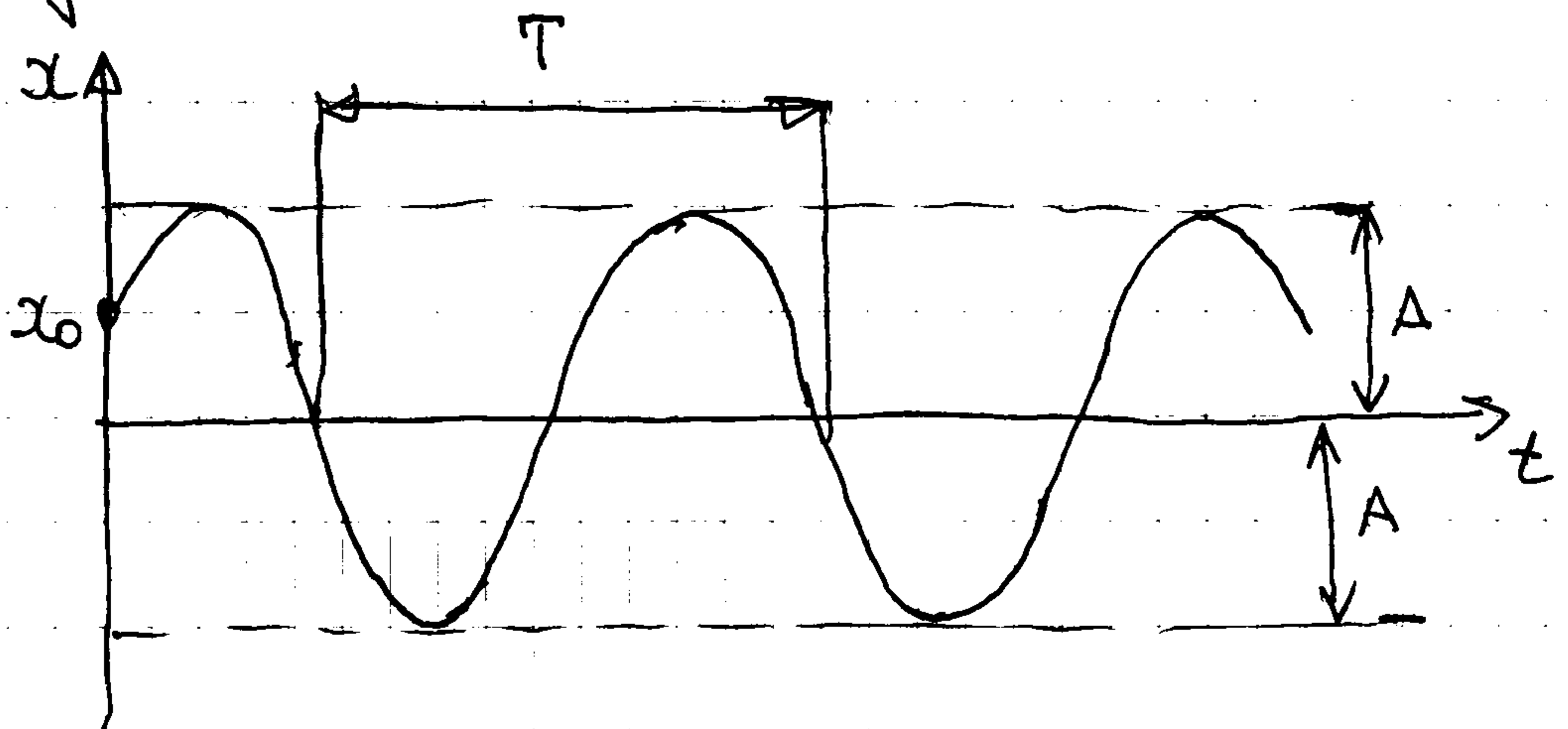
Ako umjesto C_1 i C_2 uvedemo druge konstante A i α sinjenu jednačinu

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = A \cos \alpha,$$

jednačina (16) se može napisati u pogodnijem obliku

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0} \quad (17)$$

Prema tome, koordinata x koja određuje položaj tačke mijenja se po sinusnom zakonu i takvo kretanje zove se harmonijsko oscilovanje.



Kretanje je periodično ($x(t+T) = x(t), \forall t$) sa periodom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}},$$

koji se zove period harmonijskih oscilacija. Broj perioda oscilovanja u jednoj sekundi $f = \frac{1}{T}$ zove se učestanost (frekvencija) i u SI sistemu se mjeri hercima ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). Veličina $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ zove se bržina frekvencija, $(\omega t + \varphi)$ je faza oscilovanja, a φ početna faza. Najveće udaljenje tačke M od ravnotežnog položaja $x=0$ (centra oscilovanja) zove se amplituda i ona je

$$A = |x_{\max}(t)| = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

4.6 Krivolinijsko kretanje tačke u ravni

Potrebni i dovoljni uslovi za ravansko kretanje materijalne tačke jesu da rezultujuća sila \vec{F} koja djeluje na tačku i početna brzina \vec{v}_0 , ukoliko je različita od nule, leže u jednoj ravni.

Postavimo Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ u ravni sile \vec{F} i početne brzine \vec{v}_0 .

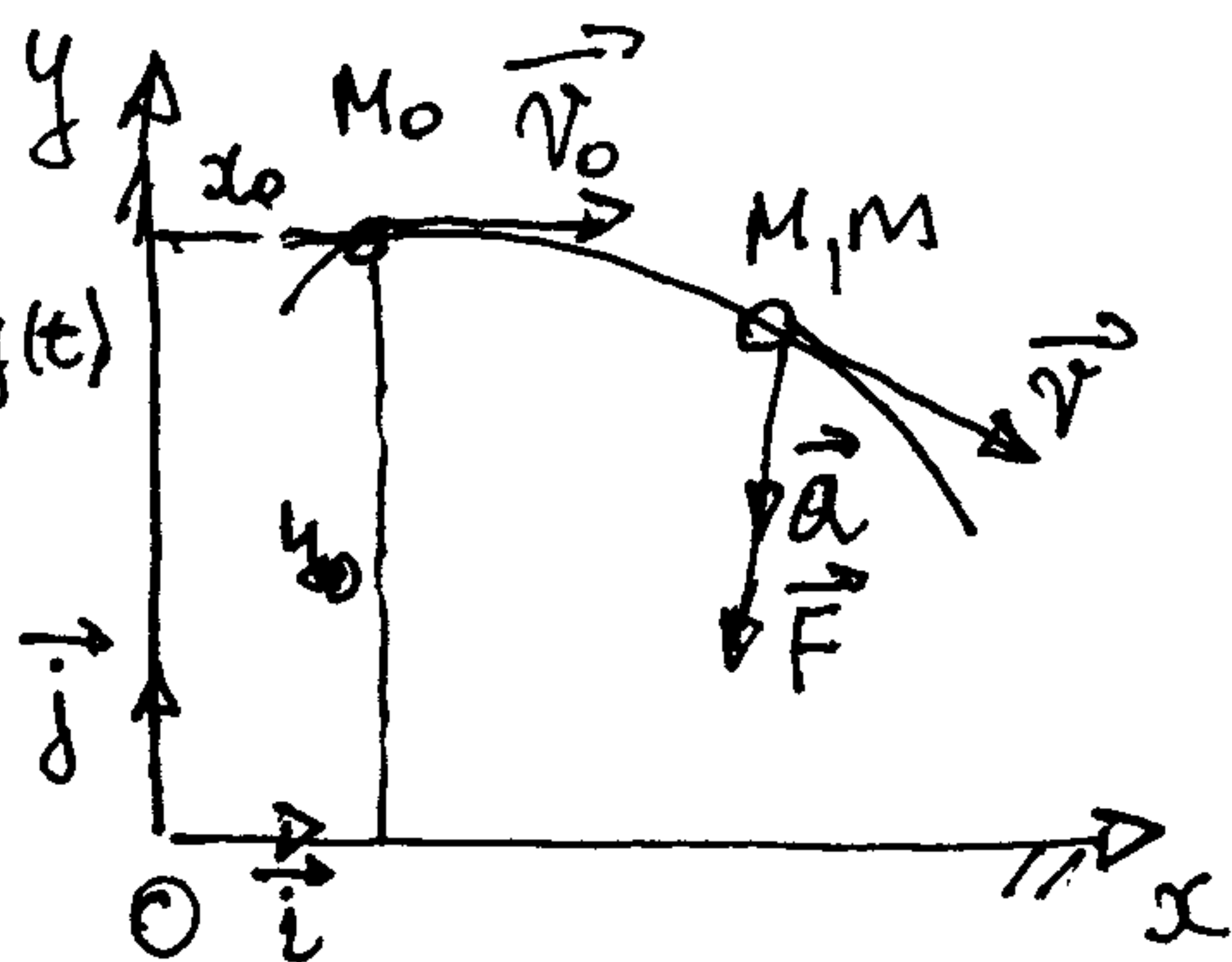
Konačne jednačine kretanja tačke $x=x(t), y=y(t)$ određujemo integracijom diferencijalnih jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = F_x,$$

$$m\ddot{y} = F_y,$$

uz korišćenje početnih uslova

$$t_0 = 0: x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \dot{x}(t_0) = v_{0x} = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = v_{0y} = \dot{y}_0.$$



Primer. Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru, u homogenom polju sile teže.

To je kretanje koje nastaje kada se materijalna tačka mase m , izbaci iz neke tačke u blizini Zemljine površine početnom brzinom \vec{v}_0 koja zaklapa ugao α prema horizontu (elevacioni ugao).

Koordinatni sistem $Oxyz$ postavimo u vertikalnoj ravni tako da xy je početak u početnom položaju tačke M_0 , x -osa horizontalna, a y -osa usmerena vertikalno na više.

Na tačku djeluje samo sila teže $\vec{G} = -mg\vec{j}$ pa su diferencijalne jednačine kretanja

$$m\ddot{x} = 0,$$

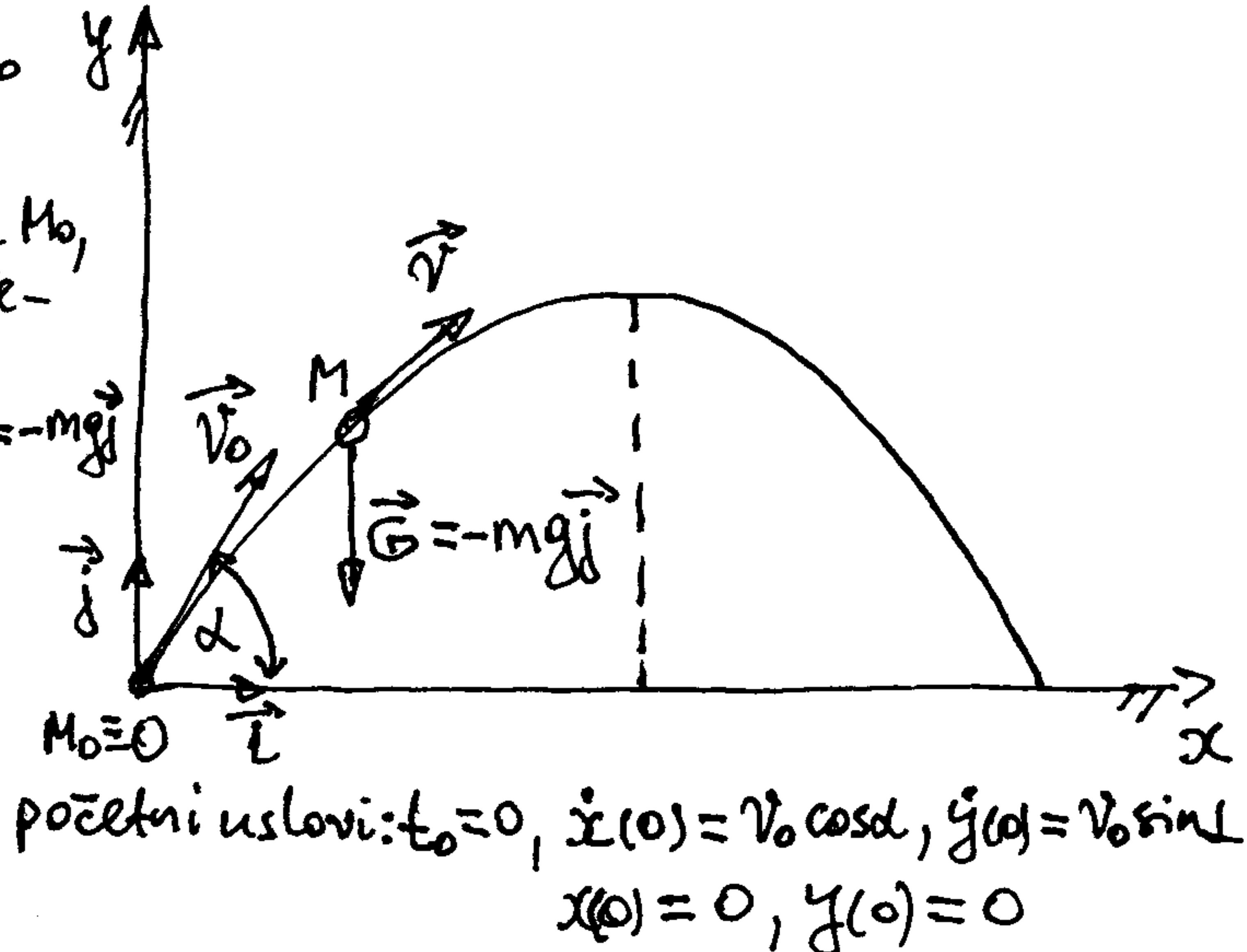
$$m\ddot{y} = -mg,$$

odnosno

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \rightarrow \dot{x} = C_1$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g \rightarrow \dot{y} = \int -g dt = -gt + C_2$$

Na osnovu početnog uslova za brzinu određujemo integracione konstante C_1 i C_2 : $C_1 = v_0 \cos \alpha$, $C_2 = v_0 \sin \alpha$ pa je zakon promjene brzine



$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt,$$

Integracijom ovih jednačina dobijamo

$$x = \int v_0 \cos \alpha dt = v_0 t \cos \alpha + C_3$$

$$y = \int (v_0 \sin \alpha - gt) dt = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2} + C_4$$

Početni uslov za položaj daje $C_3 = C_4 = 0$, i konačne jednačine kretanja tačke su:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} (*)$$

Na osnovu jednačina (*) možemo, korišćenjem metoda kinematike, odrediti sve karakteristične datog kretanja tačke.

Eliminacijom vremena t iz jednačina (*) nalatimo jednačinu trajektorije

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Trajektorija je parabola čija je osa paralelna y -osi.

Kao što je već napomenuto, kada je poznata putanja tačke pogodno je koristiti Ojlerove jednačine (8).

Primer. Matematičko klatno

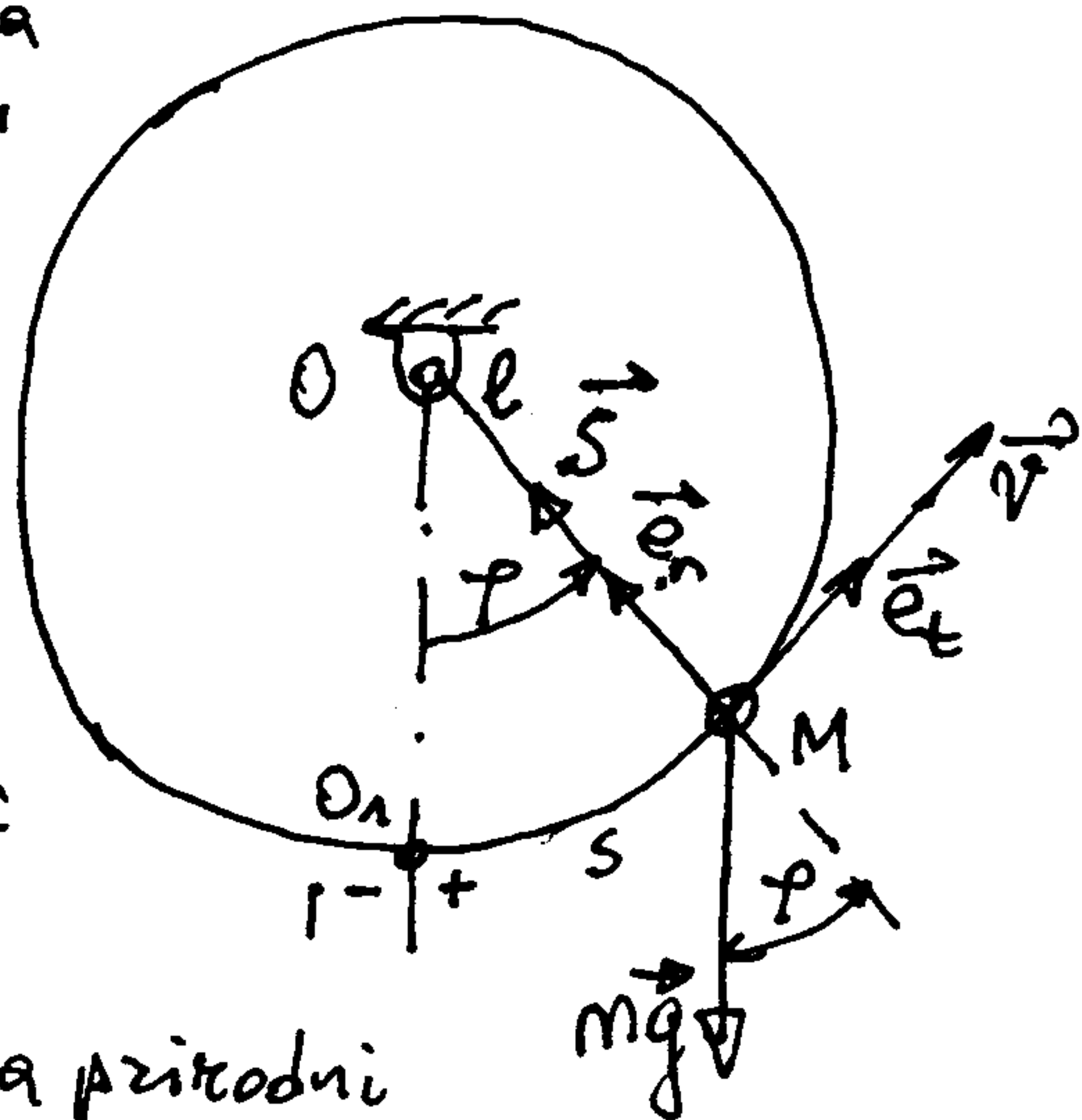
Pod matematičkim klatnom podrazumijevamo materijalnu tačku koja se kreće po kružnici, u vertikalnoj ravni, pod dejstvom sile teže. Vezu koja obezbeđuje ovakvo kretanje može biti ostvarena na razne načine, recimo pomoću lakog krutog štapa OM , dužine l , koji se može slobodno okretati oko nepokretne horizontalne ose O , pa je tačka prinudena da se kreće po kružnici poluprečnika l sa centrom u tački O .

Položaj tačke M se može odrediti lučnom koordinatom s , odnosno uglom φ koji štاپ zadržava sa vertikalnim pravcem ($s = l\varphi$).

Na tački M osim sile teže $m\vec{g}$ djeluje i reakcija veze - sila u štapi $\vec{R} = \vec{S} = S\vec{e}_r$ pa je osnovna jednačina dinamike u vektorskom obliku:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S},$$

a diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na prirodni koordinatni sistem glase:



$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi$$

$$m \frac{v^2}{l} = -mg \cos \varphi + S$$

Posto je $v = l \dot{\varphi}$ i $\dot{v} = l \ddot{\varphi}$ pa gornje jednačine postaju

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi &= 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \\ S &= ml \dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi \end{aligned} \right\} (**)$$

Jednačina $(**)_1$ je diferencijalna jednačina kretanja matematičkog klatna – njenom integracijom za zadane početne uslove ($\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 = v_0/l$) određuje se tačna jednačina kretanja $\varphi = \varphi(t)$, a zatim se na osnovu jednačine $(**)_2$ određuje reakcija veze – sila u stopu S . Nažalost da se rješenje jednačine $(**)_1$ ne može izraziti preko elementarnih funkcija, pa se najčešće ona rješava numerički.

U specijalnom slučaju kada klatno izvlači tačno kretanja pri kojima je $|\varphi(t)| \ll 1$, može se sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti staviti da je $\sin \varphi \approx \varphi$ pa dobijemo jednostavniju (linearnu) diferencijalnu jednačinu

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

koja je istog oblika kao i diferencijalna jednačina (13). Ona opisuje male oscilacije matematičkog klatna oko donjeg vertikalnog položaja, koje su određene harmonijskim zakonom oblika

$$\varphi = A \sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{\varphi_0^2 + (\dot{\varphi}_0/\omega)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{\dot{\varphi}_0 \omega}{\varphi_0}$$

ičiji je period oscilovanja

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

4.7 D'alambertov princip

Kao što smo ranije konstatovali, osnovna jednačina dinamike ne-slobodne tačke je oblika

$$m\vec{a} = \vec{F}_a + \vec{R}, \quad (18)$$

gdje je \vec{F}_a rezultanta aktivnih sila, a \vec{R} rezultanta sila reakcije veza.

Uvedimo, s formalne tačke gledišta, inercijalnu silu

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$$

Ona je po intenzitetu jednaka proizvodu mase tačke i njenog ubrzanja, ali je suprotnog smjera od smjera ubrzanja. Koriscenjem ovog pojma jednačina (18) se zapisuje u obliku

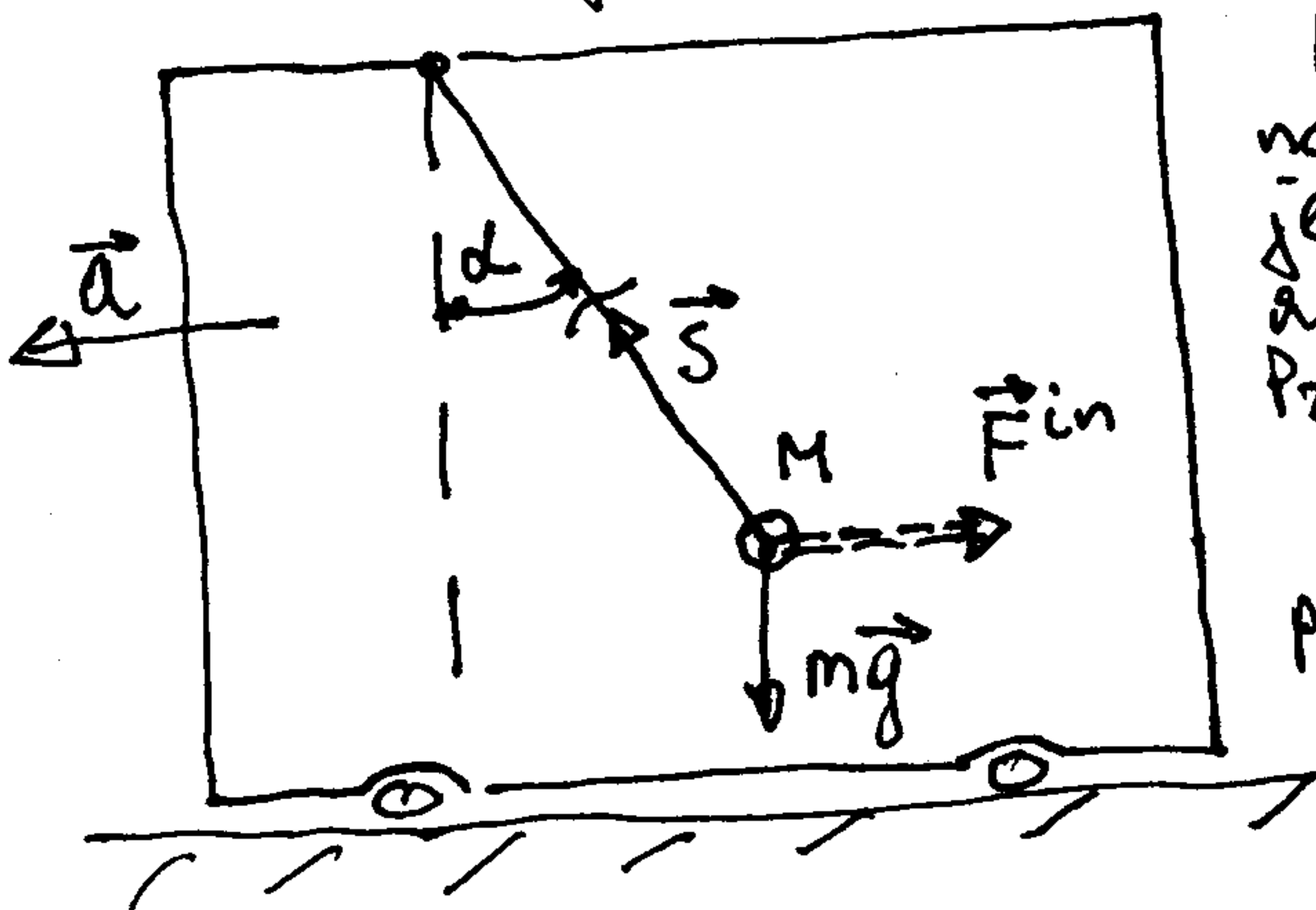
$$\vec{F}_a + \vec{R} + \vec{F}_{in} = 0 \quad (19)$$

Jednačina (19) izražava D'alambertov princip za tačku: Ako u svakom trenutku vremena aktivnim silama i reakcijama veza koje djeluju na materijalnu tačku dodamo inercijalnu silu, onda će taj sistem sila biti u ravnoteži.

Naglasimo da na materijalnu tačku stvarno djeluju samo aktivne sile i reakcije veza, a inercijalna sila je uvedena uslovno (vještački) da bi bili u stanju da dinamičke jednačine postavimo formalno u formi statičkih jednačina.

Primjena ovog principa je pogodna pri rješavanju prvog zadatka dinamike.

Primjer 8. U toku ubrzavanja voza pri polasku iz stanice objesi se o konac teret, pri čemu se drugi kraj konca pričvrsti za tavanicu nekog vagona. Tom prilikom konac, kada se ubrzanje ustali, sklene od vertikalnog pravca za ugao $\alpha = 5^\circ$. Odrediti ubrzanje voza.

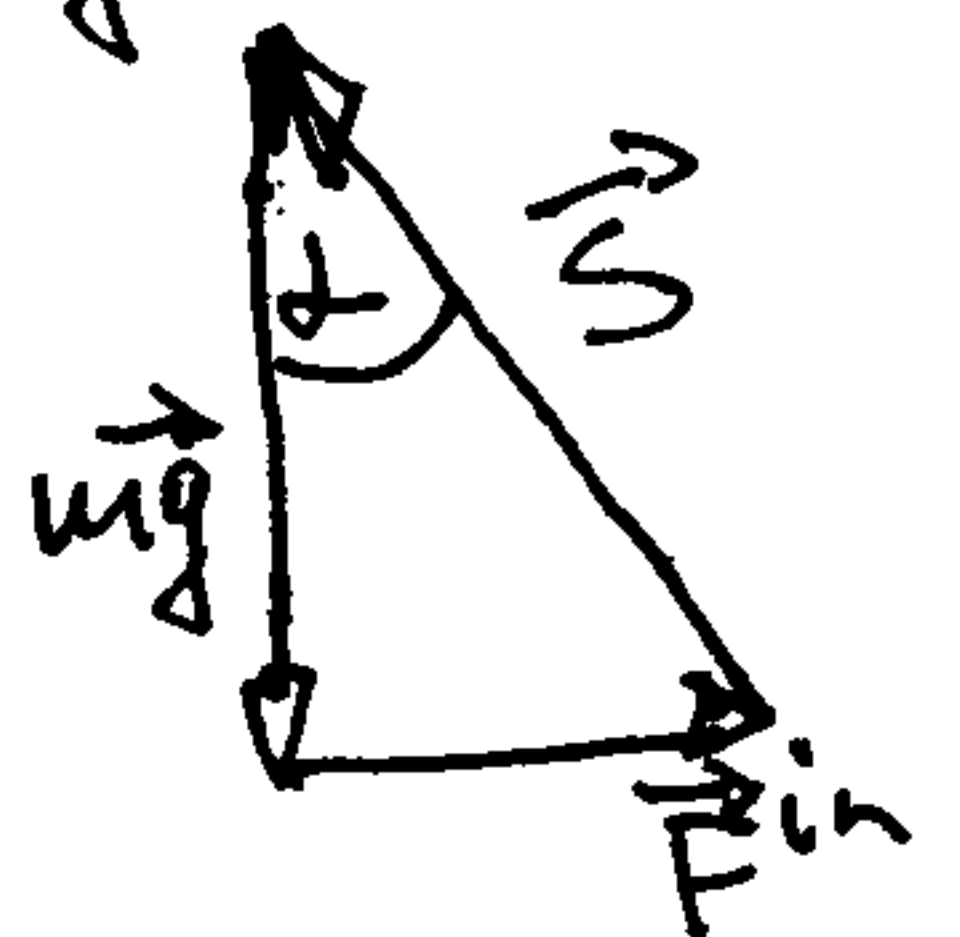


Na teret djeluje sila teže $m\vec{g}$ i sila u koncu (reakcija veze) \vec{S} . Dvije sile su pridružene silu inercije čiji je intenzitet $F_{in} = ma$, a smjer suprotan od smjera ubrzanja voza \vec{a} . Prema D'alambertovom principu je

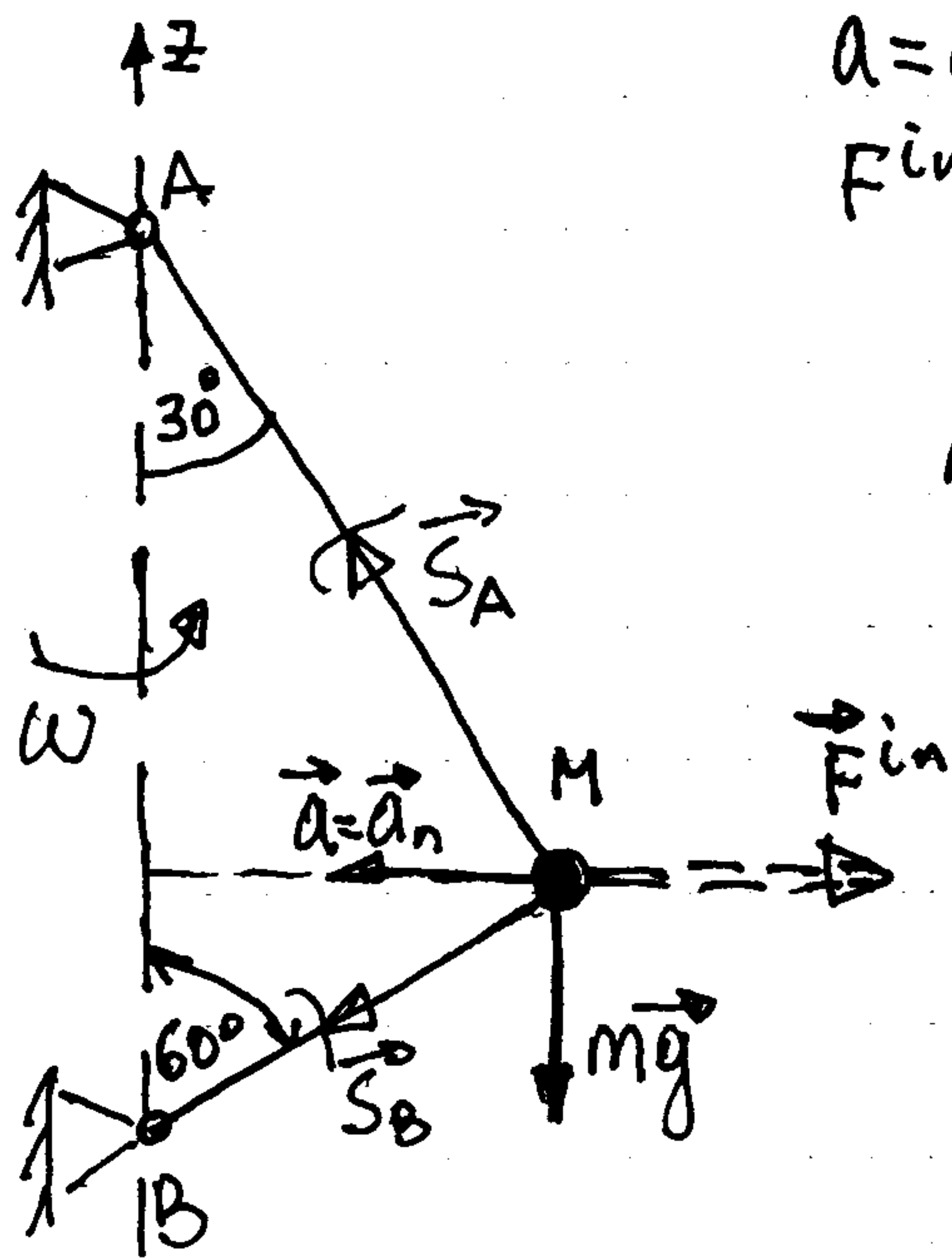
$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{F}_{in} = 0,$$

$$\text{pa je } \frac{F_{in}}{mg} = \tan \alpha, \text{ tj. } \frac{ma}{mg} = \tan \alpha$$

$$\Rightarrow a = g \tan \alpha = 0,86 \text{ m/s}^2$$



Primer 9. Kuglica mase $m = 2 \text{ kg}$ vezana je za lake brvne štapove. Sistem se obzice oko vertikalne z-ose konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 3 \text{ rad/s}$. Odredi sile u štapovima ako je $\overline{AM} = 1,5 \text{ m}$.



$$a = a_n = \overline{AM} \sin 30^\circ \omega^2 = 6,75 \text{ m/s}^2$$

$$F^{in} = m a = 13,5 \text{ N}$$

$$\vec{m}\vec{g} + \vec{S}_A + \vec{S}_B + \vec{F}^{in} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} y: -S_A \cos 60^\circ - S_B \cos 30^\circ + F^{in} &= 0 \\ z: -mg + S_A \sin 60^\circ - S_B \sin 30^\circ &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

$$(*)_2 \Rightarrow S_B = \sqrt{3} S_A - 2mg \text{ u } (*)_1 \Rightarrow$$

$$S_A = \frac{1}{2} F^{in} + \frac{\sqrt{3}}{2} mg, \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\boxed{S_A = 23,74 \text{ N}}$$

$$\boxed{S_B = 1,88 \text{ N}}$$

4.8. Rad sile i snaga

Rad sile je skalarna veličina koja predstavlja mjeru dejstva sile na materijalnu tačku pri njenom pomjeranju.

a) Rad konstantne sile na pravolinijskom pomjeranju

Rad konstantne sile \vec{F} na pravolinijskom pomjeranju njene napadne tačke $M_1 M_2 = \vec{U}$ definisan je skalarnim proizvodom vektora sile i vektora pomjeranja napadne tačke, tj.

$$A_{(M_1, M_2)} = \vec{F} \cdot \vec{M_1 M_2}, \quad (2.0)$$

ili

$$A_{(M_1, M_2)} = F U \cos \alpha = F_n U,$$

gdje je F_n projekcija sile na pravac pomjeranja ($F_n = F \cos \alpha$); $U = \overline{M_1 M_2}$.

Specijalni slučajevi:

1) Ako je $\alpha = 0$ ($\vec{F} \uparrow \vec{U}$), onda je $A_{(M_1, M_2)} = F U$;

2) Ako je $\alpha = 90^\circ$ ($\vec{F} \perp \vec{U}$), onda je $A_{(M_1, M_2)} = 0$;

3) Ako je $\alpha = 180^\circ$ ($\vec{F} \downarrow \vec{U}$), onda je $A_{(M_1, M_2)} = -F U$.

Prema tome, rad sile može biti: pozitivan (sila ubrzava kretanje), negativan (sila usporava kretanje), jednak nuli (sila upravna na pomjeranje — ne utiče na promjenu intenziteta brzine).

Jedinica mjere za rad sile je Džul, $1 J = 1 Nm$ — to je rad koji izvrši sila intenziteta jednog Njutra na pomjeranju od jednog metra u pravcu dejstva sile.

b) Rad promjenljive sile na krivolinijskom pomjeranju

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke M_1 na koju djeluje promjenljiva sila \vec{F} , duž krivolinijske trajektorije koja je određena parametarskom jednačinom kretanja $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Za beskonačno mali interval vremena dt tačka izvrši beskonačno malo (elementarno, infinitezimalno) pomjeranje $d\vec{r}$. Na ovom pomjeranju može se smatrati M_1 da je sila konstantna pa je, u skladu sa (2.0), rad sile na elementarnom pomjeranju

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.1)$$

i on se zove elementarni rad.

Važno je napomenuti da elementarni rad u opštem slučaju nije diferencijal neke funkcije (zato je označen sa δA , a ne dA).

